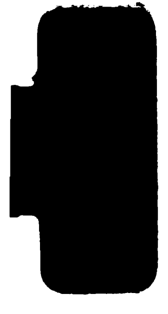





SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

Zehnter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1891.

Berichtigungen

im 8. Teile:

S. 83	Z. 1 v. u.	statt	$\varphi(h)$	setze	$\varphi(\lambda)$
84	4 „ „	„	Beziehungen	„	Bezeichnungen
185	10 v. o.	„	$\xi = \Theta$	„	$\xi = 0$
	11 v. u.	„	$= \Theta$	„	$= 0$
199	14 v. o.	„	sypischen	„	typischen

im 10. Teile:

108 4 v. u. ist die ganze Zeile zu streichen,

112 1 „ „ sind die letzten 5 Wörter zu streichen.

Inhalts-Verzeichniss

des zehnten Teils.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Optik.

Erd- und Himmelskunde.

Litterarische Berichte.

XXXIX. **Fink** (Gesch. El. M.) **Lasswitz** (Gesch. Atom.) **W. Schultz** (Harm. Bauk.) **Frege** (Funct. u. Begr.) **P. Du Bois Reymond** (Grdl. Erk. ex. Wiss.) **Engel** (Geschmack.) **Schotten** (plan. Unt.) **Mittag-Leffler** (Act. M. XIII.) **Escherich** (Mon. H. I.) Fac. Toulouse (Ann IV.)

XL. **Ed. Fischer** (Alg.) **Winter** (Alg.) **Petersen** (Plan.) **Heger** (Plan.) **Roese** (Geom.) **Walter** (Trig.) **H. Weber** (ell. Funct.) **Schumacher** (Gleich.) **Bergbohm** (Rechn. Meth.) **Mittag-Leffler** (Act. M. XIV.) **Mansion** (Math. X.)

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Zehnter Teil. Erstes Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1891.

I.

Einfache Constructionen für eine Reihe von Unicursalcurven dritter Ordnung.

Von

Herrn Dr. **H. Willig**,

Realgymnasiallehrer in Mainz.

Wenn man eine bestimmte Curve dritter Ordnung nach den allgemeinen Methoden von Plücker und Grassmann construiren will, so wird man nicht sehr schnell zum Ziele kommen. Diese Erfahrung wird jeder gemacht haben, der es versucht hat, nach den erwähnten Methoden zu construiren.

Für den genannten Zweck ist ein Verfahren willkommener, nach welchem man nur eine kleinere Anzahl von Species der Curven dritter Ordnung finden kann.

Diese Tatsache gab zu der folgenden Untersuchung Anlass, in welcher drei Methoden mitgeteilt werden, wonach man auf einfache Weise mehrere Unicursalcurven dritter Ordnung graphisch darstellen kann.

1. Methode.

Lehrsatz. Es sind zwei Geraden x und y und eine Parabel gegeben. Zieht man durch den Punkt, in welchem die Parabeltangente[1]) t die Gerade x schneidet, eine Parallele zu y und durch den

---

1) Eine Parabeltangente wird bei dieser Construction am einfachsten mittels eines rechten Winkels gefunden, der so gelegt wird, dass der eine Schenkel durch den Brennpunkt geht, während der Scheitel auf der Scheiteltangente liegt. Der andere Schenkel ist eine Parabeltangente. Man braucht also die Parabel selbst nicht; es genügt, wenn ihre Scheiteltangente und ihr Brennpunkt gegeben sind.

Punkt, in welchem y von t geschnitten wird, eine Parallele zu x, so ist der Ort des Schnittpunktes dieser zwei Parallelen bei veränderlichem t eine Unicursalcurve dritter Ordnung.

Beweis. Wählt man x und y zu Coordinatenaxen, so findet man aus der Gleichung der Parabel

$$a_{11}u^2+2a_{12}uv+a_{22}v^2+2a_{13}u+2a_{23}v=0$$

(wo u und v die Coordinaten der Tangente sind) die Gleichung des gesuchten Ortes, indem man

$$u=-\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad v=-\frac{1}{y}$$

setzt; denn die Abschnitte, welche die Parabeltangente auf den Axen bildet, sind bei der angegebenen Wahl des Coordinatensystems gleich den Coordinaten des Punktes, dessen Ort untersucht werden soll.

Man findet die Gleichung

$$a_{11}y^2+2a_{12}xy+a_{22}x^2-2(a_{13}y+a_{23}x)xy=0.$$

Discussion dieser Gleichung.

Jede Gerade des Büschels $y=\lambda x$ hat im Punkte $0 \mid 0$ zwei Punkte mit dieser Curve dritter Ordnung gemeinsam; folglich ist $0 \mid 0$ ein Doppelpunkt.

Um die Art dieses Doppelpunktes zu erkennen, zerlegt man die quadratischen Glieder der Gleichung, nämlich den Ausdruck

$$a_{11}y^2+2a_{12}xy+a_{22}x^2$$

in lineare Factoren. Setzt man jeden derselben gleich null, so erhält man die Gleichungen der Tangenten im Doppelpunkte. Dieselben sind

$$\left.\begin{array}{l}\text{real und verschieden}\\ \text{real und sich deckend}\\ \text{imaginär}\end{array}\right\},$$

wenn die Discriminante

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{null}\\ \text{negativ}\end{array}\right\} \text{ ist.}$$

Die zu discutirende Gleichung stellt also Curven mit einem Knotenpunkt, Rückkehrpunkt oder isolirten Punkte dar.

Der Ausdruck $(a_{13}y + a_{23}x)xy$ lehrt, dass sämtliche Asymptoten real sind. Zwei derselben laufen zu den Coordinatenaxen und die dritte zur Geraden

$$a_{13}y + a_{23}x = 0$$

parallel.

Um die Asymptote zu finden, welche zur y-Axe parallel läuft, setzt man in der gegebenen Gleichung $x = m$ und $y = \infty$. Man findet aus

$$a_{11}y^2 + a_{12}my + a_{22}m^2 - 2a_{13}my^2 - 2a_{23}m^2y = 0$$

dass

$$m = \frac{a_{11}}{2a_{13}}$$

Um die zur x-Axe parallele Asymptote zu finden, setzt man in der gegebenen Gleichung $y = n$ und $x = \infty$. Man findet, dass

$$n = \frac{a_{22}}{2a_{23}}$$

Um endlich die zu

$$a_{13}y + a_{23}x = 0$$

parallele Asymptote zu finden, setzt man

$$a_{13}y + a_{23}x = p, \quad \lim\frac{y}{x} = -\frac{a_{23}}{a_{13}} \quad \text{und} \quad x = \infty$$

Man findet, dass

$$p = -\frac{a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})}{2a_{13}a_{23}}$$

wofür man auch schreiben kann

$$p = \frac{\varDelta}{2A_{12}}$$

wenn

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

die Adjuncta von $\varDelta$ ist.

Um zu zeigen, wie man in jedem Punkte der gefundenen Curven dritter Ordnung die Tangente construirt, wird angenommen, dass der Parabeltangente $u \mid v$ (mit dem Contact $x \mid y$) der Punkt $X \mid Y$, dessen Tangente die Coordinaten $U \mid V$ besitzt, entspreche.

Nun ist

1. $ux + vy + 1 = 0$
2. $UX + VY + 1 = 0$
3. $uX + 1 = 0$ und
4. $vY + 1 = 0$

Weil $x \mid y$ der Berührungspunkt von $u \mid v$ ist, findet die Beziehung statt:

5. $x\,du + y\,dv = 0$

und weil $U \mid V$ die Tangente im Punkte $X \mid Y$ ist, existirt die Gleichung:

6. $U\,dX + V\,dY = 0$

Ferner folgt aus Gleichung (3) die Bedingung

7. $u\,dX + X\,du = 0$

und aus (4)

8. $v\,dY + Y\,dv = 0$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen du, dv, dX, dY, X und Y, so ergiebt sich, dass

$$U = -xu^2 \quad \text{und} \quad V = -yv^2$$

Setzt man

$$-\frac{1}{u} = a, \quad -\frac{1}{v} = b, \quad -\frac{1}{U} = A \quad \text{und} \quad -\frac{1}{V} = B$$

so sind a und b die Abschnitte, welche die Parabeltangente, und A, B die Abschnitte, welche die entsprechende Tangente der Curve dritter Ordnung auf den Axen bildet.

Da nun

$$A = \frac{a^2}{x}$$

so ist die Strecke, welche irgend eine Tangente der Curve dritter Ordnung auf der x-Axe abschneidet, die mittlere Proportionale zwischen der Abscisse des entsprechenden Parabelpunktes und dem Abschnitte auf der x-Axe, welchen die Parabeltangente dieses Punktes bildet. Ebenso ist B mittlere Proportionale zwischen y und b. Es ist jedoch schon hinreichend, A zu bestimmen, um die Tangente im Punkte $X \mid Y$ zu construiren.

Um die Gleichungen für nachstehende Fälle zu finden, setzt man in

$$pv^2 = 2u$$

$$u = \frac{U}{-\alpha U - \beta V + 1} \quad \text{und} \quad v = \frac{V}{-\alpha U - \beta V + 1}$$

und ersetzt dann U durch $-\frac{1}{x}$ und V durch $-\frac{1}{y}$. Man findet

$$px^2 + 2y(\alpha y + \beta x + xy) = 0$$

anzuwenden für $\left(\alpha \lessgtr 0,\ \beta = 0\right)$, $(\alpha < 0,\ \beta > 0)$, $\left(\alpha > 0,\ \beta^2 \overline{<} 2p\alpha\right)$.
Hier sind $u \mid v$ die Coordinaten der beweglichen Parabeltangente in Bezug auf ein bestimmtes System, $U \mid V$ dieselben bezüglich eines neuen Systems, dessen Axen parallel den ursprünglichen sind, und dessen Anfangspunkt $\alpha \mid \beta$ ist.

Die Art des Doppelpunktes ist bei diesen 5 Curven von dem Vorzeichen des Ausdruckes $\beta^2 - 2p\alpha$ abhängig.

Liegt $\alpha \mid \beta$ {innerhalb / auf / ausserhalb} der Parabel, so ergiebt sich ein {isolirter Punkt / Rückkehrpunkt / Knoten}.

In ebenso einfacher Weise lassen sich die Gleichungen für die Curven 6 bis 12 aufstellen.

2. Methode

Lehrsatz. Wählt man auf einem Kegelschnitte den Punkt O_1 und beliebig in der Ebene die Punkte O_2 und O_3, verbindet O_1 und O_2 mit einem beliebigen Punkte P des Kegelschnittes und zieht durch O_3 die Parallele zu O_1P, so ist, wenn P den Kegelschnitt beschreibt, der Ort des Punktes, in welchem O_2P diese Parallele schneidet, eine Unicursalcurve dritter Ordnung [1]).

Beweis. In Bezug auf ein beliebiges zweiaxiges Coordinatensystem mögen O_1, O_2 und O_3 die Coordinaten $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$ und $x_3 \mid y_3$ besitzen.

Der in Betracht kommende Kegelschnitt möge durch die beiden projectivischen Büschel

$$x + \lambda y = 0 \quad \text{und} \quad y + \lambda(2p + qx) = 0$$

definirt sein; er hat also die Gleichung

$$y^2 = 2px + qx^2$$

1) Man würde auch eine Universalcurve dritter Ordnung erhalten, indem man eine Parallele zu O_2P durch O_3 zieht und ihren Schnittpunkt mit O_1P aufsucht.

Dieselbe stellt eine $\left\{\begin{array}{l}\text{Hyperbel}\\\text{Parabel}\\\text{Ellipse}\end{array}\right\}$ dar, wenn q $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\\text{null}\\\text{negativ}\end{array}\right\}$ ist, und wenn das Coordinatensystem rechtwinkelig ist, so stellt sie für $q = -1$ einen Kreis dar.

Die Gleichung der Geraden, welche O_2 mit dem Schnittpunkte P der entsprechenden Strahlen

$$x + \lambda y = 0 \quad \text{und} \quad y + \lambda(2p + qx) = 0$$

verbindet, hat die Form

$$y + \lambda(2p + qx) + \mu(x + \lambda y) = 0$$

wo μ eine Constante ist, die sich ergiebt, indem man in diese Gleichung die Coordinaten von O_2 einträgt. μ wird also aus der Gleichung

$$y_2 + \lambda(2p + qx_2) + \mu(x_2 + \lambda y_2) = 0$$

berechnet. O_2P hat mithin die Gleichung

$$(yx_2) - 2p\lambda(x - x_2) - \lambda^2[2p(y - y_2) + q(yx_2)] = 0$$

wo

$$(yx_2) = \begin{vmatrix} y & x \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Da die Allgemeinheit der Entwickelung nicht beeinträchtigt wird, so möge O_1 der Punkt $x = 0$, $y = 0$ sein, d. h. O_1 möge der Scheitel des Büschels

$$x + \lambda y = 0$$

sein, welcher bei schiefwinkeligen Coordinaten jeder Punkt des Kegelschnittes sein kann.

O_1P hat dann die Gleichung

$$x + \lambda y = 0$$

und die durch O_3 zu O_1P gezogene Parallele hat die Gleichung

$$x - x_3 + \lambda(y - y_3) = 0$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung und aus derjenigen für O_2P die Grösse λ, so findet man die Gleichung des zu untersuchenden Ortes. Dieselbe lautet:

$$(yx_2)(y - y_3)^2 + 2p(x - x_2)(x - x_3)(y - y_3) \\ - [2p(y - y_2) + q(yx_2)](x - x_3)^2 = 0$$

Discussion dieser Gleichung.

Jede Gerade, deren Gleichung die Form hat

$$y - y_3 = \varrho (x - x_3)$$

schneidet die gefundene Curve dritter Ordnung in den Punkten, die aus den Systemen:

$$\left| \begin{array}{c} (x - x_3)^2 = 0 \\ y - y_3 = \varrho (x - x_3) \end{array} \right| \quad \text{und}$$

$$\left| \begin{array}{c} (yx_2)\varrho^2 + 2p(x - x_2)\varrho - [2p(y - y_2) + q(xy_2)] \\ y - y_3 = \varrho(x - x_3) \end{array} \right| = 0$$

gefunden werden.

Das erste System hat zwei gleiche Lösungen, nämlich $x_3 \mid y_3$. O_3 ist mithin ein Doppelpunkt.

Setzt man

$$x - x_3 = X \quad \text{und} \quad y - y_3 = Y$$

so geht die Gleichung der zu discutirenden Curve über in

$$\begin{aligned} &[(Yx_2) + (y_3 x_2)] Y^2 + 2p(x_3 - x_2) XY \\ &\quad - [2p(y_3 - y_2) + q(Yx_2) + q(y_3 x_2)] X^2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Tangenten im Doppelpunkte werden dann aus der Gleichung

$$(y_3 x_2) Y^2 + 2p(x_3 - x_2) XY - [2p(y_3 - y_2) + q(y_3 x_2)] X^2 = 0$$

gefunden.

Dieselben sind $\left\{ \begin{array}{l} \text{real und verschieden} \\ \text{real und sich deckend} \\ \text{imaginär} \end{array} \right\}$, wenn

$$p^2(x_3 - x_2)^2 + [2p(y_3 - y_2) + q(y_3 x_2)](y_3 x_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{positiv} \\ \text{null} \\ \text{negativ} \end{array} \right\} \text{ist.}$$

Die gleichen Bedingungen ergeben sich auch dafür, dass die

Gerade $\left| \begin{array}{ccc} y & x & 1 \\ y_3 & x_3 & 1 \\ y_2 & x_2 & 1 \end{array} \right| = 0$ **den Kegelschnitt**

$$y^2 = 2px + qx^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{schneidet} \\ \text{berührt} \\ \text{nicht schneidet} \end{array} \right\}.$$

Denn setzt man in der Gleichung jener Geraden, nämlich in

$$y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} x - \frac{(y_3 x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = r \quad \text{und} \quad - \frac{(y_3 x_2)}{x_3 - x_2} = s$$

so werden die Abscissen ihrer Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte aus

$$r^2 x^2 + 2rsx + s^2 = 2px + qx^2$$

oder aus

$$(r^2 - q) x^2 + 2(rs - p)x + s^2 = 0$$

gefunden.

Diese Abscissen werden $\left\{\begin{matrix}\text{real und verschieden}\\ \text{gleich}\\ \text{imaginär}\end{matrix}\right\}$, d. h. die Gerade $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\\ \text{schneidet nicht}\end{matrix}\right\}$, wenn $p^2 - 2prs + qs^2$ oder

$$\frac{q^2(x_3 - x_2)^2 + [2p(y_3 - y_2) + q(y_3 x_2)](y_3 x_2)}{(x_3 - x_2)^2} \left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{null}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\} \text{ist.}$$

Daraus folgt, dass die Curve dritter Ordnung einen $\left\{\begin{matrix}\text{Knoten}\\ \text{Rückkehrpunkt}\\ \text{isolirten Punkt}\end{matrix}\right\}$ besitzt, wenn die Gerade $\overline{O_2 O_3}$ den Kegelschnitt $\left\{\begin{matrix}\text{schneidet}\\ \text{berührt}\\ \text{nicht schneidet}\end{matrix}\right\}$.

Die Richtung der Asymptoten wird aus der Gleichung

$$(Yx_2)(Y^2 - qX^2) = 0$$

gefunden.

Die Curve hat mithin dieselben unendlich fernen Punkte wie der Kegelschnitt selbst, und ausserdem liegt noch ein unendlich ferner Punkt in der Richtung

$$(Yx_2) = 0$$

d. h. in der Richtung $\overline{O_1 O_2}$.

Die mittels eines Kreises oder einer Ellipse abgeleiteten Curven dritter Ordnung haben nur eine reale Asymptote, die vermittelst der Hyperbel abgeleiteten dagegen drei.

Um die Gleichung der Asymptoten zu finden, die zu

$$(Yx_2) = 0$$

parallel ist, setze man

$$(Yx_2) = m, \quad \lim\frac{Y}{X} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{und} \quad \lim X = \infty$$

in die Curvengleichung ein. Man findet, dass

$$m = -\frac{(y_3 x_2)(y_2^2 - 2p x_2 - q x_2^2)}{y_2^2 - q x_2^2}$$

Ist

$$q = \frac{b^2}{a^2}$$

so ist der zu Grund gelegte Kegelschnitt eine Hyperbel, und die aus ihr erhaltene Curve dritter Ordnung hat noch die zwei Asymptoten

$$Y + \frac{b}{a}X = \frac{pa[b(x_3 - x_2) + a(y_3 - y_2)]}{b(bx_2 + ay_2)}$$

und

$$Y - \frac{b}{a}X = \frac{-pa[b(x_3 - x_2) - a(y_3 - y_2)]}{b(bx_2 - ay_2)}$$

Um zu zeigen, wie man die Tangente in irgend einem Punkte der zu discutirenden Curve dritter Ordnung durch eine lineare Construction finden kann, dient folgende Betrachtung.

Dem Punkte P des Kegelschnittes entspricht ein bestimmter Punkt Q der Curve dritter Ordnung. Dem Punkte P_1, der auf der ersteren Curve dem P benachbart ist, entspricht auf der letzteren Curve der Punkte Q_1, welcher Q benachbart ist. Mithin entspricht der Tangente PP_1 des Kegelschnittes die Tangente QQ_1 der Curve dritter Ordnung.

Bewegt sich ein Punkt von P nach P_1 (in gerader Linie), so bewegt sich der zugeordnete Punkt von Q nach Q_1 im allgemeinen auf dem Bogen einer Hyperbel, und für den Fall, dass $O_1O_2 \parallel P_1P_2$ ist, auf dem Bogen einer Parabel. Die Gerade QQ_1 ist Tangente dieser Kegelschnitte.

Da von der Hyperbel die drei Punkte Q, O_2 und O_3 und die Richtung der Asymptoten, und da ferner von der Parabel die Punkte Q, O_2 und O_3 und die Richtung der Durchmesser gegeben sind, so sind diese Kegelschnitte vollständig bestimmt, und es kann durch eine lineare Construction die Tangente in Q gefunden werden.

Die Gleichung der mittels eines Kreises construirten Curven dritter Ordnung findet man in Bezug auf das rechtwinkelige Coordinatensystem, das O_3 als Anfangspunkt besitzt, und bei welchem

die y-Axe parallel zur Tangente in O_1 ist, indem man in Gleichung (1) Seite 7

$$q = -1 \quad \text{setzt.}$$

Man findet

$$(Y^2 + X^2)[(Yx_2) + (y_3 x_2)] + 2pX[(Yx_3) - (Yx_2)] = 0 \,^{1)}$$

anzuwenden auf die Fälle

$$\left.\begin{array}{ll} 0 < x_3 < 2p, & y_3 = 0 \\ x_3 = 2p, & y_3 = 0 \\ x_3 < 0, & y_3 = 0 \\ x_3 > 2p, & y_3 = 0 \end{array}\right\} x_2 = 0, \quad y_2 = \infty$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 = p, & y_3 < p \\ x_3 = p, & y_3 = p \\ x_3 = p, & y_3 > p \end{array}\right\} x_2 = \infty, \quad y_2 = 0$$

Ausser diesen 7 Species der Curven dritter Ordnung lassen sich keine weiteren mittels eines Kreises nach dieser Methode construiren.

In Bezug auf das Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt O_3 ist, dessen x-Axe parallel zu den Durchmessern einer Parabel und dessen y-Axe parallel zu der durch O_1 gehenden Parabeltangente ist, haben die aus jener Parabel abgeleiteten Curven dritter Ordnung die Gleichung

$$Y^2[(Yx_2) + (y_3 x_2)] + 2pX[(Yx_3) - (Yx_2)] = 0$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass Herr Rychlicki im Programm des Gymnasiums zu Wongrowitz (1884) nach dieser Methode mittels einer Ellipse das Folium des Descartes construirt hat.

3. Methode.

Lehrsatz. Alle Fusspunktscurven der Parabel sind Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Beweis. In Bezug auf das rechtwinkelige Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Scheitel der Parabel ist, und dessen y-Axe die Scheiteltangente ist, hat die Parabel in Tangentialcoordinaten die Gleichung

---

1) p ist der Radius des Kreises.

$$pv^2 - 2u = 0$$

wo u die Abscisse und v die Ordinate der beweglichen Tangente ist.

Ist $\alpha \mid \beta$ der Pol der Fusspunktscurve, und sind x und y die Coordinaten des Punktes dieser Curve, welcher der Tangente $u \mid v$ entspricht, so existirt die Beziehung

$$u = -\frac{x-\alpha}{x(x-\alpha)+y(y-\beta)} \quad \text{und} \quad v = -\frac{y-\beta}{x(x-\alpha)+y(y-\beta)}$$

Die Fusspunktscurven der Parabel haben mithin die Gleichung

$$p(y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)] = 0$$

welche Curven dritter Ordnung darstellt.

Discussion dieser Curven.

Setzt man

$$x - \alpha = X \quad \text{und} \quad y - \beta = Y$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$pY^2 + 2\beta XY + 2\alpha X^2 + 2X(X^2+Y^2) = 0$$

Der Punkt $0 \mid 0$, d. h. der Pol, ist, wie man leicht zeigt, ein Doppelpunkt.

Die Tangenten in demselben werden gefunden, indem man

$$pY^2 + 2\beta XY + 2\alpha X^2$$

in lineare Factoren zerlegt.

Diese Tangenten sind $\left\{\begin{array}{l}\text{real und verschieden}\\ \text{real und sich deckend}\\ \text{imaginär}\end{array}\right\}$, wenn

$\beta^2 - 2p\alpha \left\{\begin{array}{l}\text{positiv}\\ \text{null}\\ \text{negativ}\end{array}\right\}$ ist, d. h. wenn der Pol $\left\{\begin{array}{l}\text{ausserhalb}\\ \text{auf}\\ \text{innerhalb}\end{array}\right\}$ der Parabel liegt.

Die unendlich fernen Punkte werden aus der Gleichung

$$X(X^2+Y^2) = 0$$

gefunden. Es ist also nur einer derselben real.

Die Asymptote, welche zu $X = 0$ parallel ist, hat die Gleichung

$$X = -\frac{p}{2}$$

Dass man in jedem Punkte dieser Curven dritter Ordnung durch eine lineare Construction die Tangente finden kann, ist bekannt.*

Wenn F der Pol, P ein Punkt der Parabel und Q der entsprechende Punkt der Fusspunktscurve ist, so ist die Tangente an die Fusspunktscurve in Q auch Tangente an den Kreis, der über FP (als Durchmesser) beschrieben wird.

*(Vgl. Sohncke, Aufgaben aus der Differentialrechnung S. 164).

Mainz, 15. Mai 1889.

II.

Analytische Untersuchungen der Curven zweiter und dritter Ordnung mittels numerischer Dreieckscoordinaten.

Von

Heinrich von Jettmar.

Schneiden sich drei Gerade in den Punkten A_1, A_2, A_3, so ist die Lage jedes Punktes M der Ebene $A_1A_2A_3$ durch seine Abstände x_1, x_2, x_3 von den drei Geraden bestimmt, und es besteht überdies die Gleichung

$$\frac{x_1}{h_1}+\frac{x_2}{h_2}+\frac{x_3}{h_3}=1$$

wo h_1, h_2, h_3 die Höhen des Dreiecks $A_1A_2A_3$ bezeichnen. Legt man durch M die drei Ecktransversalen A_1M, A_2M, A_3M, welche die gegenüberliegenden Seiten beziehungsweise in B_1, B_2, B_3 schneiden, und setzt

$$\frac{MB_1}{A_1B_1}=\frac{x_1}{h_1}=\alpha_1,\quad \frac{MB_2}{A_2B_2}=\frac{x_2}{h_2}=\alpha_2,\quad \frac{MB_3}{A_3B_3}=\frac{x_3}{h_3}=\alpha_3$$

so ist M auch durch die numerischen Werte α_1, α_2, α_3, für welche die Gleichung

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1 \tag{1}$$

gilt, vollkommen bestimmt.

Ist $\alpha_1 =$ const., so ist hierdurch eine der Seite A_2A_3 parallele Gerade gegeben, welche die Seite A_1A_2 in C_2 (oder AA_3 in C_3) so schneidet, dass

$$C_2A_2 : A_1A_2 = \alpha_1 \quad (\text{oder} \quad C_3A_3 : A_1A_3 = \alpha_1)$$

wird. Ist überdies α_2 gegeben, so erhalten wir in ähnlicher Weise eine der A_1A_3 Parallele, und der Durchschnitt beider Parallelen ergiebt einen Punkt, für welchen nun auch α_3 aus der Gl. (1) gefunden werden kann.

Besteht zwischen α_1, α_2, α_3 eine Gleichung $n$ten Grades, welche, falls sie nicht schon homogen ist, auf bekannte Weise mittels der der Gleichung

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^k = 1$$

homogen gemacht werden kann, so bestimmt dieselbe eine Curve $n$ter Ordnung, deren Eigenschaften zwar dieselben bleiben, wenn auch die Seiten des Grunddreiecks ihre Lage ändern, deren Form und Ausdehnung aber wesentlich von der Lage der Punkte A_1, A_2, A_3 abhangen. „Die Curve ist dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ zugeordnet".

Mit Vorteil glaube ich diese numerischen Punkt-Coordinaten dann anzuwenden, wenn die Curve einen den drei Seiten des Grunddreiecks gegenüber regelmässigen oder symmetrischen Verlauf nimmt, in welchem Falle die Coefficienten jener Glieder der Gleichung, deren variabele Factoren durch Vertauschung von α_1, α_2, α_3 sich ersetzen, einander gleichen müssen.

Die Untersuchung derartiger Curven zweiter und dritter Ordnung ist der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Zuvor sei bemerkt, dass keine Gerade in Beziehung auf sämtliche Seiten des Grunddreiecks symmetrisch liegt, wenn man nicht etwa die unendlich ferne Gerade, deren Gleichung durch

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = n$$

ausgedrückt werden kann, hierzu rechnen will; dass ferner der einzige symmetrisch liegende Punkt der Schwerpunkt des Dreiecks ist, für welchen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \tfrac{1}{3}$$

gilt; endlich dass

$$\alpha_2 = \alpha_3$$

die Gleichung der durch A_1 gelegten Schwerlinie des Grunddreiecks darstellt.

Die symmetrische Gleichung des zweiten Grades ist

$$A(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)+B(\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2) = C$$

Bringen wir diese Gleichung auf die Form

$$\left(A - \frac{B}{2}\right)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \frac{B}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = C$$

und setzen

$$\left(C - \frac{B}{2}\right) : \left(A - \frac{B}{2}\right) = n$$

so erkennen wir auch in

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = n \qquad (2)$$

die „allgemeine Form der symmetrischen Gleichung des zweiten Grades“.

In Verbindung mit Gl. (1) ergiebt die Gleichung (2)

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2n - (1 - 2\alpha_1 + 3\alpha_1^2)}$$

Wählt man bei willkürlichem α_1 für α_2 das obere Zeichen, so gilt für α_3 das untere Zeichen und umgekehrt. Da überdies α_1 durch α_2 und α_3 ersetzt werden kann, so sind, wenn man eine beliebige Zahl für eines der Verhältnisse einsetzt und die anderen aus der letzten Gleichung berechnet, sechs dem Dreieck gegenüber symmetrisch liegende Punkte der Curve gefunden.

Bezüglich n besteht die Bedingung

$$n \gtreqless \tfrac{1}{3}$$

denn stellen wir zur Bestimmung des Maximums und Minimums von α_1 die Gleichung

$$2n = 1 - 2\alpha_1 + 3\alpha_1^2$$

auf, so finden wir

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{6(n - \tfrac{1}{3})}$$

Zwischen diesen Grenzwerten liegen alle jene Werte von α_1, welchen reelle Punkte der Curve entsprechen. Ist aber $n = \frac{1}{3}$, so wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \tfrac{1}{3}$$

und es ist hierdurch einzig der Schwerpunkt des Dreiecks bestimmt.

Da nun die Coordinaten der reellen Curvenpunkte zwischen zwei Grenzwerten eingeschlossen sind, welche selbst endlich bleiben, so lange n nicht unendlich gross angenommen wird, so bestimmt die Gleichung (2) „eine geschlossene Curve zweiter Ordnung, also eine Ellipse oder einen Kreis“.

Wählt man $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, sa erhält man zwei Punkte der Curve, je nachdem man

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2(n-\tfrac{1}{3})} \quad \text{oder} \quad \alpha_2' = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2(n-\tfrac{1}{3})}$$

setzt. Hieraus folgt

$$\alpha_2 + \alpha_2' = \tfrac{2}{3}$$

Nun entspricht dem Schwerpunkt S des Grunddreiecks

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \text{folglich ist} \quad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_2')$$

ebenso

$$\sigma_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_3')$$

Hieraus entnehmen wir, dass „der Schwerpunkt des Grunddreiecks Mittelpunkt der Ellipse“ ist. Da ferner die Schwerlinie des Dreiecks die gegenüber liegende Dreiecksseite halbirt, so ist „der in der Schwerlinie liegende dem der gegenüber liegenden Seite parallelen Durchmesser conjugirt.“

Bezeichnen wir die Winkel des Grunddreiecks mit A_1, A_2, A_3, die gegenüber liegenden Seiten mit a_1, a_2, a_3, so können wir unter der Voraussetzüng $\alpha_1 = \tfrac{1}{3}$ schreiben

$$\alpha_2 - \alpha_2' = \sqrt{2(n-\tfrac{1}{3})} = (x_2 - x_2') : h_2$$

Nun bestimmt aber $(x_2 - x_2') : \sin A_3$ den der Seite a_1 parallelen Durchmesser d_1 der Ellipse und man hat

$$d_1 = \frac{h_2}{\sin A_3}\sqrt{2(n-\tfrac{1}{3})} = a_1\sqrt{2(n-\tfrac{1}{3})}$$

Setzen wir aber $\alpha_2 = \alpha_3$, so wird

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt{6(n-\tfrac{1}{3})}, \quad \alpha_1' = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{6(n-\tfrac{1}{3})}$$

und

$$\alpha_1 - \alpha_1' = \tfrac{2}{3}\sqrt{6(n-\tfrac{1}{3})} = (x_1 - x_1') : h_1$$

Sei nun φ_1 der Winkel zwischen der Schwerlinie A_1S und der Seite A_2A_3, so ist $(x_1 - x_1') : \sin\varphi_1$ der dem Durchmesser d_1 conjugirte Durchmesser d_1', für welchen wir nun leicht finden

$$d_1' = \tfrac{2}{3}\frac{h_1}{\sin\varphi_1}\sqrt{6(n-\tfrac{1}{3})} = \tfrac{2}{3}s_1\sqrt{6(n-\tfrac{1}{3})}$$

wo s_1 die durch A_1 gelegte Schwerlinie des Dreiecks bezeichnet.

Da nun das Verhältniss der conjugirten Durchmesser constant bleibt, welchen Wert immer n annehmen mag. so erkennen wir, dass „die durch Gleichung (2) bestimmten Ellipsen ähnlich sind und in Aehnlichkeitslage sich befinden“ und dass „der Schwerpunkt der Aehnlichkeitspunkt für sämtliche Ellipsen ist“.

Bekanntlich ist

$$d_1^2 + d_1'^2 = 4(a^2+b^2)^2$$
$$d_1 d_1' \sin\varphi_1 = 4ab$$

wenn a, b die Halbachsen der Ellipse bezeichnen. Unter Benutzung der oben berechneten Werte von d_1 und d_1' finden wir

$$a^2+b^2 = \tfrac{1}{6}(n-\tfrac{1}{3})(3a_1^2+4s_1^2)$$
$$2ab = \tfrac{2}{3}(n-\tfrac{1}{3})\,a_1 h_1 \sqrt{3}$$

und

$$(a+b)^2 = \tfrac{1}{6}(n-\tfrac{1}{3})(3a_1^2+4s_1^2+4a_1 h_1\sqrt{3})$$
$$(a-b)^2 = \tfrac{1}{6}(n-\tfrac{1}{3})(3a_1^2+4s_1^2-4a_1 h_1\sqrt{3})$$

Sei r der Radius des Umkreises des Grunddreiecks, so ist

$$a_1 = 2r\sin A_1, \quad h_1 = 2r\sin A_2 \sin A_3$$
$$s_1 = r\sqrt{2(\sin^2 A_2+\sin^2 A_3)-\sin^2 A_1}$$

und es wird

$$(a+b)^2 = \tfrac{4}{3}(n-\tfrac{1}{3})\,r^2(\sin^2 A_1+\sin^2 A_2+\sin^2 A_3 + 2\sqrt{3}\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3)$$

$$(a-b)^2 = \tfrac{4}{3}(n-\tfrac{1}{3})\,r^2(\sin^4 A_1+\sin^2 A_2+\sin^2 A_3 - 2\sqrt{3}\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3)$$

Hieraus können in jedem gegebenen Falle die Achsen der Ellipse berechnet werden. Wie vorauszusehen, wird $a = b$, wenn

$$A_1 = A_2 = A_3$$

d. h. „dem gleichseitigen Dreieck entspricht als Symmetriecurve der zweiten Ordnung ein Kreis, dessen Centrum im Mittelpunkt des Dreiecks liegt."

Als die beiden wichtigsten speciellen Fälle behandeln wir jene für $n = 1$ und $n = \frac{1}{2}$.

Setzen wir $n = 1$, so wird

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+2\alpha_1-3\alpha_1^2}{4}} = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\alpha_1)(1+3\alpha_1)}$$

Für $\alpha_1 = 1$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

die Curve geht also durch die Eckpunkte A_1, A_2, A_3 des Grunddreiecks. Eine weitere Discussion ist kaum notwendig: die Verhältnisse α_1, α_2, α_3 liegen zwischen den Grenzen 1 und $-\frac{1}{3}$, eines der drei Verhältnisse muss in jedem Falle negativ sein, während die

beiden andern positiv sind, die Curve dringt also nicht in das Innere der Dreiecksfläche, sie ist identisch mit „der dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ umbeschriebenen Ellipse von kleinstem Flächeninhalt."

Setzen wir $a = \frac{1}{2}$, so folgt

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1(2-3\alpha_1)}$$

Für $\alpha_1 = 0$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

die Curve geht also durch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten; für $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{6}$$

die Verhältnisse liegen zwischrn 0 und $\frac{2}{3}$, die Curve wird vom Grunddreieck umschlossen, sie ist identisch mit „der dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ einbeschriebenen Ellipse vom grössten Flächeninhalt."

Die „symmetrische Gleichung des dritten Grades" ist

$$A(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3)+B[\alpha_1^2(\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_2^2(\alpha_3+\alpha_1)+\alpha_3^2(\alpha_1+\alpha_2)] + C\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = D$$

Transformiren wir diese Gleichung in

$$\left(A-\frac{B}{3}\right)(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3)+\frac{B}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^3+(C-2B)\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = D$$

und setzen

$$A-\frac{B}{3} = m,\quad C-2B = n,\quad D-\frac{B}{3} = p$$

so ergiebt sich als zweckmässigste Form

$$m(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3)+n\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = p \tag{3}$$

Ersetzen wir α_3 durch $1-\alpha_1-\alpha_2$, so kommt nach leichter Entwicklung

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)^2 + \frac{p-m+3m\alpha_4(1-\alpha_1)}{3m(1-\alpha_1)-n\alpha_1}}$$

Setzen wir nun $\alpha_1 = \frac{3m}{3m+n}$, so wird

$$\alpha_2 = +\infty,\qquad \alpha_3 = -\infty$$

oder umgekehrt. Die Bedeutung ist folgende: „Die den Gleichungen

$$\alpha_1 = 3m:(3m+n),\qquad \alpha_2 = 3m:(3m+n),\qquad \alpha_3 = 3m:(3m+n)$$

entsprechenden, den Dreiecksseiten parallel laufenden Geraden sind Asymptoten der Curve (3)".

Die Lage dieser Asymptoten ist wol von den Coefficienten m und n, nicht aber von p abhängig. Die der Gl. (3) entspechenden Curven haben daher gemeinschaftliche Asymptoten, wenn m uud n constant, p aber veränderlich gedacht wird. So sind für $m = 0$ die Gleichungen der Asymptoten:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0$$

d. h. „die Asymptoten fallen in die Dreiecksseiten, wenn die Curve der Gleichung

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = p$$

entspricht". Setzen wir $n = 0$, so gelten

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1$$

als Gleichungen der Asymptoten, d. h. „die durch die Eckpunkte des Grunddreiecks gelegten, zu den gegenüber liegenden Seiten parallelen Geraden sind Asymptoten der Curve

$$\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = p$$

Die Bedingung

$$\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)^2 + \frac{p - m + 3m\alpha_1(1-\alpha_1)}{3m(1-\alpha_1) - n\alpha_1} = 0$$

führt zur Gleichung

$$\alpha_1^3 + \frac{3m-2n}{3m+n}\alpha_1^2 - \frac{3m-n}{3m+n}\alpha_1 - \frac{4p-m}{3m+n} = 0 \tag{4}$$

welche jene Werte α_1 berechnen lässt, für welche $\alpha_2 = \alpha_3$ wird. Die Wurzeln dieser Gleichung ergeben daher jene Punkte der Curve (3), welche auf den Schwerlinien liegen und gewissermassen Scheitelpunkte der Curvenäste bilden, wie auch andrerseits die Schwerlinien als Achsen der Curven angesehen werden dürfen. Die Gleichung (4) muss wenigstens eine reelle Wurzel haben; der entsprechende Punkt liegt offenbar als Scheitelpunkt auf der Curve, deren Aeste den Asymptoten

$$\alpha_2 = 3m:(3m+n) \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 3m:(3m+n)$$

zulaufen. Hat die Gleichung (4) drei reelle Wurzeln, so liegen auf der Schwerlinie A_1S noch überdies zwei Scheitelpunkte, welche aber offenbar einer geschlossenen Curve angehören müssen. Ist eine Wurzel $= \frac{1}{3}$, so muss die Bedingung

$$p = (3m + n) : 27$$

erfüllt sein und es ergiebt sich, dass dann auch eine zweite Wurzel $= \frac{1}{3}$ wird, während die dritte Wurzel

$$= (4n - 15m) : 3 . (3m + n)$$

gefunden wird. Die geschlossene Curve reducirt sich sodann **auf** den Schwerpunkt des Grunddreiecks.

Wir erfahren aus diesen Ueberlegungen folgendes: „Die Curve (3) besteht aus drei getrennten hyperbelähnlichen Teilen, welche die Schwerlinien des Grunddreiecks zu Achsen (nicht Symmetrieachsen im gebräuchlichen Sinne) haben und Asymptoten sich nähern, welche den Dreiecksseiten parallel laufen. Jeder der Curventeile schickt einen seiner beiden Aeste einer Asymptote entgegen, so dass jeder Asymptote von derselben Seite aus, aber in entgegengesetzter Richtung von zwei getrennten Curventeilen, je ein Ast sich nähert (anders wie bei der Hyperbel, wo die Aeste von gegenüberliegender Seite aus in entgegengesetzter Richtung der Asymptote sich nähern). Ausserdem kann noch zwischen diesen Curventeilen ein vierter, geschlossener Curventeil erscheinen.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Ueberlegungen mögen folgende Beispiele dienen.

1) Sei $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{27}$. Wir haben hier

$$m = 0, \quad n = 1, \quad p = \frac{1}{27}$$

einzusetzen und erhalten

$$\alpha_2, \; \alpha_3 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \pm \frac{1}{2}(\alpha_1 - \tfrac{1}{3}) \sqrt{1 - \frac{4}{3\alpha_1}}$$

Für $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \tfrac{1}{3}$$

Der Schwerpunkt genügt als einzelstehender Punkt der Bedingung. Ausserdem wird für $\alpha_1 = \frac{4}{3}$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\tfrac{1}{6}$$

Verlängern wir daher jede der Schwerlinien über den Eckpunkt des Dreiecks um ein Drittel der eigenen Länge. so gelangen wir zu den Scheitelpunkten der Curventeile. Die Asymptoten liegen, wie schon vorhin erwähnt, in den Dreiecksseiten. Wie rasch die Curvenäste sich den Asymptoten nähern, finden wir, wenn wir etwa $\alpha_1 = \frac{5}{3}$ setzen; es wird dann

$$\alpha_2 = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{1}{5}} = -0{\cdot}035.$$

2) Setzen wir $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \frac{25}{864}$, so dient zur Bestimmung der Lage der Scheitelpunkte die Gleichung

$$\alpha_1^3 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1 - \frac{25}{216} = 0$$

Diese giebt die Wurzeln

$$\frac{1}{6}, \quad \frac{11 - \sqrt{21}}{12} = 0 \cdot 535, \quad \frac{11 + \sqrt{21}}{12} = 1 \cdot 299$$

Die beiden ersten Wurzeln bestimmen die Scheitelpunkte der geschlossenen Curve, die letzte jene der offenen Curven.

3) Setzen wir $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$, so erkennen wir augenblicklich, da $\alpha_1 = 0$ bei beliebigen α_2, α_3 der Gleichung genügt, dass die Curve in die Asymptoten, d. i. in die Dreiecksseiten degenerirt.

4) Setzen wir $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{49}{864}$, so besitzt die Gleichung (4), nämlich

$$\alpha_1^3 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1 + \frac{49}{216} = 0$$

nur die eine reelle Wurzel $\alpha_1 = -\frac{1}{6}$. Der geschlossene Teil der Curve fehlt. Zur Bestimmung weiterer sechs Punkte wurden noch die Werte

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{3}, \quad \alpha_2, \alpha_3 = \tfrac{2}{3} - \sqrt{\frac{59}{96}} = -0 \cdot 117$$

berechnet.

5) Es sei $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = \frac{1}{9}$. Hier ist

$$m = 1, \quad n = 0, \quad p = \tfrac{1}{9}$$

und es wird

$$\alpha_2, \alpha_3 = \frac{1 - \alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \tfrac{1}{3}) \sqrt{\frac{3\alpha_1 + 5}{3(\alpha_1 - 1)}}$$

Der Schwerpunkt genügt der Bedingung, Die Asymptoten sind bekanntlich die durch die Eckpunkte des Grunddreiecks gelegten, zu den Gegenseiten parallelen Geraden. Die Scheitelpunkte der Curventeile finden wir aus

$$\alpha_1 = -\tfrac{5}{3}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \tfrac{4}{3}.$$

6) Setzen wir $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 = \frac{43}{288}$, so erhält man aus der Gleichung (4), nämlich

$$\alpha_1^3 + \alpha_1^2 - \alpha_1 + \frac{29}{216} = 0$$

die Wurzeln

$$\frac{1}{6}, \quad -\frac{7}{12}+\frac{1}{12}\sqrt{165} = 0\cdot487, \quad -\frac{7}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{165} = -1\cdot658$$

von denen die beiden ersten die Scheitel der geschlossenen Curve, die letzte jene der offenen Curve bestimmen. (Vgl. Fig. 5.)

7) Setzen wir $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3 = 1$, so wird

$$\alpha_2, \ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \frac{1+\alpha_1}{2}$$

also etwa

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -\alpha_1$$

die Curve degenerirt in die Asymptoten.

8) Setzen wir $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$, so ist

$$m = 1, \quad n = -2, \quad p = 0$$

und der Gleichung (4) entspricht

$$\alpha_1^3-7\alpha_1^2+5\alpha_1+1 = 0$$

woraus die Wurzeln

$$1, \quad 3-\sqrt{10} = -0\cdot162, \quad 3+\sqrt{10} = 6\cdot162$$

hervorgehen. Die geschlossene Curve geht durch die Eckpunkte des Grunddreiecks. Die Asymptoten gehen in dem dreifachen Abstand der entsprechenden Höhen über dem Scheitel hinaus den Gegenseiten parallel.

Wie man sieht, ändert die Curve dadurch ihre Natur nicht, dass die Constanten m und n sich ändern, und es würde beispielsweise die in 5) berechnete Curve identisch mit der in 1) berechneten, sobald nur das durch die Asymptoten der ersteren Curve abgeschnittene Dreieck $A_1'A_2'A_3'$ dem Grunddreiecke $A_1A_2A_3$ der letzten Curve congruent wäre. Man kann daher wol auch

$$\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3' = p'$$

als „allgemeine Form der symmetrischen Gleichung des dritten Grades bezogen auf das durch die Asymptoten abgeschnittene Dreieck als Grunddreieck oder kurz gesagt, bezogen auf die Asymptoten" aufstellen.

Ist aber erst durch

$$m(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3)+n\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = p$$

die Curve gegeben, so kann durch „Transformation der Coordinaten" diese Gleichung in die obere verwandelt werden. Sei nämlich

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{h_1}$$

eine der numerischen Coordinaten dieses Punktes bezogen auf das ursprüngliche Grunddreieck

$$\alpha_1' = \frac{x_1'}{h_1}$$

die entsprechende Coordinate dieses Punkts bezogen auf das neue System, so ist, da das durch die Asymptoten gebildete Dreieck dem ursprünglichen Dreieck gegenüber in Aehnlichkeitslage sich befindet,

$$\alpha_1 = \alpha_1' \cdot \frac{h_1'}{h_1} + \frac{3m}{3m+n}$$

und da

$$\frac{h_1'}{h_1} = 1 - \frac{9m}{3m+n}$$

so erhalten wir zur Transformation die Gleichung

$$\alpha_1 = \frac{3m - (6m - n)\alpha_1'}{3m+n}$$

und zwei analog gebaute Gleichungen für α_2 und α_3. Werden diese Ausdrücke in die Gleichung der Curve eingesetzt, so kommt man zu einer nicht homogenen Gleichung des dritten Grades zwischen α_1', α_2, α_3', welche wieder auf gewöhnlichem Wege homogen gemacht und in die Form

$$A'(\alpha_1'^3 + \alpha_2'^3 + \alpha_3'^3) + B'[\alpha_1'^2(\alpha_3' + \alpha_2') + \alpha_2'^2(\alpha_1' + \alpha_3') + \alpha_3'^2(\alpha_1' + \alpha_2')] + C'\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3' = 0$$

gebracht werden kann. Es ergiebt sich

$$A' = m\left(\frac{6m - n}{3m+n}\right)^3, \quad B' = 3m\left(\frac{6m - n}{3m+n}\right)^3$$

somit

$$A' - \tfrac{1}{3}B' = 0$$

wie zu erwarten war, so dass man durch weitere Umformung endlich die Form

$$\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3' = p'$$

erhält.

Man kann wol behaupten, dass „jede durch eine symmetrische Gleichung nicht bloss des dritten, sondern beliebigen Grades bestimmte Curve nicht nur dem gegebenen Fundamentaldreieck, sondern jedem Dreieck zugeordnet ist, welches dem Fundamentaldreieck gegenüber ähnlich ist und in Aehnlichkeitslage sich befindet."

Eine weitaus grössere Mannigfaltigkeit bietet die Untersuchung derjenigen Curven, welche nur einer der drei Schwerlinien gegenüber einen regelmässigen Verlauf zeigen, die also nur eine Achse besitzen. Denn hier wird die Anzahl der willkürlich zu wählenden Constanten der Gleichung ungleich grösser, da die Coefficienten nur jener Glieder einander gleichen müssen, die durch Vertauschung der der Symmetrieachse nicht entsprechenden Coordinaten sich ersetzen.

So ist die Gleichung der „Linie erster Ordnung mit einer Achse“

$$\alpha_1 + m(\alpha_2 + \alpha_3) = n \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \text{const.}$$

und bezeichnet eine zur Achse conjugirte, d. h. der Gegenseite parallele Gerade.

Die Gleichung der „Linie zweiter Ordnung mit einer Achse ist“

$$A\alpha_1^2 + B(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + C\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + D\alpha_2\alpha_3 = \sigma$$

in homogener Form, oder

$$A_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) + B_1\alpha_2\alpha_3 + C_1\alpha_2 + D_1\alpha_3 + E_1 = 0$$

in nicht homogener Form.

Es sei mir gestattet, in Nachfolgendem zu zeigen, wie die Lösung entsprechend gesetzter Aufgaben vorteilhaft unter Anwendung der numerischen Coordinaten vorgenommen werden kann. Wir suchen den geometrischen Ort des Durchschnittspunktes der Ecktransversalen eines Dreiecks, wenn die Abschnitte der Transversalen gewissen Bedingungen genügen.

1) „Welche Linie beschreibt der Durchschnittspunkt der Transversalen, wenn die Verhältnisse der untern Abschnitte zu den ganzen Transversalen in arithmetischer Progression stehen?“

Wir haben hier $2\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, also

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{3}$$

zu setzen und finden in der durch den Schwerpunkt gehenden, zur Achse conjugirten Geraden den gesuchten geometrischen Ort.

2) „Welche Linie beschreibt der Durchschnittspunkt der Transversalen, wenn die Verhältnisse der untern Abschnitte zu den ganzen Transversalen in geometrischer Progression stehen?“

Hier ist $\alpha_1^2 = \alpha_2\alpha_3$, also

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-3\alpha_1)(1+\alpha_1)}$$

zu setzen. Die Verhältnisse liegen zwischen den Grenzen $\frac{1}{3}$ und -1, die Curve ist geschlossen und da von zweiter Ordnung, eine Ellipse. Für $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \tfrac{1}{3}$$

die Ellipse geht durch den Schwerpunkt; sie geht auch durch die Punkte A_2 und A_3, da für $\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = 1 \quad \text{oder} \quad = 0$$

wird; sie schneidet die als Achse dienende Schwerlinie noch im Punkte S' mit den Coordinaten

$$\alpha_1 = -1,\quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

und wir erkennen die Figur $A_1A_2A_3S'$ sofort als Parallelogramm, die Ellipse aber dem Dreieck A_2A_3S' gegenüber in derselben Lage und denselben Dimensionen, wie die Seite 17 unter der Annahme $a = 1$ gefundene Ellipse dem Grunddreieck gegenüber.

3) „Welche Curve beschreibt der Scheitelpunkt der Ecktransversalen, wenn die Verhältnisse der untern Abschnitte zu den ganzen Transversalen eine harmonische Reihe bilden?“

Es sei $\frac{2}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}$. Zunächst möge noch folgendes Erwähnung finden. Bezeichnen wir die Verhältnisse der oberen Abschnitte der Transversalen zu den unteren Abschnitten mit β_1, β_2, β_3, so ist

$$\beta_1 + 1 = \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{u. s. w.}$$

und aus der oberen Bedingung folgt

$$2\beta_1 = \beta_2 + \beta_3$$

d. h. „es bilden gleichzeitig die Verhältnisse der oberen zu den unteren Abschnitten eine arithmetische Progression.“

Leicht finden wir nun

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-3\alpha_1)(1-\alpha_1)}$$

Die Verhältnisse können alle Werte annehmen, mit Ausnahme derjenigen zwischen $\frac{1}{3}$ und 1. Die Curve ist also offenbar eine Hyperbel. Für $\alpha_1 = 0$ wird

$$\alpha_2, \alpha_3 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$

also entweder 0 oder 1. Für $\alpha_1 = 1$ wird

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

die Curve geht sowol durch die Punkte A_2, A_3, als durch den Punkt A_1, nämlich einer der getrennten Hyperbelbogen geht durch A_2 und A_3, der andere durch A_1. A_1S ist Durchmesser der Hyperbel und die durch den Mittelpunkt O der A_1S gehende, zur A_2A_3 parallele Gerade der conjugirte Durchmesser. Das erstere ist rasch bewiesen, wenn man etwa die durch O zur A_1A_2 parallele Gerade in Betracht zieht. Ihre Gleichung ist $\alpha_3 = \frac{1}{6}$. Setzen wir dies in die Gleichung der Curve ein, so kommt

$$2\alpha_2 - \alpha_1 = 6\alpha_1\alpha_2$$

In Verbindung mit $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{5}{6}$ resultiren

$$\alpha_1, \quad \alpha_1' = \tfrac{2}{3} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

als Coordinaten der Schnittpunkte der Geraden und der Curve. Da nun $\alpha_1 + \alpha_1' = \frac{4}{3}$ und für 0 $\mu_1 = \frac{2}{3}$ gilt, so ist O als Mittelpunkt der hierdurch parallel zur A_1A_2 gelegten Sehne, somit aber auch als Mittelpunkt der Hyperbel erkannt.

Die Lage der Asymptoten der Hyperbel ist leicht folgendermassen erbracht. Jede einer Asymptote Parallele schneidet die Hyperbel in einem im Endlichen liegenden und in einem unendlich fernen Punkte. Die Gleichung einer Geraden sei

$$a_2\alpha_2 + \alpha_3 = m$$

die Gleichung der Hyperbel in die Form

$$\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3^2 = \alpha_2 + \alpha_3$$

gebracht. Durch Einsetzung von $m - a_2\alpha_2$ für α_3 in die letzte Gleichung findet man die Schnittpunkte aus der Gleichung

$$\alpha_2^2(1 - 4a_2 + a_2^2) + [2m(2 - a_2) - (1 - a_2)]\alpha_2 = m(1 - m)$$

Nun wird wenigstens eine Wurzel unendlich, wenn

$$1 - 4a_2 + a_2^2 = 0$$

angenommen wird, also für

$$a_2 = 2 \pm \sqrt{3}$$

Diese ist daher die Bedingung, dass die Gerade einer der Asymptote (je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt) parallel läuft. Als Gleichung dieser Geraden haben wir also

$$(2 \pm \sqrt{3})\,\alpha_2 + \alpha_3 = m$$

Die Asymptote geht aber durch O, dessen Coordinaten

$$\mu_2 = \mu_3 = \tfrac{1}{6}$$

sind, so dass hierfür

$$m = (2 \pm \sqrt{3}) \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$$

gefunden wird, und so erhalten wir

$$(2 \pm \sqrt{3})\,\alpha_2 + \alpha_3 = \tfrac{1}{6}(3 \pm \sqrt{3})$$

oder in symmetrischer Form

$$(3 \pm \sqrt{3})\,\alpha_2 + (3 \mp \sqrt{3})\,\alpha_3 = 1$$

als „Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel."

Setzen wir hierin $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 + \alpha_3 = 1$, so erhalten wir die Coordinaten der Schnittpunkte der Asymptote (mit $A_2 A_3$; so ergiebt sich

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

Da hieraus

$$\alpha_2 + \alpha_2' = 2 \cdot \tfrac{1}{2}$$

folgt, so erkennen wir sofort den Lehrsatz, dass „jede durch beide Asymptoten einer Hyperbel gelegte Transversale von jenem Durchmesser, welcher dem der Transversale parallelen Durchmesser conjugirt ist, halbirt wird."

Um auch über die Grösse der Hyperbelachsen etwas zu erfahren, bemerken wir, dass bezüglich zweier conjugirten Durchmesser d_1 und d_1', von denen immer einer imaginär ist, folgende Gleichungen gelten, wo a und b die Halbachsen der Hyperbel, φ den Winkel zwischen den Durchmessern bezeichnen:

$$d_1^2 + d_1'^2 = 4(a^2 - b^2)$$

$$d_1 d_1' \sin\varphi = 4abi$$

Nun ist der eine reelle Durchmesser

$$d_1 = \tfrac{2}{3} s_1$$

Den conjugirten Durchmesser erhalten wir, wenn wir

$$\alpha_1 = \tfrac{2}{3}$$

in die Gleichung der Hyperbel einsetzen, wobei gleichzeitig

$$\alpha_3 = \tfrac{1}{3} - \alpha_2$$

substituirt wird. Es ergiebt sich

$$\alpha_2,\ \alpha_2' = \tfrac{1}{6} \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \alpha_2 - \alpha_2' = \tfrac{1}{3}\sqrt{-3}$$

mithin

$$d_1' = \frac{a_1}{3}\sqrt{-3}$$

Sonach

$$d_1^2 + d_1'^2 = \tfrac{4}{9}s_1^2 - \tfrac{3}{9}a_1^2 = a^2 - b^2$$

$$d_1 d_1' \sin\varphi = \tfrac{2}{9}\sqrt{-3}\,.\,a_1 h_1 = 4abi$$

$$(a \pm bi)^2 = \tfrac{1}{9}(s_1^2 - \tfrac{3}{4}a_1^2 \pm a_1 h_1 \sqrt{-3})$$

$$= \tfrac{2}{9}r^2[\sin^2 A_2 + \sin^2 A_3 - 2\sin^2 A_1 \pm 2\sqrt{-3}\,.\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3]$$

Ist das Grunddreieck gleichzeitig, so finden wir leicht

$$a = b = \tfrac{1}{3}r$$

dem gleichseitigen Dreieck entspricht, wie übrigens zu erwarten war, eine gleichseitige Hyperbel.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass man für den Flächeninhalt des Grunddreiecks die Formel $3ab\sqrt{3}$ findet, welche von der Lage der Dreiecksachse A_1S den Achsen der Hyperbel gegenüber unabhängig ist, so dass hieraus leicht folgender Lehrsatz erkannt wird: „Die Dreiecke, deren Schwerpunkte und Eckpunkte auf einer gegebenen Hyperbel liegen, sind flächengleich."

4) „Welche Curve beschreibt der Schnittpunkt der Ecktransversalen, wenn die Verhältnisse der oberen Abschnitte zu den unteren Abschnitten eine geometrische Progression bilden?"

Aus der Bedingung

$$\beta_1^2 = \beta_2\beta_3$$

folgt zunächst

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{\alpha_2} - 1\right)\left(\frac{1}{\alpha_3} - 1\right)$$

und hieraus in homogener Form

$$\alpha_1^3 - (\alpha_2 + \alpha_3)\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

Betrachten wir wieder α_1 als die unabhängig Veränderliche, so ergiebt die letzte Gleichung

$$\alpha_2,\ \alpha_3 = \frac{1-\alpha_1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(3\alpha_1 - 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1)}{2\alpha_1 - 1}} \qquad \text{(A)}$$

Zunächst erkennen wir in der Gleichung $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ eine Asymptote, welche in dem Abstande der halben zugehörigen Höhe der Seite A_2A_3 parallel läuft. Die Formel ergiebt ferner die Bedingung $\frac{1}{2} < \alpha_1 < \frac{1}{3}$, wohingegen der Factor $2\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1$ unter allen Um-

ständen positiv bleibt. Die durch den Schwerpunkt des Dreiecks zur $A_3 A_2$ parallel gezogene Gerade ist Tangente an der Curve und zwischen dieser Tangente und der zuvor näher bezeichneten Asymptote liegen keine Curvenpunkte.

Alsbald finden wir, dass die Curve aus drei getrennten Teilen besteht. Der eine Teil liegt unter der durch den Schwerpunkt führenden Tangente. Die auf den beiden andern Curventeilen liegenden Schnittpunkte der durch A_2 und A_3 gelegten Schwerlinien findet man aus den Gleichungen

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = -1$$

Legen wir also durch A_1 zur $A_2 A_3$ die Parallele $A_3' A_2'$, durch A_2 zur $A_1 A_3$ die Parallele $A_2 A_3'$, durch A_3 zur $A_1 A_2$ die Parallele $A_3 A_2'$, so erkennen wir in A_2' und A_3' Punkte des zweiten und dritten Curventeiles.

Verfolgen wir den ersten, durch S gehenden Curventeil, so finden wir zunächst, dass derselbe durch A_2 und A_3 geht, da für $\alpha_1 = 0$

$$\alpha_2, \alpha_3 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$

wird. Um den weitern Verlauf zu untersuchen, differentiiren wir α_2, α_3 in Beziehung auf α_1 und erhalten

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}, \frac{d\alpha_3}{d\alpha_1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \frac{12\alpha_1^3 - 14\alpha_1^2 + 5\alpha_1 - 1}{\sqrt{(2\alpha_1 - 1)^3 (3\alpha_1 - 1)(2\alpha_1^2 - \alpha_1 + 1)}} \tag{B}$$

Vernachlässigen wir hierin die zweiten und dritten Potenzen von α_1, so erhalten wir

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}, \frac{d\alpha_3}{d\alpha_1} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - 10\alpha_1}{1 - 10\alpha_1}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$

Dies besagt, dass für die nächste Umgebung der Punkte A_2, A_3 die ersten Differentialquotienten von α_2, α_3 in Beziehung auf α_1 constant werden, und folglich die zweiten Differentialquotienten verschwinden. Die Curve besitzt somit in A_2 und A_3 je einen W e n d e p u n k t. Aus

$$\frac{d\alpha_2}{d\mu_1} = -1, \ 0, \ \frac{d\alpha_3}{d\alpha_1} = 0, \ -1$$

geht auch hervor, dass die Dreiecksseiten $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ Tangenten der Curve sind.

Im weiteren Verlaufe nähern sich die beiden Curvenäste Asymptoten, deren Lage zu bestimmen einige Schwierigkeiten bietet, da dieselben weder den Dreiecksseiten, noch den Schwerlinien parallel laufen.

Zunächst wird es gestattet sein, wenn α_1 (sei es im positiven, sei es im negativen Sinne) unendlich zunimmt, in (B) die niedern Potenzen von α_1 gegen die höchste als verschwindend klein anzunehmen und zu vernachlässigen. Es nähert sich sodann $\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$, $\frac{d\alpha_3}{d\alpha_1}$ dem Grenzwerte

$$-\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{144}{48}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

woraus wir erkennen, dass die Gleichungen der Asymptoten in der Form

$$2\alpha_2 + (1 \mp \sqrt{3})\alpha_1 = m$$

gegeben werden können. Um noch m zu bestimmen, nehmen wir in (A) α_1 so gross an, dass dessen reciproker Wert zu vernachlässigen ist. Schreiben wir nun

$$2\alpha_2 = (1 - \alpha_1) \pm \sqrt{(3\alpha_1 - 1)\left(\alpha_1 + \frac{1}{2\alpha_1 - 1}\right)}$$
$$= 1 - \alpha_1 \pm \sqrt{3\alpha_1^2 - \alpha_1}$$

so kann man

$$\sqrt{3\alpha_1^2 - \alpha_1} = \alpha_1\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_1}{\alpha_1\sqrt{3}}$$

setzen, wobei die folgenden Glieder vernachlässigt werden und man erhält

$$2\alpha_2 = 1 - \alpha_1 \pm \left(\alpha_1\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

oder

$$2\alpha_2 + (1 \mp \sqrt{3})\alpha_1 = 1 \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

welche Gleichungen nun offenbar die Gleichungen der Asymptoten selbst sind, so dass

$$m = 1 \mp \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

erkannt wird.

Zur Construction der Asymptoten setze man einmal $\alpha_1 = 0$. Die Punkte

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2, \alpha_3 = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

sind leicht zu construiren. Sodann setze man in eine der Asymptotengleichungen

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = 1 - 2\alpha_2$$

ein, worauf man

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{5}{12}$$

erhält. Auch die Construction dieses Punktes verursacht keine Schwierigkeit.

Der Verlauf der beiden andern Curventeile ist einfach. Von dem Punkte

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = -1$$

wendet sich ein Ast gegen die Asymptote I, der andere gegen die Asymptote II. Analoges gilt von dem dritten Curventeil.

Einer späteren Veröffentlichung sei die Untersuchung einiger Flächen der zweiten und dritten Ordnung mittels numerischer homogener Raum- oder Tetraedercoordinaten vorbehalten.

III.

Angenäherte Berechnung von Wurzelgrössen nebst Anwendungen.

Von

Victor Thallmayer,

Professor in Ungarisch-Altenburg.

Zur angenäherten Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2}$ (der Resultirenden zweier unter rechten Winkel angreifender Kräfte) haben wir von Poncelet den Ausdruck $0{,}96\,a+0{,}40\,b$, zur angenäherten Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ den von Horvath im L'Institut (36ter Jahrgang, Nr. 1782, Paris 1868) angegebenen Ausdruck $0{,}939\,a+0{,}368\,b+0{,}297\,c$. Vorausgesetzt, dass $a > b > c$, liegt im ersten Falle der Fehler zwischen 0 und ± 4 Percent, im zweiten Falle zwischen 0 und ± 6 Percent [1]).

---

1) Horvath, vor etlichen Jahren als Professor der Pesther polytechnischen Schule gestorben, hatte nur den Fall $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ im Auge, weshalb hier auch die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ für den allgemeinen Fall

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots+p^n} = \alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots+\pi p$$

unter der Annahme bestimmt werden sollen, dass die Summe unter dem Wurzelzeichen aus p Gliedern besteht und $a > b > c > d > \ldots > p$ ist.

Horvath bediente sich zur Bestimmung der Constanten für seinen speciellen Fall raum-geometrischer Hilfsmittel, es kann jedoch zu diesem Behufe für den allgemeineren Fall auch folgender Weg eingeschlagen werden.

Zunächst lässt sich schreiben

Begnügt man sich mit dieser Annäherung nicht, so kann mit Benutzung der Tafeln der wirklichen Längen der trigon. Linien, wie selbe gewöhnlich den Logarithmenbüchern angeheftet sind, eine bedeutend bessere Annäherung bei der Berechnung der Wurzel aus einer Summe von Quadraten leicht erreicht werden und zwar durch Ausdrücke von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \ldots$ oder $a + \alpha b + \beta c + \gamma d + \ldots$ oder αm, wobei die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ trigonometrische Functionen gewisser Winkel, $a, b, c, d, m \ldots$ die linearen Werte der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Summanden sind.

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots+q^n+p^n} = a + (\sqrt[n]{a^n+b^n} - a)$$
$$+ (\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} - \sqrt[n]{a^n+b^n}) + (\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n} - \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}) + \ldots$$
$$+ \ldots + (\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+\ldots+q^n+p^n} - \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+\ldots+q^n})$$
$$= a + b\left(\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}+1} - \frac{a}{b}\right) + c\left(\sqrt[n]{\frac{a^n}{c^n}+\frac{b^n}{c^n}+1} - \sqrt[n]{\frac{a^n}{c^n}+\frac{b^n}{c^n}}\right)$$
$$+ d\left(\sqrt[n]{\frac{a^n}{d^n}+\frac{b^n}{d^n}+\frac{c^n}{d^n}+1} - \sqrt[n]{\frac{a^n}{d^n}+\frac{b^n}{d^n}+\frac{c^n}{d^n}}\right)$$
$$+ \ldots + p\left(\sqrt[n]{\frac{a^n}{p^n}+\frac{b^n}{p^n}+\frac{c^n}{p^n}+\ldots+\frac{q^n}{p^n}+1} - \sqrt[n]{\frac{a^n}{p^n}+\frac{b^n}{p_n}+\ldots+\frac{q^n}{p^n}}\right)$$

Zufolge der Bedingung, dass $a > b > c > d > \ldots > p$ sein soll, ist der grösste Wert der Wurzel:

$$\sqrt[n]{a^n+a^n+a^n+a^n+\ldots} = a + a(\sqrt[n]{2} - 1) + a(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$
$$+ a(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n]{3}) + a(\sqrt[n]{5} - \sqrt[n]{4}) + \ldots$$

wenn nämlich

$$b = c = d = \ldots = a$$

ist, und der kleinste Wert der Wurzel:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

wenn

$$b = c = d = \ldots = 0$$

ist. Für dazwischenliegende Werte ist wie leicht einzusehen

$$a + b(\sqrt[n]{2} - 1) + c(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) + d(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n]{3}) + \ldots$$
$$\ldots > \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots},$$

Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}$ durch $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}$ kann auch

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}}$$

geschrieben werden. Bezeichnet man $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}$ mit Σ, so ist auch

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}=a\,.\,\frac{a}{\Sigma}+b\,.\,\frac{b}{\Sigma}+c\,.\,\frac{c}{\Sigma}+d\,.\,\frac{d}{\Sigma}+\ldots$$

Es kann demnach, wenn φ einen echten Bruch vorstellt, gesetzt werden:

$$\varphi(a+b(\sqrt[n]{2}-1)+c(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+d(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots)$$
$$=\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}$$

oder auch

$$\varphi a+\varphi(\sqrt[n]{2}-1)b+\varphi(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})c+\varphi(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})d+\ldots$$
$$=\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots} \qquad \text{I)}$$

Setzen wir nun

$$\varphi=\alpha,\quad \varphi(\sqrt[n]{2}-1)=\beta;\quad \varphi(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})=\gamma,\quad \varphi(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})=\delta\ldots$$

so bekommen wir

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots=\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}$$

Aus obigem ist ersichtlich, dass $\varphi=1$ wird, und damit sein Maximum erreicht, wenn $\sqrt{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}$ seinen grössten und seinen kleinsten Wert annimmt. Wir können nun den zwischen den beiden Maximalwerten gelegenen Minimalwert von φ bestimmen, um dann einen zwischen Maximalwert und Minimalwert gelegenen Wert von φ als constanten Factor für Gleichung I) zu benutzen.

Aus Gleichung I) ergiebt sich:

$$\varphi=\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}}{a+b(\sqrt[n]{2}-1)+c(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+d(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots}$$

oder auch

$$\varphi=\frac{\sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots}}{1+\frac{b}{a}(\sqrt[n]{2}-1)+\frac{c}{a}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+\frac{d}{a}(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots}$$

Betrachten wir nun $\frac{a}{\Sigma}, \frac{b}{\Sigma}, \frac{c}{\Sigma}, \frac{d}{\Sigma} \ldots$ als Coefficienten von a, b, c, d ... und bezeichnen wir selbe mit α, β, γ, δ ..., so ist

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots} = \alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots$$

wobei dann, wie leicht zu ersehen

$$\alpha:\beta:\gamma:\delta:\ldots = a:b:c:d:\ldots \quad \text{I)}$$

und

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots = 1 \text{ ist} \quad \text{II)}$$

Haben wir also Coefficienten α, β, γ, δ ... welche den Bedingungen unter I) und II) genügen, so können selbe sofort zur Berechnung der Wurzelgrösse dienen, wie dies zunächst an $\sqrt{a^2+b^2}$ ersichtlich gemacht werden kann.

Setzen wir behufs Bestimmung des Minimalwertes von φ:

$$\frac{b}{a} = x, \quad \frac{c}{a} = y, \quad \frac{d}{a} = z \ldots$$

so wird

$$\varphi = \frac{\sqrt[n]{1+x^n+y^n+z^n+\ldots}}{1+x(\sqrt[n]{2}-1)+y(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+z(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots}$$

Setzen wir nun

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dz} = 0, \ldots$$

so bekommen wir zur Bestimmung von x, y, z, ... die Gleichungen:

$$x^{n-1}(1+x(\sqrt[n]{2}-1)+y(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+z(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots)$$
$$-(\sqrt[n]{2}-1)(1+x^n+y^n+z^n+\ldots) = 0$$

$$y^{n-1}(1+x(\sqrt[n]{2}-1)+y(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+z(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots)$$
$$-(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})(1+x^n+y^n+z^n+\ldots) = 0$$

$$z^{n-1}(1+x(\sqrt[n]{2}-1)+y(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})+z(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})+\ldots)$$
$$-(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3})(1+x^n+y^n+z^n+\ldots) = 0$$

u. s. f.

und aus diesen für x, y, z ... die Werte, bei welchen φ zum Minimum wird:

$$x = \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{2}-1}, \quad y = \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}}, \quad z = \sqrt[n-1]{\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3}}, \ldots$$

Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2}$. In diesem Falle kann man nach obigen sofort setzen:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a.\sin\varphi + b\cos\varphi$$

wenn

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

gesetzt wird, oder

$$\sqrt{a^2+b^2} = a.\cos\varphi + b\sin\varphi$$

wenn

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

gesetzt wird.

Mithin wird der Minimalwert von φ

$$\varphi\min = \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n}+\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right)^n}+\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{4}-\sqrt[n]{3}\right)^n}+\sqrt[n-1]{\left(\sqrt[n]{5}-\sqrt[n]{4}\right)^n}+\ldots\right)^{n-1}}}$$

während $\varphi\max = 1$ ist.

Bezeichnen wir Kürze halber den Nenner von $\varphi\min$ mit Σ, so ist

$$\varphi\min = \frac{1}{\Sigma} \quad \text{und} \quad \varphi\max = 1$$

Nun handelt es sich darum, den constanten Wert von φ so zu bestimmen, dass der relative Fehler an der einen Grenze, beim Maximum von φ, ebenso gross ausfalle, wie bei der andern Grenze, dem Minimum von φ. Zu diesem Behufe haben wir φ aus der Gleichung

$$1-\varphi = \frac{\varphi-\varphi\min}{\varphi\min}$$

zu bestimmen, wonach

$$\varphi = \frac{2\varphi\min}{1+\varphi\min} = \frac{2}{1+\Sigma}$$

und der Grenzwert f des relativen Fehlers

$$f = \pm\frac{\Sigma-1}{\Sigma+1} = \pm(1-\varphi)$$

wird. Die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sind dann der Reihe nach

$$\alpha = \varphi = \frac{2}{1+\Sigma}, \quad \beta = \frac{2(\sqrt[n]{2}-1)}{1+\Sigma}, \quad \gamma = \frac{2(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})}{1+\Sigma}$$

Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Aus den drei Grössen a, b, c lassen sich die sechs Quotienten $\frac{c}{b}, \frac{c}{a}, \frac{b}{a}, \frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ bilden. Einen beliebigen von diesen setze man gleich der Tangente oder Cotangente eines Winkels z. B.:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Setzt man ferner

$$\frac{c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi} = \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$$

so wird

$$\delta = \frac{2(\sqrt[n]{4} - \sqrt[a]{3})}{1+\Sigma}, \ \ldots$$

Für den von Horvath behandelten speciellen Fall ergeben sich dann für α, β, γ die auch von ihm gefundenen Werte

$$\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}$$

$$\beta = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1+\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}$$

$$\gamma = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}}$$

Man findet durch Berechnung der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 0{,}9609\,a + 0{,}3980\,b \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0391$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 0{,}9398\,a + 0{,}3892\,b + 0{,}2986\,c \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0602$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = 0{,}9263\,a + 0{,}3837\,b + 0{,}2945\,c + 0{,}2481\,d \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0737$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} = 0{,}9161\,a + 0{,}3794\,b + 0{,}2911\,c + 0{,}2454\,d + 0{,}1122\,e \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0839$$

u. s. f.

$$\sqrt[3]{a^3+b^3} = 0{,}9587\,a + 0{,}2490\,b \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0413$$

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3} = 0{,}9367\,a + 0{,}2433\,b + 0{,}1708\,c \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0602$$

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+d^3} = 0{,}9216\,a + 0{,}2394\,b + 0{,}1680\,c + 0{,}1338\,d \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0784$$

$$\sqrt[3]{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3} = 0{,}9107\,a + 0{,}2366\,b + 0{,}1660\,c + 0{,}1322\,d + 0{,}1116\,e \quad \text{und} \quad f = \pm 0{,}0893$$

u. s. f.

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = c\sin\varphi_1 + (a\cos\varphi + b\sin\varphi)\cos\varphi_1$$
$$= c\sin\varphi_1 + a\cos\varphi\cos\varphi_1 + b\sin\varphi\cos\varphi_1$$

Aus diesem schon ist das Gesetz des Aufbaues für $\operatorname{tg}\varphi_1$ und den Wert der Wurzelgrösse zu entnehmen, hätte man z. B.

$$\frac{a}{c} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

gesetzt gehabt, so hatte man

$$\frac{b}{a\sin\varphi + c\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$$

zu setzen gehabt, wodurch

Bei Benutzung des Ausdruckes

$$0{,}9609\,a + 0{,}3980\,b \text{ für } \sqrt{a^2+b^2}$$

wird der relative Fehler zwischen

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}7936$$

negativ, zwischen

$$\frac{b}{a} = 0{,}7936 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}1150$$

positiv und zwischen

$$\frac{b}{a} = 0{,}1150 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0$$

wieder negativ. Für

$$\frac{b}{a} = 0{,}7936 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}1150$$

wird der relative Fehler zu null, wie sich dies aus der Auflösung der Gleichung

$$\sqrt{a^2+b^2} = 0{,}9609\,a + 0{,}3980\,b$$

nach $\frac{b}{a}$ ergiebt,

Bei Benutzung des Ausdruckes

$$0{,}9587\,a + 0{,}2490\,b \text{ für } \sqrt[3]{a^3+b^3}$$

wird der relative Fehler zwischen

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}8313$$

negativ, zwischen

$$\frac{b}{a} = 0{,}8313 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}1740$$

positiv, und zwischen

$$\frac{b}{a} = 0{,}1740 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0$$

wieder negativ. Für

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = b\sin\varphi_1+(a\sin\varphi+c\cos\varphi)\cos\varphi_1$$
$$= b\sin\varphi_1+a\sin\varphi\cos\varphi_1+c\cos\varphi\cos\varphi_1$$

wird. Natürlich kann statt Tangente auch Cotangente gesetzt werden, so z. B. hätte man gesetzt

$$\frac{b}{a\sin\varphi+c\cos\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi_1 = \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}$$

so wird

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = b\cos\varphi_1+(a\sin\varphi+c\cos\varphi)\sin\varphi_1 \quad \text{u. s. f.}$$

Als Beweis für die Richtigkeit obigen Vorganges genügt es anzuführen, dass man leicht findet, dass die Coefficienten von a, b, c sich so zu einander verhalten wie $a:b:c$ und dass die Summe der Quadrate dieser Coefficienten gleich der Einheit ist.

Bei der Berechnung der Wurzel hat man einfach die, $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi_1$, eventuell $\operatorname{cotg}\varphi$ und $\operatorname{cotg}\varphi_1$ ergebenden Quotienten auf 3 bis 4 Stellen zu bestimmen und aus den Tafeln die Werte von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ herauszuschreiben. So findet man für

$$\sqrt{(12{,}36)^2+(4{,}75)^2} \quad \text{zunächst} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{4{,}75}{12{,}36} = 0{,}3843\ \ldots$$

demnach

$$\sin\varphi = 0{,}3588\ \ldots \quad \cos\varphi = 0{,}9334\ \ldots$$

mithin

$$\frac{b}{a} = 0{,}8313 \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 0{,}1740$$

wird der relative Fehler zu null, wie dies durch Auflösung der Gleichung

$$\sqrt[3]{a^3+b^3} = 0{,}9587\,a+0{,}2490\,b$$

nach $\frac{b}{a}$ sich ergiebt.

Betreffend die Bestimmung eines Näherungswertes für

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}$$

unter der Voraussetzung, dass a, b, c, d . . . ihrer Grösse nach nicht viel von einander verschiedene Werte sind, findet man

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots} = \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+d^{n-1}+\ldots}{a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}+d^{n-2}+\ldots}\sqrt[n]{p}$$

wenn p die Anzahl der Summanden bezeichnet.

Es lässt sich nämlich schreiben:

$\sqrt{(12{,}36)^2+(4{,}75)^2} = 4{,}75 . 0{,}3588 + 12{,}36 . 0{,}9334 = 13{,}2411 \ldots$

Der richtige Wert der Wurzel ist $13{,}2428 \ldots$

der Näherungswert nach Poncelet

$$= 12{,}36 . 0{,}96 + 4{,}75 . 0{,}4 = 13{,}7656 \ldots$$

für $\sqrt{(18{,}3)^2+(12{,}5)^2+(6{,}8)^2}$ kann z. B.

$$\frac{12{,}5}{18{,}3} = \operatorname{cotg} \varphi$$

gesetzt werden.

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{12{,}5}{18{,}3} = 0{,}6830 \ldots$$

entspricht

$$\sin \varphi = 0{,}8258 \ldots \quad \cos \varphi = 0{,}5640 \ldots$$

$$\frac{6{,}8}{12{,}5 . 0{,}5640 + 18{,}3 . 0{,}8258} = 0{,}3068 \ldots = \operatorname{tg} \varphi_1$$

entspricht

$$\sin \varphi_1 = 0{,}2934 \ldots \quad \cos \varphi_1 = 0{,}9559 \ldots$$

mithin ist

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots} = \frac{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}{\sqrt[n]{(a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots)^{n-1}}}$$

$$= \frac{a^n\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)}{a^{n-1}\sqrt[n]{\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)^{n-1}}}$$

$$= \frac{a\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)^{n-1}}}$$

$$= \frac{a\left(1+\frac{b}{a}\cdot\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{c}{a}\cdot\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}+\frac{d}{a}\cdot\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}+\ldots\right)}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)^{n-1}}}$$

$$= \frac{a^{n-1}+\frac{b}{a}.b^{n-1}+\frac{c}{a}.c^{n-1}+\frac{d}{a}.d^{n-1}+\ldots}{a^{n-2}\sqrt[n]{\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots\right)^{n-1}}}$$

$$\sqrt{(18{,}3)^2+(12{,}5)^2+(6{,}8)^2} = 6{,}8\,.\,0{,}2934$$
$$+(12{,}5\,.\,0{,}5640+18{,}3\,.\,0{,}8258)\,0{,}9559 = 23{,}1798\ldots$$

Der wirkliche Wert der Wurzel ist 23,1814 . . .

aus der Näherungsformel mit den Constanten bestimmt ist der Wert der Wurzel

$$= 18{,}3\,.\,0{,}939+12{,}5\,,0{,}368+6{,}8\,.\,0{,}297 = 23{,}8033\ldots$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des letzten Ausdruckes mit

$$1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots$$

so wird

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots}$$
$$=\frac{a^{n-1}+\frac{b}{a}\,b^{n-1}+\frac{c}{a}\,c^{n-1}+\frac{d}{a}\,d^{n-1}+\ldots}{a^{n-2}\left(1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\ldots\right)}\sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots}$$
$$=\frac{a^{n-1}+\frac{b}{a}.b^{n-1}+\frac{c}{a}.c^{n-1}+\frac{d}{a}\,d^{n-1}+\ldots}{a^{n-2}+\frac{b^2}{a^2}.b^{n-2}+\frac{c^2}{a^2}.c^{n-2}+\frac{d^2}{a_2}.d^{n-2}+\ldots}\times$$
$$\sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\frac{d^n}{a^n}+\ldots}$$

Sind nun a, b, c, d . . . Grössen, die nicht viel von einander verschieden sind, so kann annähernd

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{d}{a}\ldots = 1$$

ebenso

$$\frac{b^2}{a^2},\ \frac{c^2}{a^2},\ \frac{d^2}{a^2}\ldots! = 1$$

und

$$\sqrt{1+\frac{b^n}{a^n}+\frac{c^n}{a^n}+\ldots} = \sqrt[n]{p}$$

gesetzt werden, wenn p die Anzahl der Grössen bezeichnet, wodurch wir obigen Ausdruck erhalten. So ist z. B.

$$\sqrt{(17{,}3)^3+(16{,}5)^3+(15{,}3)^3} = \frac{(17{,}3)^2+(16{,}5)^2+(15{,}3)^2}{17{,}3+16{,}5+15{,}3}\sqrt[3]{3}$$
$$=\frac{805{,}63}{49{,}1}\,.\,1{,}4422 = 23{,}6626\ldots$$

der richtige Wert von der Wurzel ist 23,663 . . . also die Annäherung eine entsprechende.

Der Vorgang bei Bestimmung der Coefficienten, wenn die Summe von Quadraten unter dem Wurzelzeichen mehr als dreigliedrig ist, ist ein analoger. Ist z. B. die Wurzelgrösse: $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$, so kann z. B. gesetzt werden

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{a}{c\sin\varphi+b\cos\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi_1 = \frac{\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}$$

$$\frac{d}{a\cos\varphi_1+(c\sin\varphi+b\cos\varphi)\sin\varphi_1} = \operatorname{cottg}\varphi_2 = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}$$

wonach wird

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = d\cos\varphi_2 + (a\cos\varphi_1 + (c\sin\varphi + b\cos\varphi)\sin\varphi_1)\sin\varphi_2$$

u. s. f., wenn die Summe unter dem Wurzelzeichen fünf-, sechs- oder mehrgliedrig sein sollte.

Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}$ durch einen Ausdruck von der Form $a+\alpha b+\beta c+\gamma\delta+\ldots$

Betreffend die Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots}$ durch einen Ausdruck von der Form $a+\alpha b+\beta c+\gamma d+\ldots$ mit Hilfe trigonometrischer Coefficienten kann zunächst $\sqrt{a^2+b^2}$ auch geschrieben werden

$$\sqrt{a^2+b^2} = a+\sqrt{a^2+b^2}-a = a+\left(\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}-\frac{a}{b}\right)b$$

$$= a+\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-1}{\frac{b}{a}}b$$

Nun ist, wenn

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$$

gesetzt wird

$$\frac{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-1}{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

und demnach

$$\sqrt{a^2+b^2} = a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\ ^{2)}$$

---

2) Annähernd ist

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} = a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{n}$$

wenn

$$\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \mathrm{tg}\,\varphi$$

gesetzt wird, und $b < a$ ist, und wobei

$$a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{n} > \sqrt[n]{a^n+b^n}$$

Der mit dieser Annäherung verbundene relative Fehler f ist

$$f = \frac{a+b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{n} - \sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^n+b^n}} = \frac{1+\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{n} - \sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}}}{\sqrt[n]{1+\frac{b^n}{a^n}}}$$

dessen Grenzwerte für $\frac{b}{a} = 0$ und $\frac{b}{a} = 1$ sich als 0 und

$$\frac{1+\mathrm{tg}\frac{45^0}{n} - \sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}}$$

ergeben, wobei der letztere, da $1+\mathrm{tg}\frac{45^0}{n}$ nicht viel verschieden von $\sqrt[n]{2}$ ist, ebenfalls nicht viel von 0 verschieden ist. Das Maximum des relativen Fehlers liegt zwischen diesen beiden Grenzwerten bei einem bestimmten Werte von $\frac{b}{a}$. Für $n = 3$ beträgt das Maximum des relativen Fehlers etwa 4 Percent und tritt ein für $\frac{b}{a} = 0,6$.

Die Wurzelgrösse $\sqrt{a^2-b^2}$ betreffend findet man leicht, dass

$$\sqrt{a^2-b^2} = a - b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \quad \text{wenn} \quad \frac{b}{a} = \sin\varphi$$

$$\sqrt{a^2-b^2} = (a-b)\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} \quad \text{wenn} \quad \frac{b}{a} = \cos\varphi \text{ ist.}$$

Ebenso findet man auch

$$\sqrt{a^2+b^2} = (a+b)\,\frac{\sec(45^0-\frac{1}{2}\varphi)}{\sqrt{2}} \quad \text{wenn} \quad \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi \text{ ist.}$$

Für $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ findet man, wenn

$$a^2+b^2=m^2$$

gesetzt wird, wit Anwendung des Vorganges, wie bei $\sqrt{a^2+b^2}$

Betreffend die bequeme Berechnung von Grössen wie $\sqrt[n]{a^n \pm b^n}$ durch einen Ausdruck von der Form $a \pm \alpha b$ würde es am einfachsten sein, die Werte der Coefficienten α für die verschiedenen Werte von $\frac{b}{a}$ und n ein für allemal zu berechnen und in Tabellen zusammenzufassen. Zur Berechnung der verschiedenen α würde dann der Ausdruck

$$\alpha = \mp \frac{a}{b}\left(1-\sqrt[n]{1 \pm \frac{b^n}{a^n}}\right)$$

dienen, wie dies aus der Gleichung

$$(a \pm \alpha b)^n = a^n \pm b^n \quad \text{folgt.}$$

So z. B. findet man für

$$\sqrt[3]{a^3+b^3} = a+\alpha b$$

wenn

$\frac{b}{a}=$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha=$	0,0033	0,01328	0,02972	0,05225	0,08008	0,1126	0,1576	0,1435	0,1334

und für

$$\sqrt[3]{a^3-b^3} = a-\alpha b$$

wenn

$\frac{b}{a}=$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\alpha=$	0,0033	0,01335	0,03026	0,05452	0,0867	0,1297	0,1866	0,2658	0,3921

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}$$

wenn

$$\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\frac{c}{a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{tg}\,\psi$$

gesetzt wird. Dieser Vorgang lässt sich auf mehr als dreigliedrige Summen ausdehnen, so z. B. wird

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2} + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}$$

wenn

$$\frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\frac{c}{a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{tg}\,\psi$$

$$\frac{d}{a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}} = \mathrm{tg}\,\omega$$

gesetzt wird, u. s. f. wenn die Summe unter dem Wurzelzeichen fünf-, sechs- oder mehrgliedrig sein sollte [3])

Berechnung von $\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots+m^2+p^2}$ durch einen Ausdruck von der Form am.

---

3) Annähernd ist auch

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n+d^n\ldots} = a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2} + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varepsilon}{2} + \ldots$$

wenn

$$\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}} = \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$\frac{c^{n-1}}{\left(a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)^{n-1}} = \mathrm{tg}\,\psi$$

$$\frac{d^{n-1}}{\left(a + b\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}\right)^{n-1}} = \mathrm{tg}\,\varepsilon$$

ist und

$$a > b > c > d > \ldots$$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots+m^2+\ldots+p^2}$ kann behufs Berechnung gleichgesetzt werden

$$\frac{m}{\sin\varphi_{n-2}} \quad \text{oder} \quad \frac{m}{\cos\varphi_{n-2}}$$

wobei $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-2}$ Hilfswinkel sind, welche successive durch ihre Tangenten oder Cotangenten, wie dies weiter oben geschah, bestimmt werden, m der lineare Wert eines der Summanden ist, und wo im Nenner $\sin\varphi_{n-2}$ oder $\cos\varphi_{n-2}$ erscheint, jenachdem der letzte Hilfswinkel φ_{n-2} durch seine Tangente oder Cotangente bestimmt wurde, und wenn n die Anzahl der Summanden ist. So ist nach dem Vorigen z. B.:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \cos\varphi_2((a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1+c\sin\varphi_1) \\ +d\sin\varphi_2$$

wenn

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\frac{c}{a\cos\varphi+b\sin\varphi} = \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}$$

$$\frac{d}{c\sin\varphi_1+(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1} = \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2}$$

gesetzt wurde. Da nun

$$c\sin\varphi_1+(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1 = \frac{d}{\operatorname{tg}\varphi_2}$$

ist, so ist auch

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \cos\varphi_2\cdot\frac{d}{\operatorname{tg}\varphi_2}+d\sin\varphi_2 = \frac{d(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}{\sin\varphi_2}$$
$$= \frac{d}{\sin\varphi_2}$$

Wäre

$$\frac{d}{c\sin\varphi_1+(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1} = \operatorname{cotg}\varphi_2 = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}$$

gesetzt worden, so würde man bekommen haben:

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = d\cos\varphi_2+(c\sin\varphi_1+(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1)\sin\varphi_2$$

und da in diesem Falle

$$c\sin\varphi_1+(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\cos\varphi_1 = \frac{d}{\operatorname{cotg}\varphi_2} \quad \text{ist:}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = d\cos\varphi_2 + \frac{d}{\operatorname{cotg}\varphi_2}\cdot\sin\varphi_2 = \frac{d(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)}{\cos\varphi_2}$$

$$= \frac{d}{\cos\varphi_2}$$

In ähnlicher Weise findet man den Wert der Wurzelgrösse, wenn die Summe unter dem Wurzelzeichen fünf-, sechs- oder mehrgliedrig sein sollte.

Im Nachfolgenden geben wir einige Anwendungen der oben behandelten Art des Wurzelziehens.

1) Schliessen mehrere in einer Ebene liegende und an einem Punkte angreifende Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . P_n mit einer Kraft P_0 die Winkel α_1, α_2, α_3 . . . α_n ein, so ist die Resultirende dieser Kräfte R

$$R = \sqrt{(P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2+P_3\sin\alpha_3+\ldots)^2+(P_0+P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2+\ldots)^2}$$

Setzen wir nun, um behufs Bestimmung von R das Quadriren und Wurzelziehen zu umgehen:

$$\frac{P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2+P_3\sin\alpha_3+\ldots}{P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+\ldots} = \operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$$

so ist

$$R = (P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2+P_3\sin\alpha_3+\ldots)\sin\omega+(P_0+P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2+\ldots)\cos\omega = P_0\cos\omega+P_1(\sin\alpha_1\sin\omega+\cos\alpha_1\cos\omega) + P_2(\sin\alpha_2\sin\omega+\cos\alpha_2\cos\omega)+\ldots$$

und demnach

$$R = P_0\cos\omega+P_1\cos(\omega-\alpha_1)+P_1\cos(\omega-\alpha_2)+P_3\cos(\omega-\alpha_3)+\ldots$$

Demnach ist die Resultirende R gleich der Summe der Projectionen der einzelnen Kräfte auf eine Gerade, welche mit P_0 den durch

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2+\ldots}{P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+\ldots}$$

bestimmten Winkel einschliesst; ganz so wie sich dies bei graphischer Bestimmung der Resultirenden aus dem Kräftepolygon ergiebt. Der Quadrant, in welchem der Winkel ω liegt, bestimmt sich nach dem Vorzeichen des Zählers und Nenners des Ausdruckes für $\operatorname{tg}\omega$. Für den Fall des Gleichgewichtes wird $\operatorname{tg}\omega = \frac{0}{0}$.

2) Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 unter einem Winkel α_1, so ist ihre Resultirende R:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 P_2 \cos\alpha_1}$$

welcher Ausdruck sich auch schreiben lässt:

$$R = \sqrt{(P_1 \sin\alpha_1)^2 + (P_1 \cos\alpha_1 + P_2)^2} = \sqrt{(P_2 \sin\alpha_1)^2 + (P_2 \cos\alpha_1 + P_1)^2}$$

Bei jedem dieser Ausdrücke können wir nun behufs Berechnung der Wurzel die Quotienten der linearen Werte der Summanden gleich $\operatorname{tg}\omega$ oder $\operatorname{cotg}\omega$ setzen, so z. B. wenn wir beim ersten

$$\frac{P_1 \cos\alpha_1 + P_2}{P_1 \sin\alpha_1} = \operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$$

setzen, wird:

$$R = P_1 \sin\alpha_1 \cos\omega + (P_1 \cos\alpha_1 + P_2)\sin\omega = P_1 \sin(\alpha_1 + \omega) + P_2 \sin\omega$$

Setzen wir z. B. im zweiten Ausdruck:

$$\frac{P_2 \cos\alpha_1}{P_2 \sin\alpha_1 + P_1} = \operatorname{cotg}\omega = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

so wird

$$R = P_2 \sin\alpha_1 \cos\omega + (P_2 \cos\alpha_1 + P_1)\sin\omega = P_2 \sin(\omega + \alpha_1) + P_1 \sin\omega \quad \text{u. s. f.}$$

3) Schliessen mehrere im Raume wirkende Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . mit der Kraft P_0 die Winkel α_1, α_2, α_3 . . . ein, und sind die Winkel, welche die Kräfte P_2, P_3, P_4 . . . mit der Kraft P_1 einschliessen, β_1, β_2, β_3 . . ., so sind die Projectionen dieser Kräfte auf die Richtung der Kraft P_0 der Reihe nach P_0, $P_1 \cos\alpha_1'$, $P_2 \cos\alpha_2$, $P_3 \cos\alpha_3$ . . ., und ihre Projectionen auf eine durch den Angriffspunkt auf P_0 senkrecht gelegte Ebene der Reihe nach $P_1 \sin\alpha_1$, $P_2 \sin\alpha_2$, $P_3 \sin\alpha_3$, $P_4 \sin\alpha_4$ . . . Diese Projectionen lassen sich, wenn die Projectionen der Winkel β_1, β_2, β_3, β_4 . . . auf die Ebene AB mit γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 . . .[4]) bezeichnet werden, in der Ebene AB gelegene, rechtwinkelige Componenten $P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1$, $P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2$ . . . und $P_1 \sin\alpha_1$, $P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1$, $P_3 \sin\alpha_3 \cos\gamma_2$ . . . zerlegen, und es ist dann die Resultirende der gegebenen Kräfte R:

$$R = \sqrt{(P_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots)^2 + (P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2 + \ldots)^2 + (P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1 + \ldots)^2}$$

---

4) Die Projectionen γ_1, γ_2, γ_3 . . . der Winkel β_1, β_2, β_3 . . . erhält man durch die Ausdrücke:



Wollen wir auch hier behufs Berechnung von R das Quadriren und Wurzelziehen vermeiden, so können wir z. B.

$$\frac{P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2 + \ldots}{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \cos\gamma_2 + \ldots} = \operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega}$$

setzen.

$$\frac{P_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots}{(P_2\sin\alpha_2\sin\gamma_1 + P_3\sin\alpha_3\sin\gamma_2 + \ldots)\sin\omega + (P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2\cos\gamma_1 + \ldots)\cos\omega} = \operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$$

gesetzt, wird:

$$\begin{aligned} R = (P_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots)\cos\varepsilon \\ + [(P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2 + \ldots)\sin\omega \\ + (P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1 + \ldots)\cos\omega]\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Die in der Klammer befindliche Summe des zweiten Gliede lässt sich zusammenziehen auf

$$P_1 \sin\alpha_1 \cos\omega + P_2 \sin\alpha_2 \cos(\omega - \gamma_1) + P_3 \sin\alpha_3 \cos(\omega - \gamma_2) + \ldots$$

wodurch

$$\begin{aligned} R = P_0 \cos\varepsilon + P_1(\cos\alpha_1 \cos\varepsilon + \sin\alpha_1 \sin\varepsilon \cos\omega) \\ + P_2(\cos\alpha_2 \cos\varepsilon + \sin\alpha_2 \sin\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots \\ \ldots + P_n(\cos\alpha_n \cos\varepsilon + \sin\alpha_n \sin\varepsilon \cos(\omega - \gamma_{n-1})) \end{aligned}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\cos\beta_2 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{\cos\beta_3 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_4}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\cos\gamma_{n-1} = \frac{\cos\beta_{n-1} - \cos\alpha_1 \cos\alpha_n}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_n}$$

Um die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ von der Projection der Kraft P_1 weg richtig gezählt zu bekommen, hat man (Fig. 2) bezüglich solcher Kräfte, welche vor der durch P_0P_1 gelegten Ebene sich befinden, einfach für γ den aus den zwei α und dem β sich ergebenden Wert zu nehmen; bezüglich solcher Kräfte hingegen, welche hinter der durch P_0P_1 bestimmten Ebene liegen, hat man den, aus den zwei α und dem β berechneten Winkel von 360° abzuziehen und die Differenz für γ zu nehmen.

Die Summanden des Ausdruckes für R sind, wie leicht gefunden werden kann, nichts anderes, wie die Projectionen der einzelnen Kräfte auf eine Gerade, welche mit der Richtung der Kraft P_0 den Winkel ε einschliesst und in einer Ebene liegt, welche mit der durch P_0, P_1 gelegten Ebene den Winkel ω bildet. Es ist demnach auch in diesem Falle die Resultirende gleich der Summe der Projectionen der einzelnen Kräfte auf die Richtung der Resultirenden, wie sich dies sonst aus dem räumlichen Kräftepolygone ergiebt [5]). Von den unter dem Wurzelzeichen befindlichen drei Grössen erhält man sechs Quotienten. Setzt man nun welchen immer von selben gleich der Tangente oder Cotangente eines Winkels, so wird man bei Fortsetzung des im Obigen kennen gelernten Verfahrens die Resultirende stets als Summe der Projectionen der einzelnen Kräfte auf eine Gerade erhalten, welche zugleich die Richtung der Resultirenden ist. Die Richtung dieser Geraden bestimmen zwei Winkel ω und ε durch ihre Tangente oder Cotangente. Die Coefficienten, welche in Begleitung der Kräfte erscheinen, sind dann die Cosinuse der Winkel, welche die Kräfte mit der Resultirenden einschliessen.

4) Berechnung der Resultirenden dreier im Raume an einem Punkte angreifenden Kräfte.

---

5) Ist wie in Fig. 1. das Kräftepolygon im Raume P_0, P_1, P_2, P_3, ferner AB die auf P_0 senkrechte Ebene, α_1, α_2, α_3 die Winkel, welche P_1, P_2, P_3 mit P_0, β_1, β_2 die Winkel, welche $P_2 P_3$ mit P_1 einschliessen, so ist $\overline{OO_1}$ als Schlussseite des Kräftepolygons die Resultirende dieser Kräfte. $\overline{OO_3}$ ist die Projection der Resultirenden auf die auf P_0 senkrechte Ebene und Schlussseite der Projection des räumlichen Kräftepolygons auf die Ebene AB. Die die Projection des räumlichen Kräftepaares ausmachenden Seiten sind: $P_1 \sin\alpha_1$, $P_2 \sin\alpha_2$, $P_3 \sin\alpha_3$. Die Winkel, welche die Seiten $P_2 \sin\alpha_2$, $P_3 \sin\alpha_3$ mit $P_1 \sin\alpha_1$ einschliessen, sind die Projectionen γ_1, γ_2 der Winkel β_1, β_2.

Zur Bestimmung des Winkels ω, welchen die Schlussseite $\overline{OO_3}$ der Projection des räumlichen Kräftepolygons mit der Seite $P_1 \sin\alpha_1$ einschliesst, hat man wie leicht zu ersehen:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2}{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \cos\gamma_2}$$

Zur Bestimmung des Winkels ε hat man:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\overline{O_1 O_2}}{\overline{OO_2}} = \frac{\overline{OO_3}}{\overline{OO_2}}$$

Nun ist, wie man aus der Projection des räumlichen Polygons auf die Ebene AB findet:

$$\overline{OO_3} = P_1 \sin\alpha_1 \cos\omega + P_2 \sin\alpha_2 \cos(\omega - \gamma_1) + P_3 \sin\alpha_3 \cos(\omega - \gamma_2)$$

Sind die Kräfte P_0, P_1, P_2 und sind die Winkel, welche P_1 und P_2 mit P_0 einschliessen, α_1 und α_2, der Winkel, welchen P_2 mit P_1 einschliesst, β_1, so findet man, dass

$$R=\sqrt{(P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2)^2+((P_1\sin\alpha_1+P_2\sin\alpha_2)\cos\beta_1{}')^2+(P_2\sin\alpha_2\sin\beta_1{}')^2}$$

$$=\sqrt{(P_1+P_2\cos\beta_1+P_0\cos\alpha_1)^2+((P_2\sin\beta_2+P_0\sin\alpha_1)\cos\alpha_2{}')^2+(P_0\sin\alpha_1\sin\alpha_2{}')^2}$$

$$=\sqrt{(P_2+P_1\cos\alpha_2+P_0\cos\beta_1)^2+((P_1\sin\alpha_2+P_0\sin\beta_1)\cos\alpha_1{}'))^2+(P_0\sin\beta_1\sin\alpha_1{}')^2}$$

wobei:

$$\cos\beta_1{}'=\frac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}$$ der cosinus der Projection des Winkels β_1 auf eine auf P_0 senkrechte Ebene

$$\cos\alpha_2{}'=\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\beta_1}$$ der cosinus der Projection des Winkels α_2 auf eine auf P_1 senkrechte Ebene

$$\cos\alpha_1{}'=\frac{\cos\beta_1-\cos\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin\alpha_2\sin\beta_1}$$ der cosinus der Projection des Winkels α_1 auf eine auf P_2 senkrechte Ebene

ist.

Ferner ist wie aus der Figur leicht zu ersehen;

$$\overline{OO_2}=\overline{O_1O_3}=P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3$$

mithin

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{P_1\sin\alpha_1\cos\omega+P_2\sin\alpha_2\cos(\omega-\gamma_1)+P_3\sin\alpha_3\cos(\omega-\gamma_2)}{P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3}$$

Nun ist

$$\overline{OO_1}=R=\sqrt{\overline{OO_3}^2+\overline{O_1O_3}^2}$$

setzt man nun

$$\frac{O\,O_3}{O_1O_3}=\operatorname{tg}\varepsilon$$

so wird

$$R=\overline{O_1O_3}\cos\varepsilon+\overline{OO_3}\sin\varepsilon$$

mithin

$$R=(P_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3)\cos\varepsilon$$
$$+(P_1\sin\alpha_1\cos\omega+P_2\sin\alpha_2\cos(\omega-\gamma_1)+P_3\sin\alpha_3\cos(\omega-\gamma_2))\sin\varepsilon$$

demnach

$$R=P_0\cos\varepsilon+P_1(\cos\alpha_1\cos\varepsilon+\sin\alpha_1\sin\varepsilon\cos\omega)$$
$$+P_2(\cos\alpha_2\cos\varepsilon+\sin\alpha_2\sin\varepsilon\cos(\omega-\gamma_1))$$
$$+P_3(\cos\alpha_3\cos\varepsilon+\sin\alpha_3\sin\varepsilon\cos(\omega-\gamma_2))$$

wobei die Coefficienten von P_0, P_1, P_2, P_3 die Cosinuse der Winkel sind, welche die Kräfte mit der Resultirenden einschliessen.

Behufs Berechnung von R kann man nun bei jedem der obigen Ausdrücke den Quotienten zweier beliebigen Summanden gleich der Tangente oder Cotangente eines Winkels setzen und das Verfahren in der bekannten Weise zu Ende führen [6]).

5) **Berechnung der Distanz zweier Punkte aus einem polygonalen Zuge.**

Sind mit Bezug auf Fig. 5, $s_0, s_1, s_2 \ldots s_n$ die Seiten, $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$ die, immer in gleichem Sinne gemessenen Brechungswinkel der Seiten eines polygonalen Zuges zwischen zwei Punkten A und B, so findet man für die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ welche die Seiten $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ mit der Seite s_0 einschliessen, der Reihe nach die Werte:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 - 180^0 \\
\alpha_2 &= \beta_2 - (2.180^0 - \beta_1) \\
\alpha_3 &= \beta_3 - (3.180^0 - \beta_1 - \beta_2) \\
\vdots\ &\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\alpha_n &= \beta_n - (n.180^0 - \beta_1 - \beta_2 - \ldots - \beta_{n-1})
\end{aligned}$$

Fällt die Seite s_0 mit der Richtung des magnetischen Meridians zusammen, so geben die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Abweichungen der Seiten vom magnetischen Meridian an.

Nach obigem haben wir also in diesem Falle die Distanz

$$AB = s_0 \cos\psi + s_1 \cos(\psi - \alpha_1) + s_2 \cos(\psi - \alpha_2) + \ldots - + s_n \cos(\psi - \alpha_n)$$

wenn

$$\frac{s_1 \sin\alpha_1 + s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + s_n \sin\alpha_n}{s_0 + s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + s_n \cos\alpha_n} = \operatorname{tg}\psi$$

gesetzt wird.

Behufs Berechnung der Distanz AB kann man auch so vorgehen, dass man successive die Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ berechnet, welche die Seite s_0 mit dem Radiusvector r_1. der Radiusvector r_2 mit r_1, jener r_3 mit r_2 u. s. f. einschliesst.

Für diese Winkel findet man:

---

6) Schreibt man die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 zu den Ecken eines Dreiecks und zwischen selbe die Winkel, welche selbe mit einander einschliessen, so kann man aus diesem Dreieck den schematischen Vorgang zur Anfstellung der Ausdrücke für R, wie selbe oben angegeben sind, entnehmen.

$$\cotg \omega_1 = \frac{s_0}{s_1} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_1} + \cotg \alpha_1$$

$$\cotg \omega_2 = \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \omega_1)} \cdot \frac{1}{\sin \omega_1} + \cotg(\alpha_2 - \omega_1)$$

$$\cotg \omega_3 = \frac{s_2}{s_3} \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \omega_1)}{\sin(\alpha_3 - (\omega_1 + \omega_2))} \cdot \frac{1}{\sin \omega_2} + \cotg(\alpha_3 - (\omega_1 + \omega_2))$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\cotg \omega_n = \frac{s_{n-1}}{s_n} \cdot \frac{\sin(\alpha_{n-1} - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_{n-2}))}{\sin(\alpha_n - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}))} \cdot \frac{1}{\sin \omega_{n-1}} + \cotg(\alpha_n - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}))$$

und für die Radiusvectoren $r_1, r_2, r_3 \ldots r_n$

$$r_1 = s_1 \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \omega_1}$$

$$r_2 = s_2 \cdot \frac{\sin(\alpha_2 - \omega_1)}{\sin \omega_2}$$

$$r_3 = s_3 \cdot \frac{\sin(\alpha_3 - (\omega_1 + \omega_2))}{\sin \omega_3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$r_n = s_n \cdot \frac{\sin(\alpha_n - (\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1}))}{\sin \omega_n}$$

Als Nachweis für die Richtigkeit obiger Formeln hat man:

$$r_1 = \sqrt{s_0^2 + s_1^2 + 2 s_0 s_1 \cos \alpha_1}$$

welcher Ausdruck sich auch schreiben lässt:

$$r_1 = \sqrt{s_1^2 \sin \alpha_1^2 + (s_0 + s_1 \cos \alpha_1)^2}$$

Setzt man nun

$$\frac{s_0 + s_1 \cos \alpha_1}{s_1 \sin \alpha_1} = \cotg \omega_1 = \frac{\cos \omega_1}{\sin \omega_1}$$

so wird

$$r_1 = s_1 \sin \alpha_1 \sin \omega_1 + (s_0 + s_1 \cos \alpha_1) \cos \omega_1$$

und da

$$s_0 + s_1 \cos \alpha_1 = s_1 \sin \alpha_1 \cotg \omega_1$$

auch

$$r_1 = s_1 \sin \alpha_1 \sin \omega_1 + s_1 \sin \alpha_1 \cotg \omega_1 \cos \omega_1$$

$$= s_1 \sin \alpha_1 \sin \omega_1 + s_1 \sin \alpha_1 \frac{\cos^2 \omega_1}{\sin \omega_1}$$

$$= s_1 \sin\alpha_1 \left(\frac{\sin^2\omega_1 + \cos^2\omega_1}{\sin\omega_1}\right)$$

$$= s_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega_1}$$

wobei dann noch $\operatorname{cotg}\omega_1$ geschrieben werden kann

$$\operatorname{cotg}\omega_1 = \frac{s_0}{s_1}\cdot\frac{1}{\sin\alpha_1} + \operatorname{cotg}\alpha_1$$

ferner ist

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 + s_2^2 + 2r_1 s_2 \cos(\alpha_2 - \omega_1)}$$
$$= \sqrt{(s_2 \sin(\alpha_2 - \omega_1))^2 + (r_1 + s_2\cos(\alpha_2 - \omega_1))^2}$$

Setzt man nun wieder

$$\frac{r_1 + s_2\cos(\alpha_2 - \omega_1)}{s_2\sin(\alpha_2 - \omega_1)} = \operatorname{cotg}\omega_2 = \frac{\cos\omega_2}{\sin\omega_2}$$

so bekommt man

$$r_2 = s_2 \sin(\alpha_2 - \omega_1)\sin\omega_2 + (r_1 + s_2\cos(\alpha_2 - \omega_1))\cos\omega_2$$

und da

$$r_1 + s_2\cos(\alpha_2 - \omega_1) = s_2 \sin(\alpha_2 - \omega_1)\operatorname{cotg}\omega_2$$

so ist

$$r_2 = s_2 \sin(\alpha_2 - \omega_1)\frac{(\sin^2\omega_2 + \cos^2\omega_2)}{\sin\omega_2} = s_2 \frac{\sin(\alpha_2 - \omega_1)}{\sin\omega_2}$$

wobei dann auch, da

$$r_1 = s_1 \frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega_1}$$

für $\operatorname{cotg}\omega_2$ geschrieben werden kann

$$\operatorname{cotg}\omega_2 = \frac{s_1}{s_2}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \omega_1)}\cdot\frac{1}{\sin\omega_1} + \operatorname{cotg}(\alpha_2 - \omega_1)$$

u. s. f.

Während des Ganges der Rechnung ist das negative Vorzeichen der Winkel zu berücksichtigen, so z. B. mit Hinweis auf Fig. 5. werden sich die Winkel α_4, ω_3 und ω_4 als negative Winkel ergeben.

6) Berechnung des Schlussfehlers bei der Aufnahme eines Polygons.

Ist die Aufnahme eines Polygons Fig. 6. von einem Punkte A aus längs der zwei Hälften seines Umfanges — ein jedesmal vom Punkte A aus begonnen — durch Messen der Seiten s_0, s_1, s_2 ...

s_n, σ_0, σ_1, σ_2 . . . σ_m, der Brechungswinkel β_1, β_2, β_3 . . . β_n, γ_1, γ_2, γ_3 ... γ_m und des Winkels ψ, den die beiden Seiten s_0 und σ_0 miteinander einschliessen, vollführt worden, und will man wissen, ob die durch die Messung gewonnenen Daten ein sich schliessendes Polygon ergeben oder nicht, so hat man mit Hinweis auf Fig. 6. und auf das weiter oben vorgekommene, wenn die Endpunkte der letzten Seiten der zwei Polygonhälften mit B und C bezeichnet werden:

$$AB = s_0 \cos \omega + s_1 \cos(\omega - \alpha_1) + s_2 \cos(\omega - \alpha_2) + \ldots + s_n \cos(\omega - \alpha_n)$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \ldots + s_n \sin \alpha_n}{s_0 + s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \ldots + s_n \cos \alpha_n}$$

und

$$AC = \sigma_0 \cos \omega_1 + \sigma_1 \cos(\omega_1 - \alpha_1') + \ldots + \sigma_m \cos(\omega_1 - \alpha_m')$$

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{\sigma_1 \sin \alpha_1' + \sigma_2 \sin \alpha_2' + \ldots + \sigma_m \sin \alpha_m'}{\sigma_0 + \sigma_1 \cos \alpha_1' + \sigma_2 \cos \alpha_2' + \ldots + \sigma_m \cos \alpha_m'}$$

wobei α_1, α_2, α_3 . . . α_m die Winkel bedeuten, welche die Seiten s_1, s_2, s_3 . . . s_n mit s_0; α_1', α_2', α_3' . . . α_m' hingegen jene Winkel bedeuten, welche die Seiten σ_1, σ_2, σ_3 . . . σ_m mit σ_0 einschliessen, und welche Winkel auf die im vorangegangenen Beispiele angegebene Weise aus den Winkeln β_1, β_2, β_3 . . . β_n, γ_1, γ_2, γ_3 . . . γ_m bestimmt werden können.

Soll nun das Polygon sich schliessen, so muss $AB = BC$ und $\omega + \omega_1 = \psi$ sein.

Ist $\omega + \omega_1 > \psi$, so schneiden die beiden Endseiten s_n und σ_m übereinander hinweg; ist $\omega + \omega_1 < \psi$, so erreichen sich die beiden Endseiten s_n und σ_m nicht. Ist endlich $\omega + \omega_1 = \psi$, aber AC nicht gleich AB, so schliesst das Polygon sich ebenfalls nicht. In letzterm Falle ist der Schlussfehler f gleich $AB - AC$, in den andern Fällen ist der Schlussfehler

$$f = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 . AB . AC . \cos(\omega + \omega_1 - \psi)}$$
$$= \sqrt{(AC \sin(\omega + \omega_1 - \psi))^2 + (AB - AC \cos(\omega + \omega_1 - \psi))^2}$$

Wollen wir nun behufs Berechnung von f das Quadriren und Wurzelziehen vermeiden, so kann

$$\frac{AC \sin(\omega + \omega_1 - \psi)}{AB - AC \cos(\omega + \omega_1 - \psi)} = \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

gesetzt werden, wodurch

$$f = AC \sin(\omega + \omega_1 - \psi) \sin \varepsilon + (AB - AC \cos(\omega + \omega_1 - \psi)) \cos \varepsilon$$

wird.

Aus den im Obigen behandelten Beispielen dürfte schon zu entnehmen sein, dass das Ausziehen der Quadratwurzel mit Zuhilfenahme der trigonometrischen Functionen gewisser Hilfswinkel in manchen Fällen gut zur Anwendung kommen kann.

Nachdem unter die im vorangegangenen Abschnitte aufgenommenen Beispiele die Berechnung der Resultirenden von an einem Punkte angreifenden Kräften eingereiht wurde, so soll Vollständigkeit halber auch noch die Berechnung der Resultirenden in einer Ebene und im Raume zerstreut liegender Kräfte folgen.

Berechnung der Resultirenden von in einer Ebene zerstreut liegenden Kräften.

Greifen, wie in Fig. 3., in einer Ebene liegende Kräfte P_0, P_1, $P_2 \ldots P_n$, deren Richtung mit jener der Kraft P_0 die Winkel α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ einschliesst, und deren in der Richtung der Kraft P_0 verlegten Angriffspunkte a_1, a_2, a_3, $a_4 \ldots$ vom Angriffspunkte a_0 der Kraft P_0 um die Strecken s_1, s_2, $s_3 \ldots s_n$ entfernt liegen, an verschiedenen Punkten an, so hat man zur Bestimmung der Resultirenden durch den Winkel ω, den selbe mit der Richtung der Kraft P_0 einschliesst:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + \ldots + P_n \sin \alpha_n}{P_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cos \alpha_n}$$

und zur Bestimmung ihrer Grösse:

$$P_{0-n} = R = P_0 \cos \omega + P_1 \cos(\omega - \alpha_1) + \ldots + P_n \cos(\omega - \alpha_n)$$

und zur Bestimmung ihres in der Kraftrichtung P_0 verlegten Angriffspunktes den Abstand

$$s_{0-n} = s_r$$

desselben vom Angriffspunkte der Kraft P_0:

$$s_{0-n} = s_r = \frac{P_1 s_1 \sin \alpha_1 + P_2 s_2 \sin \alpha_2 + \ldots + P_n s_n \sin \alpha_n}{R \,.\, \sin \omega}$$

Zu allen diesen Gleichungen muss selbstverständlich das Vorzeichen der Werte der trigon. Functionen berücksichtigt werden, ebenso auch das Vorzeichen der Abschnitte s. Mit Bezug auf Fig. 3. ist

$$a_0 a_4 = s_4$$

negativ zu nehmen, wenn

$$a_0 a_1 = s_1, \quad a_0 a_2 = s_2, \quad a_0 a_3 = s_3$$

positiv genommen werden.

Hat nun $\operatorname{tg}\omega$ eine bestimmte Grösse, so ist das Endergebniss des Zusammenwirkens der Kräfte eine resultirende Kraft. Wird der Wert:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_n \sin\alpha_n}{P_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_n \sin\alpha_n} = \frac{0}{0}$$

so ist das Endergebniss des Zusammenwirkens der Kräfte entweder Gleichgewicht oder ein Kräftepaar, je nachdem

$$\frac{P_1 s_1 . \sin\alpha_1 + P_2 s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} . s_{n-1} \sin\alpha_{n-1}}{P_n \sin(180^0 + \alpha_n)} \begin{matrix} = \\ > \\ < \end{matrix} s_n \text{ ist}$$

Es kann nämlich als Endergebniss ein Kräftepaar oder Gleichgewicht nur dann resultiren, wenn die Resultirende

$$P_{0-(n-1)} = R_1$$

von $n-1$ Kräften an Grösse gleich der $n$ten Kraft, also $= P_n$ ist, und wenn nebenbei der Winkel, welchen die Resultirende

$$P_{0-(n-1)} = R_1$$

der $(n-1)$ Kräfte mit P_0 einschliesst, um 180^0 grösser als α_n, mithin $180^0 + \alpha_n$ ist.

In diesem Falle (wenn nämlich $\operatorname{tg}\omega = \frac{0}{0}$) hat man demnach zur Bestimmung der Entfernung

$$s_{0-(n-1)} = s_{r_1}$$

des Angriffspunktes der Resultirenden der $(n-1)$ Kräfte vom Angriffspunkte der Kraft P_0, diese Entfernung auf der Richtung der Kraft P_0 gemessen:

$$s_{0-(n-1)} = s_{r_1} = \frac{P_1 s_1 \sin\alpha_1 + P_2 s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} s_{n-1} \sin\alpha_{n-1}}{P_n \sin(180 + \alpha_n)}$$

und als Arm a des Kräftepaares die Differenz

$$a = s_{0-n} - s_{0-(n-1)} = s_r - s_{r_1}$$

Ist diese Differenz $= 0$, so sind die Kräfte im Gleichgewichte.

Berechnung der Resultirenden von im Raume zerstreut wirkenden Kräften.

Liegen, wie in Fig. 4. die Kräfte $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n$ im Raume oder in verschiedenen Ebenen zerstreut, so kann man sich behufs Bestimmung des Endresultates ihres Zusammenwirkens eine Ebene AB senkrecht auf P_0 errichtet denken, und durch P_0 hindurch eine Ebene CD, welche die AB längs der Geraden pq schneidet. Nun kann man sich durch die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots P_n$ Ebenen gelegt denken, welche sämtlich auf AB senkrecht stehen und mit der Ebene CD die Winkel α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ einschliessen, welche sämtlich in gleichem Sinne zu messen sind. Nun kann jede Kraft in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine senkrecht auf die Ebene AB, die andere hingegen in die Ebene AB hineinfällt. Die Neigungswinkel der Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ zur Ebene AB seien β_1, β_2, $\beta_3 \ldots$ Um bei ihrer Messung Zweideutigkeit auszuschliessen, messe man selbe stets von oberhalb der Ebene AB hinweg in aufsteigender Richtung und gegen die Ebene CD hin. Für solche Winkel β, welche zwischen 180^0 und 360^0 liegen, werden dann die verticalen Componenten negativ. Für solche Winkel β, welche zwischen 90^0 und 270^0 liegen, werden die in die Ebene AB fallenden Componenten negativ, was so viel bedeutet, dass diese Componenten mit pq solche Winkel α einschliessen, welche um 180^0 grösser in die Rechnung einzuführen sind, als die Neigungswinkel α der Kraftebenen zur Ebene CD. Nach Zerlegung der Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ in je zwei Componenten bekommt man ein System von parallelen auf die Ebene AB senkrechten, und ein System von in der Ebene AB zerstreut liegender Kräfte, welche Systeme jedes für sich einer weitern Vereinigung fähig sind. Zur Feststellung der Lage der gegebenen Kräfte im Raume müssen auch noch die Abschnitte zwischen den Schnittpunkten a_0, a_1, $a_2 \ldots a_n$ der Kraftebenen und einem Punkte O auf der Linie pq gegeben sein, ebenso die Entfernungen $O_1 a_1$, $O_2 a_2$, $O_3 a_3 \ldots$ der Punkt O_1, O_2, $O_3 \ldots O_n$, wo die Kraftrichtungen die Ebene AB durchdringen von den auf pq liegenden Punkten a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$.

Das eine Kräftesystem wird gebildet von den auf die Ebene AB senkrechten Componenten:

$$P_0, \quad P_1 \sin\beta_1, \quad P_2 \sin\beta_2 \quad \ldots \quad P_n \sin\beta_n$$

deren Angriffspunkte durch die Längen

$$O_1 a_1 = m_1, \quad O_2 a_2 = m_2, \quad O_3 a_3 = m_3 \quad \ldots \quad O_n a_n = m_n$$

bestimmt sind.

Das andere Kräftesystem wird gebildet von den in der Ebene AB liegenden Componenten:

$$P_1 \cos\beta_1, \quad P_2 \cos\beta_2, \quad P_3 \cos\beta_3 \quad \ldots \quad P_n \cos\beta_n$$

deren Lage bestimmt wird durch die Winkel

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3 \quad \ldots \quad \alpha_n$$

welche selbe mit der Linie pq, der Durchschnittslinie der Ebenen CD und AB, einschliessen, und durch die auf ihr gelegenen Abschnitte:

$$Oa_0 = s_0, \quad Oa_1 = s_1, \quad Oa_2 = s_2, \quad Oa_3 = s_3 \quad , \ldots \quad Oa_n = s_n$$

welche die Entfernungen der Angriffspunkte $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ der Componenten vom Punkte O sind.

Soll nun Gleichgewicht vorhanden sein, so müssen die Resultirenden jeder dieser zwei Kräftesysteme für sich gleich null sein.

Hiezu ist erforderlich, dass bezüglich des ersten Kräftesystems:

$$P_0 + P_1 \sin\beta_1 + P_2 \sin\beta_2 + \ldots + P_n \sin\beta_n = 0 \qquad 1)$$

sei, und dass der Angriffspunkt der Resultirenden der von der Ebene AB nach hinauf gerichteten Parallelkräfte auf denselben Punkt falle, wohin der Angriffspunkt der von der Resultirenden der von der Ebene AB nach abwärts gerichteten Kräfte hinfällt. Hiefür erhalten wir, wenn die nach abwärts gerichteten Componenten mit $P_x \sin\beta_x$, $P_y \sin\beta_y \ldots$ bezeichnet werden, die zwei Bedingungsgleichungen:

$$P_0 s_0 + P_1 \sin\beta_1 (s_1 - m_1 \cos\alpha_1) + \ldots$$
$$= P_x \sin\beta_x (s_x - m_x \cos\alpha_x) + P_y \sin\beta_y (s_y - m_y \cos\alpha_y) + \ldots$$

$$P_1 \sin\beta_1 m_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\beta_2 m_2 \sin\alpha_2 + \ldots$$
$$= P_x \sin\beta_x m_x \sin\alpha_x + P_y \sin\beta_y m_y \sin\alpha_y + \ldots$$

Bezüglich des zweiten Kräftesystems in der Ebene AB müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\operatorname{tg}\omega = \tfrac{0}{0}$$

demnach:

$$P_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_n \cos\beta_n \sin\alpha_n = 0 \qquad 2)$$

$$P_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_n \cos\beta_n \cos\alpha_n = 0 \qquad 3)$$

ferner:

$$\frac{P_1 \cos\beta_1 s_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} \cos\beta_{n-1} s_{n-1} \sin\alpha_{n-1}}{P_n \sin(180^0 + \alpha_n)} = s_n$$

Sind nur die Bedingungsgleichungen 1, 2, 3 erfüllt, so ist das Endergebniss: ein Kräftepaar in einer zu AB verticalen Ebene und

ein solches in der Ebene AB gelegenes, welche sich dann zu einem einzigen vereinigen lassen

Ist entweder nur die Bedingungsgleichung 1 allein, oder 2 und 3 allein erfüllt, so ist das Endergebniss eine Kraft und ein Kräftepaar.

Ist keine von den Bedingungsgleichungen erfüllt, so erhält man als Endresultat zwei Kräfte, welche sich nur dann zu einer einzigen vereinigen lassen, wenn selbe in eine Ebene fallen, was dann geschieht, wenn der Angriffspunkt der auf die Ebene AB senkrechten Kraft in die Richtung der Resultirenden jener Kräfte fällt, die in der Ebene AB wirken. Dies ist der Fall, wenn

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + \ldots}{P_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 + \ldots}$$

$$= \frac{\dfrac{P_1 \sin\beta_1 m_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\beta_2 m_2 \sin\alpha_2 + \ldots}{P_1 \sin\beta_1 + P_2 \sin\beta_2 + P_3 \sin\beta_3 + \ldots}}{S_r - \dfrac{P_0 s_0' + P_1 \sin\beta_1 (s_1 - m_1 \cos\alpha_1) + \ldots}{P_1 \sin\beta_1 + P_2 \sin\beta_2 + P_3 \sin\beta_3 + \ldots}}$$

wobei s_r der Abstand des nach der Linie pq verlegten Angriffspunktes der Resultirenden der in der Ebene AB gelegenen Kräfte vom Punkte O ist.

Für s_r haben wir:

$$s_r = \frac{P_1 \cos\beta_1 s_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_n \cos\beta_n s_n \sin\alpha_n}{(P_1 \cos\beta_1 \cos(\omega - \alpha_1) + P_2 \cos\beta_2 \cos(\omega - \alpha_2) + \ldots + P_n \cos\beta_n \cos(\omega - \alpha_n)) \sin\omega}$$

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn n Kräfte im Raume an verschiedenen Punkten angreifend wirken, Gleichgewicht nur dann stattfinden kann, wenn die Resultirende von $n-1$ Kräften der Grösse nach der $n$ten Kraft gleich, ihr entgegengesetzt gerichtet ist und mit ihr in eine Linie zusammen fällt. Auch von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet lassen sich, wie man leicht finden wird, ohne Schwierigkeit sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht aufschreiben [7]).

---

7) Die Bedingungsgleichungen nach dieser Auffassung wären:

$$P_0 + P_1 \sin\beta_1 + P_2 \sin\beta_2 + \ldots P_n \sin\beta_n = 0$$

$$P_0 \cos\omega + P_1 \cos(\omega - \alpha_1) + P_2 \cos(\omega - \alpha_2) + \ldots$$
$$+ P_{n-1} \cos(\omega - \alpha_{n-1}) + P_n \cos\beta_n = 0$$

Ist die Resultirende von $n-1$ Kräften an Grösse der $n$ten Kraft gleich und entgegengesetzt gerichtet, fällt sie aber mit der $n$ten Kraft nicht in eine Linie zusammen, so ist das Endergebniss des Zusammenwirkens der n Kräfte ein Kräftepaar.

In allen andern Fällen ist das Endergebniss eine Kraft und ein Kräftepaar oder zwei Kräfte, welche entweder nicht in derselben Ebene liegen oder aber ja, in welch' letzterem Falle sie sich zu einer einzigen Mittelkraft vereinigen lassen.

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_1 \cos\beta_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} \cos\beta_{n-1} \sin\alpha_{n-1}}{P_1 \cos\beta_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 \cos\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} \cos\beta_{n-1} \cos\alpha_{n-1}} = \operatorname{tg}(180^0 + \alpha_n)$$

$$P_1 \cos\beta_1 s_1 \sin\alpha_1 + P_2 \cos\beta_2 s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} \cos\beta_{n-1} s_{n-2} \sin\alpha_{n-1} = P_n \cos\beta_n s_n \sin\alpha_n$$

$$P_1 \sin\beta_1 (s_1 - m_1 \cos\alpha_1) + P_2 \sin\beta_2 (s_2 - m_2 \cos\alpha_2) + \ldots + P_{n-1} \sin\beta_{n-1} (s_{n-1} - m_{n-1} \cos\alpha_{n-1}) = P_n \sin\beta_n (s_n - m_n \cos\alpha_n)$$

$$P_1 \sin\beta_1 m_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\beta_2 m_2 \sin\alpha_2 + \ldots + P_{n-1} \sin\beta_{n-1} m_{n-1} \sin\alpha_{n-1} = P_n \sin\beta_n m_n \sin\alpha_n$$

IV.

Darstellungen zalentheoretischer Functionen durch trigonometrische Reihen.

Von

Franz Rogel.

Die für $n = 1, 2 \ldots$ aus

$$y_n = \frac{x^n}{1-x^n}$$

hervorgehende unter dem Namen der „Lambert'schen Reihe" bekannte Reihe geht unter Voraussetzung eines $x \lessgtr {+1 \atop -1}$, nach Verwandlung dieser Brüche in die gleichwertigen Potenzreihen und schliesslicher Zusammenziehung gleichnamigrr Potenzen in eine neue Potenzreihe über, in welcher der Coefficient $\psi(m)$ irgend einer Potenz x^m die Anzal sämtlicher Teiler der Zahl m angiebt.

Besagte Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{\infty} \psi(m) x^m$$

convergent zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$, bietet demnach das bemerkenswerte Beispiel einer rein algebraischen Reihe dar, die sich in eine andre von entschieden zalentheoretischen Charakter verwandeln lässt.

Diese Eigentümlichkeit soll nun im Folgenden dahin ausgebeutet werden, zalentheoretische Functionen durch stetige Functionen auszudrücken.

Als zweckdienliches Mittel wurde beiderseitiges wiederholtes Differentiiren gewält. Im allgemeinen ist nun der Differentialquotient einer convergenten Reihe nicht notwendig auch convergent. Die Ergebnisse werden jedenfalls einer Verification unterzogen werden müssen, die schliesslich mittelst zalentheoretischer Betrachtungen geleistet werden wird.

Um den $m$ten Differentialquotienten der Reihe

$$L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$

zu erhalten, wird jener des allgemeines Gliedes

$$y_n = \frac{x^n}{1-x^n}$$

und zwar am zweckmässigsten mittelst Zerlegung in Partialbrüche aufgesucht werden müssen. Bekanntlich ist,

$$\frac{\pi}{n} = \vartheta$$

gesetzt,

a) bei geradem n:

$$y_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{(-1)^n}{1-x} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-2} \frac{e^{(n+1)h\vartheta i}}{e^{h\vartheta i}-x} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-2} \frac{e^{-(n+1)h\vartheta i}}{e^{-h\vartheta i}-x}\right] \qquad 1)$$

b) bei ungeradem n:

$$y_n = \left[\frac{1}{1-x} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-1} \frac{e^{(n+1)h\vartheta_i}}{e^{h\vartheta i}-x} + \sum_{h=.4\ldots}^{n-1} \frac{e^{-(n+1)h\vartheta i}}{e^{-h\vartheta i}-x}\right] \qquad 2)$$

Daraus ergeben sich die höheren Differentialquotienten:

a) bei geradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m y_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1+x)^{m+1}} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-2} \frac{e^{(n+1)h\vartheta i}}{(e^{h\vartheta i}-x)^{m+1}} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-2} \frac{e^{-(n+1)h\vartheta i}}{(e^{-h\vartheta i}-x)^{m+1}}\right] \qquad 3)$$

b) bei ungeradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m y_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-1} \frac{e^{(n+1)h\vartheta i}}{(e^{h\vartheta i}-x)^{m+1}} + \sum_{h=2.4\ldots}^{n-1} \frac{e^{-(n+1)h\vartheta i}}{(e^{-h\vartheta i}-x)^{m+1}}\right] \qquad 4)$$

Für $x = 0$ ist

a) bei geradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m{}_0 y_n = \frac{1}{n}\left[1+(-1)^m+2\sum_{h=2.4\ldots}^{n-2}\cos(n-m)h\vartheta\right] \tag{5}$$

b) bei ungeradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m{}_0 y_n = \frac{1}{n}\left[1+2\sum_{h=2.4\ldots}^{n-1}\cos(n-m)h\vartheta\right] \tag{6}$$

Die angezeigten Summirungen lassen sich mit Hilfe der Formel

$$\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\ldots+\cos(h-2)\alpha+\cos h\alpha = \frac{\sin(h+1)}{2\sin\alpha}-\tfrac{1}{2}$$

(h gerade)

ausführen, dann ist

a) bei geradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m{}_0\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \frac{1}{n}\left[(-1)^m+\frac{\sin(n-1)(n-m)\frac{\pi}{n}}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}\right] \tag{7}$$

b) bei ungeradem n:

$$\frac{1}{m!} D^m{}_0\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\sin(n-m)\pi}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}} \tag{8}$$

Die Discussion ergiebt nun folgendes:

A. Bei geradem n und geradem m ist der Ausdruck innerhalb der Klammer in 7)

$$=\frac{2}{n}\,\frac{\sin(n-m)\frac{\pi}{2}\cos(n-2)(n-m)\frac{\pi}{2n}}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}$$

$\frac{n-m}{2}$ ist hier eine ganze Zal, somit

$$\sin(n-m)\frac{\pi}{2}=0$$

ist der Ordnungszeiger m ein Vielfaches von n, so verschwindet auch der Nenner, während

$$\cos(n-2)(n-m)\frac{\pi}{2n} = (-1)^{\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-m}{n}}$$

wird, und

$$\frac{\sin(n-m)\frac{\pi}{2}}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}$$

unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Es ist dann

$$\left.\frac{\sin(n-m)\frac{\pi}{2}}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}\right\}_{m=n\mu} = \frac{0}{0} = \frac{n}{2}\cdot\left.\frac{\cos(n-m)\frac{\pi}{2}}{\cos(n-m)\frac{\pi}{n}}\right\}_{(m=n\mu)}$$

$$= \frac{n}{2}(-1)^{\frac{n-m}{2}-\frac{n-m}{n}}$$

folglich

$$\frac{1}{m!}D^m{}_0 y_n = (-1)^{\frac{n-m}{2}-\frac{n-m}{n}+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-m}{n}}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-2)(n-m)}{n}} = +1$$

B. Bei geradem n und ungeradem m ist

$$\frac{1}{m!}D^m y_n = \frac{2}{n}\,\frac{\cos(n-m)\frac{\pi}{2}\sin\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\pi}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}$$

da $n-m$ ungerade, ist

$$\cos(n-m)\frac{\pi}{2} = 0$$

$\frac{n-2}{2}$ ist eine ungerade Zal, daher verschwindet $\sin\left(\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\right)\pi$ nicht, ebenso $\sin\frac{n-m}{n}\pi$, weil $\frac{n-m}{n}$ ein Bruch ist. Folglich ist obiger Nullwert $= 0$, ob nun m ein Vielfaches μn von n ist oder nicht.

C. Bei ungeradem n ist der Zähler in 8) $= 0$ und der Nenner verschwindet ebenfalls, wenn n in m aufgeht. In diesem Falle erscheint der Nullwert wieder in unbestimmter Form $\frac{0}{0}$. Dann ist

$$\frac{1}{m!} D^m y_n \Big\}_{m=n\mu} = \frac{1}{n} \frac{\pi \cos(n-m)\pi}{\frac{\pi}{n}\cos(n-m)\frac{\pi}{n}} \Big\}_{m=\mu n} = +1$$

Ist m kein Vielfaches μn von n, so ist der Nenner $\sin(n-m)\frac{\pi}{n}$ von null verschieden, somit der Nullwert $= 0$.

Diese durch unmittelbares, wiederholtes Differentiiren von

$$y_n = \frac{x^n}{1-x^n}$$

erhaltenen Resultate, lassen sich nun durch jene, aus der mit y_n gleichwertigen Reihe abgeleiteten, leicht verificiren.

A. Bei geradem n und geradem m wird

$$\frac{1}{m!} D^m{}_0 y^n = \frac{1}{m!} D^m{}_0 (x^n + x^{2n} + \ldots)$$

verschwinden müssen, wenn der $m$te Differentialquotient kein von x freies Glied aufweist, d. h. wenn m kein Vielfaches von n ist; im bejahenden Falle hat derselbe das Glied $m!$ und obiger Nullwert wird $= 1$.

B. Bei geradem n und ungeradem m. Das ungerad-male Differentiiren einer Potenzreihe mit lauter geraden Exponenten kann nie eine Reihe mit einem von x freien Gliede ergeben; mithin ist der Nullwert $= 0$.

C. Bei ungeradem n und beliebigem m lässt sich dasselbe wie in A) behaupten.

Diese Ergebnisse lassen sich in einen einzigen Satz zusammenziehen, welcher lautet:

„Der Nullwert

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{m!} D^m{}_0 \frac{x^n}{1-x^n}$$

„ist entweder gleich der Einheit oder gleich der Null, jenachdem „m ein Vielfaches von n ist oder nicht“.

Diese mit Hilfe trigonometrischer Functionen dargestellte Function

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right)$$

welche die nachfolden Darstellungen ermöglicht, hat nach 7) und 8),

jenachdem n gerade oder ungerade ist, zwei verschiedene Formen. Dieselben sind einer beträchtlichen Vereinfachung fähig. Vor allem kann unbeschadet der Allgemeinheit einfacher $\sin m\pi$ statt $\sin(n-m)\pi$, und $\sin\frac{m}{n}\pi$ statt

$$\sin(n-m)\frac{\pi}{n} = \sin\left(1-\frac{m}{n}\right)\pi$$

geschrieben werden. Ferner ist bei geradem n nur ein ebenfalls gerades m in Betracht zu ziehen (siehe B.), in welchem Falle der Nullwert

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[1+\frac{\sin(n-1)(n-m)\frac{\pi}{n}}{\sin(n-m)\frac{\pi}{n}}\right]$$

ist; nun ist

$$\sin(n-1)(n-m)\frac{\pi}{n} = \sin\left(m-n-\frac{m}{n}\right)\pi$$

$$= \sin(m-n)\pi\cos\frac{m}{n}\pi - \cos(m-n)\pi\sin\frac{m}{n}\pi$$

und weil m und n gerade sind, auch

$$\sin(m-n)\pi = \sin m\pi, \quad \cos(m-n)\pi = +1$$

daher

$$\chi\left(\frac{m}{a}\right) = \frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m}{n}\pi}\cos\frac{m}{n}\pi \tag{9}$$

und bei ungeradem n

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \tag{10}$$

Dem Gesagten wäre nur noch beizufügen, dass

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right)$$

für endliche $n > m$ auch verschwinden muss, weil hier bei dem stets verschwindenden Zäler $\sin m\pi$ oder $\sin m\pi\cos\frac{m}{n}\pi$ der Nenner $\sin\frac{m\pi}{n}$ von null verschieden ist.

Es kann nun zur independenten Darstellung der häufigst vorkommenden zalentheoretischen Functionen durch trigonometrische Ausdrücke geschritten werden.

1. **Die Anzal der Teiler einer Zal** m wird sich mit Rücksicht auf das Eingangs über die „Lambert'sche Reihe" Bemerkte, als die Summe

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m!} D^m{}_0 \frac{x^n}{1-x^n} = \psi(m)$$

ergeben. Denn da dieser Nullwert nur dann nicht verschwindet und $= 1$ wird, wenn m ein Vielfaches μn von n ist, so wird der Nullwert innerhalb des Intervalls von $n = 1$ und $n = m$ (einschliesslich der Grenzwerte) so oft $= 1$ werden als das veränderliche n ein Teiler von m wird, d. h. so oft als m Teiler besitzt. Mit Bezug auf 9) und 10) ist daher

a) **bei geradem** m:

$$\psi(m) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{m-1} \frac{1}{n} \frac{\operatorname{tin} m\pi}{\sin m\frac{\pi}{n}} + \sum_{n=2.4\ldots}^{m} \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \cos\frac{m\pi}{n} \tag{11}$$

b) **bei ungeradem** m:

$$\psi(m) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{m} \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin m\frac{\pi}{u}} \tag{12}$$

Als obere Grenze dieser Summe kann selbstverständlich jede endliche Zal $> m$ genommen werden. weil wie schon bemerkt für $n > m$ der Nullwert verschwindet. Dass ∞ nicht als Grenzwert fungiren darf, hat darin seinen Grund, weil die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin m\frac{\pi}{n}} = \sin m\pi \, \Sigma \frac{1}{n} \frac{1}{\sin\frac{m\pi}{n}}$$

als das Product einer für jedes ganze m verschwindenden Function $\sin m\pi$ und einer für jedes m nicht summirbaren, also völlig unbestimmten, unendlichen divergenten Reihe bei dieser Annahme keines bestimmten Wertes fähig sein kann.

2. **Die Summe** $\sigma(m)$ **der Teiler einer Zal** m ergiebt sich sofort aus den Formeln 11) und 12) durch Weglassung von $\frac{1}{n}$; es ist dann

a) **bei geradem** m:

$$\sigma(m) = \sum_{n=1.3.5\ldots}^{m-1} \frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} + \sum_{n=2.4\ldots}^{\infty} \frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \cos\frac{m}{n}\pi \tag{13}$$

b) bei **ungeradem** m:

$$\sigma(m) = \sum_{n=1.3.5..}^{m} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \tag{14}$$

3. Die **Summe** $\varrho(m)$ **der reciproken Teiler einer Zal** m geht aus 11) und 12) hervor, wenn $\frac{1}{n^2}$ statt $\frac{1}{n}$ angesetzt wird:

a) bei **geradem** m:

$$\varrho(m) = \sum_{n=1.3.5...}^{m-1} \frac{1}{n^2} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} + \sum_{n=2.4...}^{m} \frac{1}{n^2} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \cos \frac{m}{n}\pi \tag{15}$$

b) bei **ungeradem** m:

$$\varrho(m) = \sum_{n=1.3.5...}^{m} \frac{1}{n^2} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \tag{16}$$

4. **Die Summe von Functionen der Teiler** $\Sigma f(t)$, wobei $f(t)$ eine stetige, für die Werte von $n = 1$ bis $n = m$ nicht verschwindende, sonst beliebige Function bedeutet, enthält als specielle Fälle die beiden obigen Summen $\sigma(m)$ und $\varrho(m)$ und entsteht aus 11) und 12) durch Vertauschung von $\frac{1}{n}$ mit $\frac{1}{n}f(n)$:

a) bei **geradem** m:

$$\Sigma f(t) = \sum_{n=1.3.5...}^{m-1} \frac{f(n)}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} + \sum_{n=2.4...}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \cos \frac{m}{n}\pi \tag{17}$$

b) bei **ungeradem** m:

$$\Sigma f(t) = \sum_{n=1.3.5...}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \tag{18}$$

Die Variable t hat alle Teiler-Werte der gegebenen Zal m anzunehmen.

5. Von **speciellen Fällen** verdient vor allem jener hervorgehoben zu werden, wo m eine Primzal p ist.

Aus den Formeln 12), 14), 16) und 18) entstehen bei dieser Annahme sodann folgende Gleichungen:

$(p \sim 2)$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{p} \frac{1}{n} \frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{n}} = 2 \qquad 12')$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{p} \frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{n}} = 1+p \qquad 14')$$

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{p} \frac{1}{n^2} \frac{\sin p\pi}{\sin \frac{p\pi}{n}} = 1+\frac{1}{p} \qquad 16')$$

. . . .

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{p} \frac{f(n)}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{p\pi}{n}} = 1+f(p) \qquad 18')$$

Umgekehrt, wenn aus den genannten Formeln die Zal 2, $1+p$ etc. hervorgeht, so ist die Zal m notwendig eine Primzal p.

Für die $r$te Potenz einer Primzal gilt:

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{p^r} \frac{1}{n} \frac{\sin p^r\pi}{\sin \frac{p^r\pi}{n}} = r+1 \qquad 12'')$$

Ist nun $r+1$ eine Primzal, so kann umgekehrt daraus geschlossen werden, dass die zu Grunde liegende Zal m die $r$te Potenz einer einzigen Primzal sein muss.

Wird aus 12) irgend eine Potenz $q^\varkappa$ erhalten, so ist die Zal m die $(q-1$te Potenz eines Productes von $\varkappa$ Primzalen.

6. Die Anzal $\mathfrak{p}_m$ der in m aufgehenden Primzalen wird durch folgende Betrachtung gefunden.

Werden in der Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{x^p}{1-x^p}$, in welcher p die Primzalenreihe durchläuft, die einzelnen Glieder durch die gleichwertigen Potenzreihen ersetzt (unter Voraussetzung eines $x < +1$), und die gleichnamigen Potenzen zusammengezogen, so entsteht eine convergente Potenzreihe, in der irgend ein Coefficient $\mathfrak{p}_m$ einer Potenz x^m die Anzal der in m aufgehenden Primzalen angiebt, wie aus nachstehendem Ansatz zu ersehen ist.

$$\frac{x}{1-x} = x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12} \\ +x^{13}+x^{14}+x^{15}\ldots$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = .+x^2.\ +x^4.\ .+x^6.\ .+x^8.\ .+x^{10}.\ \ .+x^{12} \\ .\ .+x^{14}.+\ \ldots$$

$$\frac{x^3}{1-x^3} = \ldots+x^3\ldots.+x^6\ldots..+x^9\ldots..+x^{12} \\ .\ .+x^{15}\ldots$$

$$\frac{x^5}{1-x^5} = \ldots\ldots.+x^5\ldots\ldots\ldots+x^{10} \\ .\ .+x^{15}\ldots$$

$$\frac{x^7}{1-x^7} = \ldots\ldots\ldots\ .+x^7\ldots..+x^{14}\ldots\ldots$$

$$\frac{x^{11}}{1-x^{11}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{11}$$

$$\frac{x^{13}}{1-x^{13}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^{13}\ \ldots\ldots..$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{x^p}{1-x^p} = x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+3x^6+2x^7+2x^8+2x^9+3x^{10} \\ +2x^{11}+3x^{12}+2x^{13}+3x^{14}+3x^{15}\ldots$$

Für diese Anzal $\mathfrak{p}_m$ lässt sich ebenfalls ein trigonometrischer Ausdruck ableiten. Derselbe geht aber offenbar auch aus den Formeln 11) und 12) hervor, wenn die Veränderliche n die Primzalen von $n=1$ an durchläuft. Da es nur eine einzige gerade Primzal giebt, nämlich $p_2 = 2$, so reducirt sich die zweite Summe rechts in 11) auf die Einheit und es gilt:

a) bei geradem m:

$$\mathfrak{p}_m = \sum_{p=1.3.5,\ldots}^{(m-1)} \frac{1}{p}\,\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{p}} + 1 \tag{19}$$

b) bei ungeradem m:

$$\mathfrak{p}_m = \sum_{p=1.3.5\ldots}^{(m)} \frac{1}{p}\,\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{p}}\ . \tag{20}$$

wo die oberen Grenzen (m) resp. $(m-1)$ so zu verstehen sind, dass das veränderliche p dieselben nicht übertreffen soll.

$$\mathfrak{A}_m = m - \sum_2^n \left| \frac{m}{C_1 p} \right| + \sum_2^n \left| \frac{m}{C_2 p} \right| - \sum_1^n \left| \frac{m}{C_3 p} \right| + - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_1^n \left| \frac{m}{C_{n-1} p} \right| + n - 1 \qquad 26)$$

wo $C_r p$ eine Combination der $r$ten Classe ohne Wiederholung aus den Primzal-Elementen $p_2 \ldots p_n$, und n die Anzal aller unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzalen bedeutet. Die Summirung in den einzelnen Gliedern hat sich auf alle $\left| \frac{m}{C_r p} \right|$, welche den sämtlichen Combinationen $C_r p$ der $r$ten Classe entsprechen, zu erstrecken.

Bevor die neuen Ausdrucksmittel bei letzterer Formel zur Anwendung gebracht werden können, müssen die Glieder mit geradem Nenner von den andern getrennt werden.

$$\mathfrak{A}_m = m - \left| \frac{m}{2} \right| + \sum_3^n \left| \frac{m}{2 C_1 p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{2 C_2 p} \right| + - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_3^n \left| \frac{m}{2 C_{n-2} p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{p} \right| + \sum_3^n \left| \frac{m}{C_2 p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{C_r p} \right| + - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} \sum_8^n \left| \frac{m}{C_{n-1} p} \right| + n - 1$$

Nun können die Formeln 25) und 26) angewendet werden.

Irgend ein Glied mit geradem Nenner ist dann:

$$(-1)^{r+1} \sum_3^n \left| \frac{m}{2 C_r p} \right| = (-1)^{r+1} \sum_3^n \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2 C_r p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2 C_v p} \right)$$

oder nach der hier zulässigen Vertauschung der Summirungs-Ordnung:

$$(-1)^{r+1} \sum_5^n \left| \frac{m}{2 C_r p} \right| = (-1)^{r+1} \sum_{m=1}^m \sum_3^n \left(\frac{1}{2 C_r p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2 C_r p} \right)$$

ebenso ist ein Glied mit ungeradem Nenner:

$$(-1)^r \sum \left| \frac{m}{C_r p} \right| = (-1)^r \sum_{m=1}^m \sum_3^n \left(\frac{1}{C_r p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{C_r p}} \right)$$

daher ist

$$\mathfrak{A}_m = m + n - 1 + \sum_{m=1}^m \Bigg[- \tfrac{1}{2} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2} + \sum_3^n \frac{1}{2 C_1 p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2 C_1 p}$$

$$- \sum_3^n \frac{\sin m\pi}{2 C_2 p} \cot \frac{m\pi}{2 C_2 p} + - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_3^n \frac{1}{2 C_{n-2} p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2 C_{n-2} p}$$

$$-\sum_{s}^{n}\frac{1}{C_1 p}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{C_1 p}}+\sum_{s}^{n}\frac{1}{C_2 p}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{C_2 p}}-+\dots$$

$$+(-1)^{n-2}\sum_{s}^{n}\frac{1}{C_{n-2}p}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{C_{n-2}p}}\Bigg] \qquad 27)$$

12. **Die Anzal** $\mathfrak{A}_m$ lässt sich noch auf eine andere, bedeutend einfachere Art mit Hilfe einer neuen Function

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right)=1-\chi\left(\frac{m}{n}\right)$$

welche die Kenntniss aller unter $\sqrt{m}$ gelegenen Primzalen nicht notwendig macht, finden. Jenachdem n gerade oder ungerade ist, nimmt $\chi\left(\frac{m}{n}\right)$ und somit auch $\xi\left(\frac{m}{n}\right)$ eine specielle Form an:

a) bei geradem n:

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right)=1-\frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\cos\frac{m\pi}{n}$$

b) bei ungeradem n:

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right)=1-\frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}$$

Die Function $\xi\left(\frac{m}{n}\right)$ ist daher entweder $=0$ oder $=1$, jenachdem m ein Vielfaches von n ist oder nicht.

Das für irgend eine Zal m gebildete Product

$$\prod_{n=2}^{m-1}\xi\left(\frac{m}{n}\right)$$

wird verschwinden, wenn auch nur eine einzige der Zalen unter m in m aufgeht; ist daher m eine Primzal p, so wird

$$\prod_{n=2}^{m-1}\xi\left(\frac{p}{n}\right)=1$$

Diese Factorenfolgen für alle Zalen von 2 angefangen bis $m-1$ gebildet und addirt, müssen eine Zal ergeben, welche von der Anzal $\mathfrak{A}_m'$ sämtlicher **unter** m liegenden Primzalen nicht verschieden ist.

7. Die allgemeinere Aufgabe „die **Summe von Functionen** f **der in** m **aufgehenden Primzalen zu finden**", kann leicht mittelst der Formeln 17) und 18) gelöst werden, wenn statt n nur Primzalen gesetzt werden. Unter Voraussetzung einer stetigen, für die Werte von $n=1$ bis $n=m$ nicht verschwindenden Fuection f ergiebt sich dann:

a) bei geradem m:

$$\Sigma f(p) = \sum_{p=1.3.5..}^{(m-1)} \frac{f(p)}{p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{p}} + f(2) \qquad 17')$$

b) bei ungeradem m:

$$\sum_{p \neq 1} f(p) = \sum_{p=1.3.5...}^{(m)} \frac{f(p)}{p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{p}} \qquad 18')$$

Ist m eine Primzal p, so ist

$$\mathfrak{p}_m = 2 \quad \text{und} \quad \Sigma f(p) = f(1) + f(p)$$

8. Durch Aenderung des Vorzeichens der zweiten Summe rechts in 11) und 13) entstehen Formeln für den Ueberschuss u_m der **Anzal** ungerader über jene gerader Teiler:

$$u_m = \sum_{n=1.3.5...}^{m-1} \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} - \sum_{n=2.4...}^{m} \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \cos \frac{m\pi}{n} \qquad 21)$$

und für den Ueberschuss v_m der **Summe** der ungeraden über jene der geraden Teiler einer beliebigen Zal m:

$$v_m = \sum_{n=1.3...}^{m-1} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} - \sum_{n=2.4,..}^{m} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m}{n}\pi} \cos \frac{m\pi}{n} \qquad 22)$$

Aus den andern Formeln gehen durch Zeichenänderung der zweiten Summe ähnliche Beziehungen hervor.

9. Werden in 20) unter p nur Primzalen von der Form $4k+1$ oder $4k+3$ verstanden, so bedeutet $\mathfrak{p}_m$ die Anzal der in m aufgehenden Primzalen von der Form $4k+1$ bzhw. $4k+3$.

Der Ueberschuss der Anzal Primzalen e von der Form $4k+1$ über jene d von der Form $4k+3$ findet seinen Ausdruck in

$$v_m = \sum_{e=1.5...}^{(m)} \frac{1}{e} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{e}} - \sum_{d=3.7...}^{(m)} \frac{1}{d} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{d}} \qquad 23)$$

10. Die grösste in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zal $\left|\frac{m}{n}\right|$ kann ebenfalls mit Hilfe der Function $\chi\left(\frac{m}{n}\right)$ durch eine trigonometrische Reihe ausgedrückt werden.

Wird nämlich m als Veränderliche betrachtet, die nach und nach die Werte von $m = 1$ bis $m = n$ durchläuft, so wird $\chi\left(\frac{m}{n}\right)$ so oft $= 1$, als m ein Vielfaches von n wird; in allen andern Fällen verschwindet es.

Da bei geradem n

$$\chi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\cos\frac{m\pi}{n}$$

und bei ungeraden n aber

$$= \frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ist, so wird daher:

a) bei geradem n:

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \sum_{1}^{m}\frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}}\cos\frac{m\pi}{n} \qquad 24)$$

b) bei ungeradem n:

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \sum_{m=1}^{m}\frac{1}{n}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n}} \qquad 25)$$

Um den Rest $\left|\frac{m}{n}\right|_r$ zu erhalten, braucht nur in

$$\left|\frac{m}{n}\right|_r = \frac{m}{n} - \left|\frac{m}{n}\right|$$

einer der beiden letzteren Ausdrücke für $\left|\frac{m}{n}\right|$ eingesetzt zu werden.

11. Die Anzal $\mathfrak{A}_m$ der Primzalen, die nicht grösser als eine gegebene Zal m sind, wurde vom Verfasser mit Hilfe der zalentheoretischen Function $\left|\frac{m}{n}\right|$ gefunden. (S. Archiv für Mathematik u. Physik | Hoppe | 2. Reihe Tom. VII. pag. 381. 1889).

Es ergab sich folgender Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_m = m - \sum_2^n \left| \frac{m}{C_1 p} \right| + \sum_2^n \left| \frac{m}{C_2 p} \right| - \sum_1^n \left| \frac{m}{C_3 p} \right| + - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \sum_1^n \left| \frac{m}{C_{n-1} p} \right| + n - 1 \qquad 26)$$

wo $C_r p$ eine Combination der $r$ten Classe ohne Wiederholung aus den Primzal-Elementen $p_2 \ldots p_n$, und n die Anzal aller unter $\sqrt{m}$ liegenden Primzalen bedeutet. Die Summirung in den einzelnen Gliedern hat sich auf alle $\left| \frac{m}{C_r p} \right|$, welche den sämtlichen Combinationen $C_r p$ der $r$ten Classe entsprechen, zu erstrecken.

Bevor die neuen Ausdrucksmittel bei letzterer Formel zur Anwendung gebracht werden können, müssen die Glieder mit geradem Nenner von den andern getrennt werden.

$$\mathfrak{A}_m = m - \left| \frac{m}{2} \right| + \sum_3^n \left| \frac{m}{2C_1 p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{2C_2 p} \right| + - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \sum_3^n \left| \frac{m}{2C_{n-2} p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{p} \right| + \sum_3^n \left| \frac{m}{C_2 p} \right| - \sum_3^n \left| \frac{m}{C_r p} \right| + - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \sum_8^n \left| \frac{m}{C_{n-1} p} \right| + n - 1$$

Nun können die Formeln 25) und 26) angewendet werden.

Irgend ein Glied mit geradem Nenner ist dann:

$$(-1)^{r+1} \sum_3^n \left| \frac{m}{2C_r p} \right| = (-1)^{r+1} \sum_3^n \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{2C_r p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2C_r p} \right)$$

oder nach der hier zulässigen Vertauschung der Summirungs-Ordnung:

$$(-1)^{r+1} \sum_5^n \left| \frac{m}{2C_r p} \right| = (-1)^{r+1} \sum_{m=1}^m \sum_3^n \left(\frac{1}{2C_r p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2C_r p} \right)$$

ebenso ist ein Glied mit ungeradem Nenner:

$$(-1)^r \sum \left| \frac{m}{C_r p} \right| = (-1)^r \sum_{m=1}^m \sum_3^n \left(\frac{1}{C_r p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{C_r p}} \right)$$

daher ist

$$\mathfrak{A}_m = m + n - 1 + \sum_{m=1}^m \Bigg[-\tfrac{1}{2} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2} + \sum_3^n \frac{1}{2C_1 p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2C_1 p}$$
$$- \sum_3^n \frac{\sin m\pi}{2C_2 p} \cot \frac{m\pi}{2C_2 p} + - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_3^n \frac{1}{2C_{n-2} p} \sin m\pi \cot \frac{m\pi}{2C_{n-2} p}$$

$$-\sum_3^n \frac{1}{C_1 p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{C_1 p}} + \sum_3^n \frac{1}{C_2 p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{C_2 p}} - + \dots$$

$$+(-1)^{n-2} \sum_2^n \frac{1}{C_{n-2} p} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{C_{n-2} p}} \Bigg] \qquad 27)$$

12. **Die Anzal** $\mathfrak{A}_m$ lässt sich noch auf eine andere, bedeutend einfachere Art mit Hilfe einer neuen Function

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - \chi\left(\frac{m}{n}\right)$$

welche die Kenntniss aller unter $\sqrt{m}$ gelegenen Primzalen nicht notwendig macht, finden. Jenachdem n gerade oder ungerade ist, nimmt $\chi\left(\frac{m}{n}\right)$ und somit auch $\xi\left(\frac{m}{n}\right)$ eine specielle Form an:

a) bei geradem n:

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}} \cos \frac{m\pi}{n}$$

b) bei ungeradem n:

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}$$

Die Function $\xi\left(\frac{m}{n}\right)$ ist daher entweder $= 0$ oder $= 1$, jenachdem m ein Vielfaches von n ist oder nicht.

Das für irgend eine Zal m gebildete Product

$$\prod_{n=2}^{m-1} \xi\left(\frac{m}{n}\right)$$

wird verschwinden, wenn auch nur eine einzige der Zalen unter m in m aufgeht; ist daher m eine Primzal p, so wird

$$\prod_{n=2}^{m-1} \xi\left(\frac{p}{n}\right) = 1$$

Diese Factorenfolgen für alle Zalen von 2 angefangen bis $m-1$ gebildet und addirt, müssen eine Zal ergeben, welche von der Anzal $\mathfrak{A}_m'$ sämtlicher **unter** m liegenden Primzalen nicht verschieden ist.

Die vorige Entwicklung ergab die Anzal $\mathfrak{A}_m$ aller ein bestimmtes m nicht übertreffenden Primzalen.

Da nun für ein gerades m offenbar

$$\mathfrak{A}_m' = \mathfrak{A}_{m+1}'$$

ist, so kann ohne der Allgemeinheit Abbruch zu tun, ein ungerades m vorausgesetzt werden. Dann brauchen die Factorenfolgen nur für die der gegebenen Zal m vorangehenden ungeraden Zalen mit Ausschluss der Einheit gebildet zu werden

Da dann m und n ungerade ist, so ist

$$\xi\left(\frac{m}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}$$

und für die Anzal aller unter m liegenden Primzalen ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_m' = \sum_{r=3.5...}^{m} \prod_{n=3.5...}^{r-1} \left(\frac{\sin r\pi}{1 - n \sin \frac{r\pi}{n}}\right) \tag{28}$$

Ein weit einfacherer Ausdruck wird mit Hilfe des Wilson'schen Satzes, nach welchem $(p-1)!+1$ durch p teilbar ist oder nicht, jenachdem p eine Primzal ist oder nicht, gewonnen; es ist nämlich

$$\frac{\sin[(m-1)!+1]\pi}{m \sin \frac{(m-1)!+1}{m}\pi}$$

entweder $= 1$ oder $= 0$, jenachdem m eine Primzal ist oder nicht. Daher ist

$$\mathfrak{A}_m = 1 + \sum_{2}^{m-1} \frac{\sin[(r-1)!+1]\pi}{r \sin \frac{(r-1)!+1}{r}\pi} \tag{28*}$$

13. Die Summe aller unter einer gegebenen Zal m liegenden Primzalen aufzufinden, bietet nun auch keine Schwierigkeit dar. Der Ausdruck

$$m \prod_{n=3.5...}^{m-2} \left(1 - \frac{\sin m\pi}{n \sin \frac{m\pi}{n}}\right)$$

m ungerade vorausgesetzt, wird nur dann nicht verschwinden, wenn keine der Zahlen von 3 bis $m-2$ in m aufgeht, in welchem Falle

derselbe $= m$ und zwar einer Primzal gleich wird. Die Summe ist daher gegeben durch

$$s(m) = \sum_{r=3,5\ldots}^{m-2} r \prod_{3}^{r-2} \left(1 - \frac{\sin r\pi}{n \sin \frac{r\pi}{n}}\right) \tag{29}$$

und die Summe von Functionen sämtlicher ungerader Primzalen p unter m gegeben durch

$$\sum_{p=3}^{(m)} f(p) = \sum_{r=3,5\ldots}^{m-2} f(r) \prod_{n=3}^{r-2} \left(1 - \frac{\sin r\pi}{n \sin \frac{r\pi}{n}}\right) \tag{30}$$

wo f eine stetige, für Werte von $p = 2$ bis $p = m$ nicht verschwindende Function vorstellt.

Auch hier ergiebt die Herbeiziehung des Wilson'schen Satzes einen einfacheren Ausdruck, denn es ist

$$\frac{\sin[(r-1)!+1]\pi}{\sin \frac{(r-1)!+1}{r}\pi}$$

entweder $= r$ oder $= 0$, jenachdem r eine Primzal ist oder nicht. Demnach gilt

$$S_m = 1 + \sum_{2}^{m-1} \frac{\sin[(r-1)!+1]\pi}{\sin \frac{(r-1)!+1}{r}\pi} \tag{29'}$$

14. Die Anzal $\varphi(m)$ aller Zalen $< m$, welche gegen letztere relativ prim sind, ist bekanntlich

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) \ldots$$

wenn $a, b, c \ldots$ die in m aufgehenden Primzalen bedeuten. Die Kenntniss derselben kann durch Einführung der Function $\chi\left|\frac{m}{n}\right|$ entbehrlich gemacht werden. Es ist nämlich $\frac{1}{n}\chi\left|\frac{m}{n}\right|$ entweder $= \frac{1}{n}$ oder $= 0$, jenachdem m ein Vielfaches von n ist oder nicht und daher gestattet zu setzen:

$$\varphi(m) = m \prod \left(1 - \frac{1}{n}\chi\left|\frac{m}{n}\right|\right)$$

wo die Variable n alle in m aufgehenden Primzalenwerte $a, b, c \ldots$ anzunehmen hat. Die Factorenfolge kann aber auch durch

solche Factoren ergänzt werden, welche jenen Primzahlen $p_r < m$ entsprechen, die in m nicht enthalten sind, für die daher

$$1-\frac{1}{p_r}\chi\left|\frac{m}{p_r}\right|=1$$

wird. Für ein ungerades m ist dann

$$\varphi(m)=m\prod_{r=3}^{n}\left(1-\frac{1}{p_r^2}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{p_r}}\right) \tag{31}$$

und für ein gerades m:

$$\varphi(m)=\tfrac{1}{2}m\prod_{r=3}^{n}\left(1-\frac{1}{p_r^2}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{p_r}}\right) \tag{32}$$

wo als obere Grenze jede endliche Zal $\geqq n$ fungiren kann.

Die kleinste zulässige Grenze ist jenes n, bei welchem $p_n < m < p_{n+1}$ ist. Für die Potenz einer Primzal q^k ist

$$\varphi(m)=\varphi(q^k)=q^{k-1}(q-1)$$

somit (wenn $q>2$):

$$\prod_{r=3}^{n}\left(1-\frac{1}{p_r^2}\frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{p_r}}\right)=1-\frac{1}{q}$$

15. Das Product

$$\chi\left|\frac{a}{n}\right|\cdot\chi\left|\frac{b}{n}\right|\cdot\chi\left|\frac{c}{n}\right|\;\cdots\;\chi\left|\frac{k}{n}\right|$$

ist $=1$ oder $=0$, jenachdem n in allen Zalen $a, b, c \ldots k$ zugleich enthalten ist oder nicht, daher stellt die Summe

$$\sum_{n=1}^{a}\chi\left|\frac{a}{n}\right|\;\chi\left|\frac{b}{n}\right|\;\chi\left|\frac{c}{n}\right|\;\cdots\;\chi\left|\frac{k}{n}\right|$$

a als die kleinste der Zalen $a, b, c \ldots k$ vorausgesetzt, die Anzal der Zalen dar, welche in allen Zalen $a, b, c \ldots k$ enthalten sind; ferner

$$\sum_{n=2}^{a}n\chi\left|\frac{a}{n}\right|\;\chi\left|\frac{b}{n}\right|\;\chi\left|\frac{c}{n}\right|\;\cdots\;\chi\left|\frac{k}{n}\right|$$

die Summe aller in jeder der gegebenen Zalen $a, b, c \ldots k$ aufgehenden Zalen, und allgemein

$$\sum_{n=2}^{a} f(n)\chi\left|\frac{a}{n}\right|\chi\left|\frac{b}{n}\right|\chi\left|\frac{c}{n}\right| \ldots \chi\left|\frac{k}{n}\right|$$

die Summe von Functionen f (von bereits bezeichneten Eigenschaften) aller in sämtlichen gegebenen Zalen aufgehenden Zalen.

16. **Der Ausdruck**

$$1+(n-1)\chi\left|\frac{m}{n}\right|$$

hat die Eigenschaft für jedes $m = \mu n$ (μ eine ganze Zal) $= n$, sonst aber $= 1$ zu werden. Das Product

$$\prod_{m=a}^{k}\left[1+(p-1)\chi\left|\frac{m}{p}\right|\right]$$

wo für m successive die Zalen $a, b, c \ldots k$ zu setzen sind, muss daher eine Potenz von p ergeben, deren Exponent anzeigt, wie viele der Zalen $a, b, c \ldots$ die Zal p enthalten.

17. Die Aufgabe, das grösste gemeinschaftliche Mass mehrerer Zalen von unbekannter Zusammensetzung zu finden, kann auf jene zurückgeführt werden, die höchste in allen Zalen a, $b, c \ldots k$ aufgehende Primzalen-Potenz p_r^{ϱ} zu ermitteln. Nun wird das Product

$$\chi\left|\frac{a}{p_r^{\alpha}}\right|\chi\left|\frac{b}{p_r^{\alpha}}\right|\chi\left|\frac{c}{p_r^{\alpha}}\right| \ldots \chi\left|\frac{k}{p_r^{\alpha}}\right|$$

entweder $= 1$ oder $= 0$, jenachdem sämtliche Zalen $a, b, c \ldots k$ die Potenz p_r^{α} enthalten oder nicht; ferner verschwindet es auch wenn p_r^{α} eine der gegebenen Zalen übertrifft. Werden die Producte für $\alpha = 1$, $\alpha = 2 \ldots \alpha = a$ gebildet und addirt, so ist

$$\sum_{\alpha=1}^{a}\chi\left|\frac{a}{p_r^{\alpha}}\right|\chi\left|\frac{b}{p_r^{\alpha}}\right|\chi\left|\frac{c}{p_r^{\alpha}}\right| \ldots \chi\left|\frac{k}{p_r^{\alpha}}\right| = \varrho$$

der Exponent der höchsten in jeder der Zalen $a, b, c \ldots k$ aufgehenden Primzalpotenz p_r^{ϱ}. Als obere Grenze von Σ darf offenbar jede Zal $\alpha \geqq \varrho$ genommen werden, weil ja dann

$$\chi\left|\frac{a}{p_r^{\alpha}}\right| = 0$$

ist, also auch

$$\alpha = \left|\frac{\log a}{\log p_r}\right|$$

Das Product aller für $p_r = p_2$ bis zu einem p_n, grösser als die grösste der Zahlen $a, b, c \ldots k$ aufgestellten Ausdrücke $p_r{}^\varrho$ ergiebt das grösste gemeinschaftliche Mass der Zalen $a, b, c \ldots k$, nämlich:

$$\mathfrak{M}(a, b, c \ldots k) = \prod_{r=2}^{n} p_r^{\sum_{\alpha=1}^{\alpha} \chi\left|\frac{a}{p_r{}^\alpha}\right| \chi \left|\frac{b}{p_r{}^\beta}\right| \chi \left|\frac{c}{p_r{}^\alpha}\right| \cdots \chi \left|\frac{k}{p_r{}^\alpha}\right|} \qquad 33)$$

wo a als die grösste der Zalen voraesgesetzt,

$$\alpha = \left|\frac{\log a}{\log p_r}\right|$$

und $p_{n-1} < a < p_n$ anzunehmen ist.

Sind alle Zalen relativ prim zu einander, so verschwinden die als Exponenten fungirenden Summen und $\mathfrak{M}(a, b, c \ldots k)$ wird $= 1$.

18. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zalen a nnd b läst sich mittelst des grössten gemeinschaftlichen Masses $\mathfrak{M}$ derselben finden. Da $\frac{a}{\mathfrak{M}}$ und $\frac{b}{\mathfrak{M}}$ relativ prim zu einander sind, so ist

$$\frac{a}{\mathfrak{M}} \cdot \frac{b}{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{M} = \frac{ab}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{B}(a, b)$$

das kleinste Vielfache, folglich

$$\mathfrak{B}(a, b) = \frac{ab}{\prod_{r=2}^{n} p_r^{\sum_{\alpha=2}^{\alpha} \chi\left|\frac{a}{p_r{}^\alpha}\right| \chi \left|\frac{b}{p^{r\alpha}}\right|}} \qquad 34)$$

Diese Methode kann leicht auf den allgemeinen Fall mit einer beliebigen Anzal von Zalen ausgedehnt werden.

Einfacher ergiebt sich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $\mathfrak{B}(a, b, c \ldots k)$ auf die folgende Art.

$\mathfrak{B}$ übertrifft das Product

$$P = abc \ldots k$$

nie, auch muss letzteres P ein Vielfaches des verlangten $\mathfrak{B}$ sein, etwa $= \mu\mathfrak{B}$. Nun wird

$$\chi\left|\frac{V}{a}\right| \chi\left|\frac{V}{b}\right| \chi\left|\frac{V}{c}\right| \cdots \chi\left|\frac{V}{k}\right|$$

wo V irgend eine Zal vorstellt, nur dann nicht verschwinden und $= 1$ sein, wenn jede der Zalen $a, b, c \ldots k$ in V enthalten ist. Erhält V nach und nach die Werte 1 bis P, so wird die Summe der Producte der Functionen χ anzeigen, wie viel Vielfache von V das Product P nicht übertreffen, d. h. es wird μ hervorgebracht; daher gilt:

$$\mathfrak{B}(a, b, c \ldots k) = \frac{P}{\mu} = \frac{a, b, c \ldots k}{\sum\limits_{v=1}^{abc \ldots k} \chi \left|\frac{V}{a}\right| \chi \left|\frac{V}{b}\right| \chi \left|\frac{V}{c}\right| \cdots \chi \left|\frac{V}{k}\right|} \tag{35}$$

Als untere Summengrenze kann auch die kleinste der gegebenen Zalen gesetzt werden.

19. Die Frage nach der Anzal gemeinschaftlicher Teiler mehrerer Zalen $a, b, \ldots k$ ist eine sehr naheliegende und findet ihre Lösung mittelst des Productes

$$\chi\left(\frac{a}{t}\right)\chi\left(\frac{b}{t}\right)\cdots\chi\left(\frac{k}{t}\right)$$

welches die im Absatz 15. gefundene Eigenschaft besitzt, nur für solche t nicht zu verschwinden, welche in jeder der Zalen $a, \ldots k$ enthalten sind, und in diesem Falle $= 1$ zu werden. Wird nun in der Summe

$$\sum_{t=1} t\left(\frac{a}{t}\right)\chi\left(\frac{b}{t}\right)\cdots\chi\left(\frac{k}{t}\right)$$

jedes Glied mit einem Factor multiplicirt, welcher die Eigenschaft hat entweder $= 1$ oder $= 0$ zu sein, jenachdem $\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \ldots \frac{k}{t}$ ganze Zalen und relativ prim zu einander sind oder nicht. Nun verschwinden aber alle Summenglieder für solche t, welche auch nur in einer einzigen Zal nicht enthalten sind; obige Summe besteht daher nur aus solchen Gliedern, in welchem t ein gemeinschaftlicher Teiler oder in welchen $\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \ldots \frac{k}{t}$ ganze Zalen sind. Besagter Factor ist aber gegeben durch

$$\prod_{n=2}\left[1 - \chi\left|\frac{\frac{a}{t}}{n}\right| \chi\left|\frac{\frac{b}{t}}{n}\right| \cdots \chi\left|\frac{\frac{k}{t}}{n}\right|\right]$$

denn

$$1 - \chi\left|\frac{\frac{a}{t}}{n}\right| \cdots \chi\left|\frac{\frac{k}{t}}{n}\right|$$

ist = 1, wenn $\frac{a}{t}, \frac{b}{t} \ldots \frac{k}{t}$ nicht zugleich durch n teilbar sind und ist = 0, wenn sie einen gemeinschaftlichen Divisor n haben. Die obere Grenze von Π kann beliebig gross, aber nicht kleiner als der kleinste der Quotienten $\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \ldots \frac{k}{t}$ gewält werden. Werden in letzterer Differenz dem n die Werte 2, 3 ... a (a als die kleinste der gegebenen Zalen vorausgesetzt) erteilt, und sämtliche Ausdrücke sodann multiplicirt, so wird dieses Product nur dann nicht verschwinden, wenn keine der Zalen von 2 bis a in jedem der Quotienten $\frac{a}{t}, \frac{b}{t} \ldots \frac{k}{t}$ enthalten ist; in diesem Falle wird das Product = 1. Dies wird aber nur bei einem gemeinschftlichen Teiler $\mathfrak{M}$ eintreffen, welcher identisch mit dem grössten gemeinschaftlichen Masse ist. Als obere Summengrenze kann offenbar jede Zal, welche nicht kleiner als die kleinste der Zalen $a, b, c \ldots k$ ist, genommen werden.

Die im Gegensatze zur Formel 33) von Primzalen-Variabelen freie Formel für das grösste gemeinschaftliche Mass beliebiger Zalen $a, b, \ldots k$ lautet daher:

$$\mathfrak{M}(a, b \ldots k) = \sum_{t=1}^{a} \left\{ t . \chi\left|\frac{a}{t}\right| \chi\left|\frac{b}{t}\right| \ldots \chi\left|\frac{k}{t}\right| . \prod_{n=2}^{a} \left[1 - \chi\left|\frac{a}{nt}\right| \chi\left|\frac{b}{nt}\right| \ldots \ldots \chi\left|\frac{k}{nt}\right|\right]\right\} \quad 36)$$

Für nur ungerade Zalen wird sich diese Formel insofern einfacher gestalten, als dann

$$\chi\left(\frac{m}{a}\right) = \frac{\sin m\pi}{\sin \frac{m\pi}{n}}$$

gesetzt werden kann.

19. Zalen, welche der Summe ihrer Teiler (die Zalen selbst ausgenommen) gleich sind, wurden bekanntlich von älteren Mathematikern vollkommen genannt.

Eine allgemeine Gleichung für solche Zalen s kann leicht mit Anwendung der Formeln 13) und 14) gewonnnen werden. Es gilt nämlich:

a) bei geradem s:

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{s-1} \frac{\sin s\pi}{\sin \frac{s\pi}{n}} \sum_{n=2.4\ldots}^{s} \frac{\sin s\pi}{\sin \frac{s\pi}{n}} \cos \frac{s\pi}{n} = 2z \qquad 37)$$

b) bei ungeradem z:

$$\sum_{n=1.3.5\ldots}^{s} \frac{\sin s\pi}{\sin \frac{s\pi}{n}} = 2s \qquad 38)$$

Ebenso leicht liessen sich Formeln für die sogenannten amicablen Zalen aufstellen.

Brünn, im October 1889.

V.

Zur Theorie der höheren Congruenzen.

Von

Franz Rogel.

Unter den zum Fermat'schen Satze führenden Entwickelungen zeichnet sich jene, welche sich auf den binomischen Satz stützt, darum besonders aus, weil sie einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig ist.

Verschieden von dem gradatimen Vorgehen Lejeune-Dirichlet's (Vorlesungen über Zalentheorie S. 40) soll im Folgenden mit Hilfe des polynomischen Satzes eine höhere Congruenz aufgestellt werden, welche als speciellen Fall obigen Satz enthält.

Es wird sich hiebei auf algebraischem Wege die tiefere Begründung der Tatsache ergeben, dass die Congruenz

$$n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

nur für durch die Primzal p nicht teilbare Zalen bestehen kann.

Seien nun $a, b, c \ldots k\ n$ ganze Zalen, so ist

$$(a+b+c \ldots k)^p = \Sigma \binom{p}{\alpha}\binom{p-\alpha}{\beta}\binom{p-\alpha-\beta}{\gamma} \ldots a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\varkappa =$$

$$= \Sigma \frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma! \ldots \varkappa!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots k^\varkappa$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\varkappa = p$$

Werden die Glieder so zu Gruppen vereinigt, dass alle, welche denselben höchsten Exponenten tragen in eine und dieselbe Gruppe kommen, und zwar die mit dem Exponenten-Maximum p in die erste,

... die mit dem Maximum r in die $(p-r+1)$te u. s. w. und wird gleichzeitig der allen Individuen einer und derselben Gruppe, z. B. der $(p-r+1)$ten gemeinschaftliche Factor $\binom{p}{r}$ herausgehoben, so ergiebt sich:

$$(a+b+c\ldots+k)^p = (a^p+\ldots+k^p)+\binom{p}{p-1}(a^{p-1}b\ldots)$$
$$+\binom{p}{p-2}\left[\binom{2}{2}(a^{p-2}b^2+\ldots)+\binom{2}{1}\binom{1}{1}(a^{p-2}bc\ldots)\right]$$
$$+\binom{p}{p-3}\left[\binom{3}{3}(a^{p-3}b^3\ldots)+\binom{3}{2}\binom{1}{1}(a^{p-3}b^2c\ldots)\right.$$
$$\left.+\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}(a^{d-3}bcd\ldots)\right]\ldots$$
$$\ldots+\binom{p}{\frac{p+1}{2}}\left[\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{2}}\left(a^{\frac{p+1}{2}}b^{\frac{p-1}{2}}\ldots\right)\right] \qquad 1]$$

Diese nach fallenden Potenzen der Grössen a, b, $c\ldots k$ geordnete Entwicklung lässt deutlich erkennen, dass irgend eine Gruppe mit dem Coefficienten $\binom{p}{q}$, charakterisirt durch den allen Gliedern gemeinsamen höchsten Exponenten $p-q$ selbst eine polynomische Entwicklung ist, wenn

$$q \leqq \frac{p+1}{2}$$

ist. Die Exponenten der Elemente eines jeden Gliedes einer Gruppe mit Ausschluss des höchsten $p-q$ werden erhalten, wenn die Zal q aus $n-1$ gleichen oder ungleichen Zalen der Reihe 0, 1, 2 ... q auf jede mögliche Weise zusammengesetzt wird. Eine einzelne Gruppe kann demnach bei einem

$$q \leqq \frac{p+1}{2}$$

auch auf die Art entstanden gedacht werden, dass die $n-1$ gliedrige Summe $b+c\ldots+k$ zur $q$ten Potenz erhoben, mit a^{x-q} multiplicirt und schliesslich a mit jedem der $n-1$ andern Elemente b, $c\ldots k$ vertauscht wird, was für jedes Glied

$$\binom{n}{n-1} = n$$

Versetzungen giebt. Da ferner die Anzal der Glieder von $(b + c \ldots k)^q$ durch die Substitution

$$b = c = \ldots = k = 1$$

erhalten wird, so ist dieselbe

$$= (n-1)^q$$

mithin die Anzal aller Glieder der $(q+1)$ten Gruppe

$$= n(n-1)^q$$

Dies trifft bei allen späteren Gruppen, wo das Elementen-Maximum unter $\frac{p+1}{2}$ sinkt, nicht mehr zu. Beispielsweise wird in der $\left(\frac{p+1}{2}+r\right)$ten Gruppe mit dem Maximum $\frac{p+1}{2}-s$ das Glied

$$a^{\frac{p+1}{2}-s} \; b^{\frac{p-1}{2}+r}$$

weil $\frac{p-1}{2}+r > \frac{p+1}{2}-r$ ist, nicht vorkommen; dasselbe erschien bereits in der $\left(\frac{p+3}{2}-r\right)$ten Gruppe mit dem Maximum $\frac{p-1}{2}+r$. Die nachfolgenden Gruppen werden somit nur Bruchstücke polynomischer Entwicklungen sein; doch lässt sich von allen, bei welchen die Expenenten **n i c h t a l l e** gleich gross sind, behaupten, dass die Anzal ihrer Glieder ein Vielfaches von n ist, weil die Anzal der Variationen zu verschiedenen Classen, gebildet aus n Elementen, immer durch n teilbar ist.

In dem Falle eines durch p teilbaren n besteht eine einzige Gruppe mit nur einem einzigen Gliede

$$a^{\frac{n}{p}} b^{\frac{n}{p}} c^{\frac{n}{p}} \ldots k^{\frac{n}{p}}$$

deshalb ist die Gliederanzal aller Gruppen von der $\frac{p+3}{2}$ten bis zur letzten nicht durch n teilbar.

Wird

$$a = b = c = \ldots = k = 1$$

gesetzt, so ist dem Gesagten zu folge in jedem Falle:

$$n^p = n + \binom{p}{2} n(n-1) + \binom{p}{2} n(n-1)^2 + \dots + \binom{p}{\frac{p-1}{2}} n(n-1)^{\frac{p-1}{2}} + R \qquad 2]$$

wenn jedoch n kein Vielfaches von p ist:

$$n^{p-1} = 1 + \binom{p}{1}(n-1) + \binom{p}{2}(n-1)^2 + \dots + \binom{p}{\frac{p-1}{2}}(n-1)^{\frac{p-1}{2}} + R' \qquad 3]$$

wo

$$R = nR'$$

aus der Vereinigung aller Glieder

$$\frac{p!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\dots\,\varkappa!} a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots k^\varkappa$$

bei welchen keiner der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma \dots \varkappa$ die Grösse $\frac{p-1}{2}$ übersteigt, hervorgieng. Demnach wird jeder Polynomial-Coefficient in R sämtliche Primzalen $< p+1$ und $> \frac{p-1}{2}$ enthalten müssen.

Wenn

$$p_r = p$$

die $r$te Primzal ($p_1 = 1$), p_k die kleinste Primzal noch grösser als $\frac{p-1}{2}$ und

$$P = p_r . p_{r-1} \dots p_{k+1} p_k$$

ist, so besteht demzufolge unter Voraussetzung eines durch p nicht teilbaren n die Congruenz:

$$n^{p-1} \equiv 1 + \binom{p}{1}(n-1) + \binom{p}{2}(n-1)^2 + \dots + \binom{p}{\frac{p-1}{2}}(n-1)^{\frac{p-1}{2}} \mod P \qquad 4]$$

Wird nur der Teiler

$$p_r = p$$

von F als Modul angenommen, so entfallen alle Glieder der rechten Seite vom zweiten angefangen, und es geht Fermat's Satz

$$n^{p-1} \equiv 1 \bmod p \text{ hervor.}$$

Im allgemeinen lassen sich $r-k+1$ Congruenzen mit den Moduli:

$$\begin{array}{l} p_r \\ p_r \cdot p_{r-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_r \cdot p_{r-1} \ldots p_{k+1} \cdot p_k = P \end{array}$$

bilden.

Für ein

$$p_{r-1} = p-2 \quad \text{ist}$$

$$n^{p-1} \equiv 1 + \binom{p}{1}(n-1) + \binom{p}{2}(n-1)^2 \bmod p(p-2)$$

oder

$$n^{p-1} \equiv \binom{p}{2} n^2 + \binom{p-1}{2} \bmod p\,(p-2) \qquad 5]$$

Bedeutet q eine zwischen $\frac{p-1}{2}$ und $p+1$ liegende Primzal, so gilt die Congruenz 4] auch für das Product $(p_r \cdot p_{r-1} \ldots q)$ als Modul. Alle durch letzteren teilbaren Glieder mit den Coefficienten

$$\binom{p}{p-q+1}, \quad \binom{p}{p-q+2} \cdots \binom{p}{\frac{p-1}{2}}$$

auslassend, entsteht:

$$n^{p-1} - \binom{p}{p-q}(n-1)^{p-q} - \binom{p}{p-q-1}(n-1)^{p-q-1} \ldots$$
$$\ldots - \binom{p}{1}(n-1) - 1 \equiv 0 \bmod (p \ldots q)$$

oder

$$n^{p-1} - \sum_{m=q}^{p} \binom{p}{p-m}(n-1)^{p-m} \equiv 0\,; \quad p \geqq q \geqq \frac{p+1}{2}$$

nach fallenden Potenzen von n geordnet, ist

$$n^{p-1} - \binom{p}{p-q} n^{p-q} + \left[\binom{p}{p-q}\binom{p-q}{p-q-1}\right.$$
$$\left. - \binom{p}{p-q-1}\binom{p-q-1}{p-q-1}\right] n^{p-q-1} - \left[\binom{p}{p-q}\binom{p-q}{p-q-2}\right.$$

$$\binom{p}{p-q-1}\binom{p-q-1}{p-q-2}+\binom{p}{p-q-2}\binom{p-q-2}{p-q-2}\Big]n^{p-q-2}\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-q-m-1}\Big[\binom{p}{p-q}\binom{p-q}{m}$$

$$-\binom{p}{p-q-1}\binom{p-q-1}{m}+\binom{p}{p-q-2}\binom{p-q-2}{m}$$

$$\ldots(-1)^{p-q-m}\binom{p}{m}\binom{m}{m}\Big]n^{m}\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-q}\Big[\binom{p}{p-q}\binom{p-q}{1}$$

$$-\binom{p}{p-q-1}\binom{p-q-1}{1}\ldots+\binom{p}{2}\binom{2}{1}-\binom{p}{1}\binom{1}{1}\Big]n$$

$$+(-1)^{p-q-1}\Big[\binom{p}{p-q}-\binom{p}{p-q-1}\ldots+$$

$$+\binom{p}{2}-\binom{p}{1}+\binom{p}{0}\Big]\equiv 0 \bmod (p\ldots q) \qquad 6]$$

Die hier als Coefficienten auftretenden Reihen lassen sich mit Hilfe der allgemeinen Formel

$$\binom{p}{p-q}\binom{p-q}{m}-\binom{p}{p-q-1}\binom{p-q-1}{m}\ldots$$

$$+(-1)^{n-q-m}\binom{p}{m}\binom{m}{m}=\binom{p}{m}\binom{p-m-1}{p-q-m} \qquad 6^*]$$

wenn

$$m=p-q,\quad p-q-1\quad\ldots\quad 2,\ 1,\ 0$$

gesetzt wird, summiren; es ist dann:

$$n^{p-1}-\binom{p}{p-q}\binom{q-1}{0}n^{p-q}+\binom{p}{p-q-1}\binom{q}{1}n^{p-q-1}\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p-q}\binom{p}{1}\binom{p-2}{p-q-1}n+(-1)^{p+q+1}\binom{p}{0}\binom{p-1}{p-q}\equiv 0$$

$$\bmod \{p\ldots q) \qquad 7]$$

wofür auch kürzer geschrieben werden kann:

$$n^{p-1}+\sum_{m=q}^{p}(-1)^{m-q}\binom{p}{m}\binom{m-1}{m-q}n^{p-m}\equiv 0 \bmod (p\ldots q)$$

$$p\geqq q\geqq\frac{p+1}{2} \qquad 7']$$

Die Formel 6] gilt für **jede** ganze Zal q, also auch für

$$q=\frac{p+1}{2}$$

welche Einsetzung eine zur Bestimmung der Coefficienten der nach fallenden Potenzen von n zu ordnenden Congruenz 4] dienliche Formel ergäbe. Einfacher geht die auf die gewünschte Weise zu modificirende Congruenz unmittelbar aus 7] durch obige Substitution

$$q = \frac{p+1}{2}$$

bei gleichzeitiger Aenderung des Modul in P hervor:

$$n^{p-1} - \sum_{\frac{p+1}{2}}^{p} (-1)^{m-\frac{p+1}{2}} \binom{p}{m} \binom{m-1}{m-\frac{p+1}{2}} n^{p-m} \equiv 0 \bmod P \qquad 8]$$

Ein näheres Eingehen in die Natur dieser Coefficienten führt zu einer weiteren wesentlichen Vereinfachung dieses Ausdruckes.

Da nämlich

$$\binom{p}{p-m}\binom{m-1}{m-\frac{p+1}{2}} = \frac{p(p-1)\ldots(m+1).(m-1)\ldots\frac{p+1}{2}}{(p-m)!\left(m-\frac{p+1}{2}\right)!}$$

$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{p(p-1)\ldots\frac{p+3}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}{(p-m)!\left(m-\frac{p+1}{2}\right)!}$$

ist, so enthält dieser stets ganzzalige Coefficient den Modul P immer dann, wenn m eine zusammengesetzte Zal ist. Aus diesem Grunde können alle jene Glieder in 7] und 8], in welchen m keine Primzal ist, einfach weggelassen werden; die genannten Congruenzen nehmen in Folge dessen folgende Formen an:

$$n^{p-1} - \sum_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}}^{p} \binom{p}{p-\mathfrak{p}} \binom{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-q} n^{p-\mathfrak{p}} \equiv 0 \bmod (p_r \ldots q) \qquad 7']$$

$$n^{p-1} - \sum_{\mathfrak{p}=p_k}^{p} \binom{p}{p-\mathfrak{p}} \binom{\mathfrak{p}-1}{\mathfrak{p}-p_k} n^{p-\mathfrak{p}} \equiv 0 \bmod P \ldots \qquad 8']$$

Die veränderliche $\mathfrak{p}$ hat hierin alle Primzalenwerte von p_k bzhw. q bis $p_r = p$ anzunehmen.

Die Congruenzen 8], 7'] und 8'] gelten offenbar auch für den Modul p, vereinfachen sich aber durch Auslassung aller durch p teilbaren Glieder; es bleibt:

$$u^{p-1}-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}\equiv 0 \bmod p$$

nun ist

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)(-2)\ldots\left(-\frac{p-1}{2}\right)\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)! \bmod p$$

daher auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)(p-2)\ldots\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\equiv\left(\frac{p-1}{2}\right)! \bmod p$$

oder

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{(p-1)(p-2)\ldots\frac{p+1}{2}}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}$$

$$=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\binom{p-1}{\frac{p-1}{2}}\equiv 1 \bmod p$$

Aus 7] entsteht

$$u^{p-1}-\binom{p-1}{p-q}\equiv 0$$

da $p-q$ gerade ist, folgt

$$(-1)(-2)\ldots[-(p-q)]\equiv(p-q)! \bmod p$$

daher auch

$$(p-1)(p-2)\ldots(q+1)q\equiv(p-q)!$$

somit

$$\binom{p-1}{p-q}\equiv 1 \bmod q$$

und weil q auch des Wertes p_1 fähig ist

$$\binom{p-1}{p-p_1}=1 \bmod p$$

In allen Fällen geht Fermat's Satz aus den allgemeinen Congruenzen 8], 7'] und 8'] hervor, wenn p als Modul angenommen wird.

Derselbe kann nur für durch p **nicht** teilbare u gelten, weil wie schon bemerkt, die ganze Function R nur unter dieser Bedingung durch u teilbar ist, woraus die Möglichkeit entsteht, die Congruenz durch Division mit u auf den Grad $p-1$ zu bringen.

Aus der Gleichung 1] liessen sich noch Congruenzen für Moduli ableiten, welche ausser den Primzalen von $p_r = p$ bis p_k noch niedrigere Primzalen $p_{k-1}, p_{k-2} \ldots$ als Factoren enthielten, sich aber nicht mehr vollständig nach Potenzen von $n-1$ ordnen, sich überhaupt nicht übersichtlich darstellen liessen. Bei Inanspruchnahme sämtlicher Glieder von 1) entstünde eine unbrauchbare Identität.

Da den gefundenen Congruenzen von allen durch p nicht teilbaren Zalen Genüge geleistet wird, so besteht das in Bezug auf den Modul P vollständige System incongruenter Wurzeln aus den $P - \frac{P}{p}$ Zalen

$$a + bp, \quad \begin{pmatrix} a = 1, 2, 3 \ \ldots \ p-1 \\ b = 0, 1, 2 \ \ldots \ \frac{P}{p} - 1 \end{pmatrix}$$

Die Frage nach den Wurzelfactoren der genannten Congruenzen erledigt sich in einfacher Weise.

Die Congruenz

$$\frac{P}{p} n - a \frac{P}{p} \equiv 0 \mod P$$

hat die $\frac{P}{p}$ incongruenten Wurzeln

$$a,\ a+p,\ a+2p \ \ldots \ a + \left(\frac{P}{p} - 1\right) p$$

Erhält a nach und nach die Werte $1, 2, 3 \ldots p-1$, so entstehen $p-1$ Congruenzen ersten Grades; das System ihrer sämtlichen von einander verschiedenen incongruenten Wurzeln deckt sich mit obigem System $a + bp$ vollständig, daher hat das Product dieser $p-1$ Congruenzen

$$\left(\frac{P}{p} n - 1 \frac{P}{p}\right)\left(\frac{P}{p} n - 2 \frac{P}{p}\right) \ldots \left(\frac{P}{p} n - \overline{p-1}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{P}{p}\right)^{p-1} (n-1)(n-2) \ldots (n - \overline{p-1}) \equiv 0 \mod P \qquad 9]$$

dieselben Wurzeln als 7], 8] und 8'].

Durch Multiplication mit $\frac{P}{p}$ entsteht wegen

$$\left(\frac{P}{p}\right)^p \equiv \frac{P}{p} \mod P$$

die einfachere Form

$$\frac{P}{p}(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{p-1})\equiv 0 \mod P$$

welche nicht weiter reducirbar ist, weil die Congruenz

$$x\frac{P}{p}\equiv 1 \mod P$$

unmöglich ist.

Zu demselben Ergebniss führt die Benutzung der bekannten Congruenz

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{p-1})\equiv 0 \mod p$$

wenn beide Seiten und der Modul mit $\frac{P}{p}$ multiplicirt werden.

Schliesslich sei erwähnt, dass aus dem Fermat'schen Satze sich eine Congruenz $p-1$ ten Grades mit dem Modul P ableiten lässt, welche dieselben Potenzen von n enthält wie 8′].

Es ist nämlich

$$n^{p-2}\equiv 1 \mod p$$

daher

$$\frac{P}{p}n^{p-1}\equiv\frac{P}{p} \mod P$$

ferner

$$n^{p_k-1}\equiv 1 \mod p_k$$

oder

$$\frac{P}{p_k}n^{p_k-1}\equiv\frac{P}{p_k} \mod p$$

was mit n^{p-p_k} multiplicirt

$$\frac{P}{p_k}n^{p-1}\equiv\frac{P}{p_k} \mod p.$$

giebt (jedoch nur für durch p_k nicht teilbare Zalen n giltig). Durch Addition der Congruenzen

$$\frac{P}{p_r}n^{p-1}\equiv\frac{P}{p_r} \mod P$$

$$\frac{P}{p_{r-1}}n^{p-1}\equiv\frac{P}{p_{r-1}}n^{p-p_r} \mod P$$

$$\frac{P}{p_{r-2}} n^{p-1} \equiv \frac{P}{p_{r-2}} n^{p-p_k+1} \mod P$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P}{p_k} n^{p-1} \equiv \frac{P}{p_r} n^{p-p_k} \mod p$$

entsteht:

$$\sum_{\mathfrak{p}=p_k}^{p_r} \frac{P}{\mathfrak{p}} \cdot n^{p-1} - \sum_{\mathfrak{p}=p_1}^{p_r} \frac{P}{\mathfrak{p}} n^{p-\mathfrak{p}} \equiv 0; \mod P \qquad 10]$$

eine Congruenz, welche $P(P)$ incongruente Wurzeln hat, welche zu P relativ prim sind.

Brünn, 12. Juli 1890.

VI.

Miscellen.

Ueber den durch die Rotation der Erde bewirkten Seitendruck fliessender Gewässer.

Es ist behauptet worden, dass in Folge der Rotation der Erde ein Seitendruck der fliessender Gewässer gegen ihre Ränder stattfinde, welcher bewirke, dass die Ufer, gegen welche der Druck gerichtet ist, sofern sie diesem nachgeben können, sich im Laufe der Zeit verschieben.

Dieser Druck wird durch die Differenz der in verschiedenen Breiten verschiedenen seitlichen Geschwindigkeiten der Erdörter hervorgebracht, welcher unter Annahme einfacher Stromverhältnisse sich berechnen lässt, was wir im Folgenden versuchen wollen.

Wir legen zunächst einen Strom von gleicher Breite und Tiefe also etwa einen Canal mit annähernd gleichförmiger Geschwindigkeit nördlicher Richtung der Rechnung zu Grunde.

Es sei a der Radius und ω die Winkelgeschwindigkeit der Erde. φ die variabele geographische Breite eines Stromteilchens dm in seiner Bewegung, φ_1 und φ_2 die Breite des angenommenen Stromanfanges und Endes; s sei endlich die Stromlänge, q sein Querschnitt und s das Gewicht der Volumeneinheit des Wassers.

Die östliche Geschwindigkeit eines Punktes unterm Aequator ist $a\omega$, die in der Breite φ vom Halbmesser r gleich

$$r\omega = a\cos\varphi . \omega$$

daher die Differenz beider

$$= a\omega(1 - \cos\varphi)$$

oder allgemeiner für die Breiten φ_0 und φ gleich

$$a\omega(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

welche, wenn die durch sie hervorgerufene Kraft z. B. durch den Widerstand des Uferrandes eines Flusses in ihrer Bewegung gehindert wird, einen Druck und demzufolge eine Reibung auf das entsprechende Ufer ausübt, welcher dieser Kraft und der Wassermasse $q\varepsilon$ für die Einheit ihrer Länge proportional ist.

Da die seitliche Geschwindigkeit die des Flusses im allgemeinen weit übertrifft, so wird die Resultirende beider fast nahezu mit der Richtung der erstern zusammenfallen.

Der Druck und die daraus hervorgerufene Reibung R der Strommassen gegen das Ufer verursachen die Auflösung und allmälige Zerstörung des Ostrandes, speciell der nördlich fliessenden Gewässer, und ist für jede Wasserschicht dm, welche zu dieser Veränderung des Strombettes beiträgt, für die Länge ihres Weges zu berechnen, und es wird die Arbeitsgrösse dieses Stromelements durch das Integral

$$dP = dm\int R\,ds$$

ausgedrückt. Die Gesamtwirkung des Stromes ist daher

$$P = \int dm \int R\,ds$$

welches Doppelintegral innerhalb bestimmter Grenzen zu integriren ist

Es ist noch anzugeben, für welchen Zeitraum diese Reibungs arbeiten berechnet werden sollen.

Wir betrachten zunächst den Strom als ein Ganzes von bestimmter Länge und bestimmen für diesen abgeschlossenen Teil der Grösse des Reibungswiderstandes P_1, welcher innerhalb der entsprechenden Stromzeit T von der abfliessenden Wassermenge geleistet wird.

Dieser Wirkung folgt eine zweite P_2 der zufliessenden Wassermenge in derselben Zeit T, so dass also die Gesamtwirkung in der Summe

$$P_1 + P_2 = P$$

dargestellt ist. Wegen

$$R = A(\cos\varphi_0 - \cos\varphi), \quad ds = a\,d\varphi$$

ist die Reibungsarbeit des von φ nach φ_1 abfliessenden Wasserteilchens dm im Integral

$$\int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

von φ bis φ_1 zu erstrecken, und da gemäss unserer Annahme nördlicher Richtung dm proportional $a\,d\varphi$ ist, so wird die entsprechende Arbeit für die Gesamtreibung des ausfliessenden Stromteils in dem Integral

$$P_1 = A \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{\varphi}^{\varphi_1} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

erhalten sein.

Wird integrirt, so folgt

$$P_1 = A(\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \cos\varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0)\sin\varphi_1 + \cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)$$

Um nun noch die Reibungsarbeit des zufliessenden gleich langen Stromteils zu finden, haben wir im ersten Integral

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

die Grenzen von φ_0 bis φ zu nehmen und alsdann das allgemeine Arbeitsintegral

$$P_2 = A \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

über den ganzen Stromlauf zu erstrecken.

Die Integration ergiebt

$$P_2 - A(\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0)^2 \cos\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0)\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0 + \cos\varphi_1)$$

Diese beiden Arbeiten, welche das rechte Ufer angreifen, sind einander nicht gleich, wie das auch selbstverständlich ist; vielmehr übertrifft die Reibungsarbeit des ausfliessenden Stromteils die des einfliessenden um

$$P_1 - P_2 = 2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) - (\varphi_1 - \varphi_0)(\sin\varphi_0 + \sin\varphi_1)$$

Wollte man $P_1 = P_2$ setzen, so wäre die Bedingungsgleichung

$$2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1) = (\varphi_1 - \varphi_0)(\sin\varphi_0 + \sin\varphi_1)$$

zu erfüllen, woraus die transcendente Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

folgen würde. Die Wurzeln der Gleichung $u = \operatorname{tg} u$ sind ausser $u = 0$ noch $u = 257^0\ 27'\ 12''$ etc., fallen demnach ausserhalb des Bereiches unserer Rechnung.

Die Gesamtarbeit nun, welche von dem ununterbrochen fliessenden Strom zwischen den Grenzen φ_0 und φ_1 innerhalb der Zeit T geleistet wird, ist demnach durch $P_1 + P_2$ oder durch das Integral

$$P = A \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\, d\varphi$$

ausgedrückt und dieses ist

$$P = A((\varphi_1 - \varphi_0)^2 \cos\varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0)(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0))$$

oder nach Einführung der Stromlänge $s = a(\varphi_1 - \varphi_0)$

$$P = \frac{s^2}{a^2}\cos\varphi_0 - \frac{s}{a}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0)$$

Um zu sehen, in welchem Verhältniss die Reibungsarbeiten für verschiedene Stromlängen stehen, setzen wir für einen zweiten Strom $s' = ns$, also eine $n$fache Länge des ersten voraus, verlegen aber der Einfachheit wegen den Stromanfang beider in den Aequator, wodurch $\varphi_n = n\varphi$ wird, dann ist

$$\frac{P_n}{P} = n^2 \frac{1 - \dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}}{1 - \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}} \quad \text{also} \quad > n^2$$

Die Wirkungsverhältnisse beider Ströme stehen also in noch grösserem als dem quadratischen Verhältnisse ihrer Längen.

Will man die Reibungsarbeiten Q für eine grössere Zeitdauer ihrer Wirksamkeit berehhnen, so kann man setzen

$$P : Q = T : t, \quad \text{also} \quad Q = \frac{t}{T} P$$

$$Q = \frac{At}{T}\left(\frac{s^2}{a^2}\cos\varphi_0 - \frac{s}{a}(\sin\psi_0 - \sin\varphi)\right)$$

und führen wir hierin die mittlere Stromgeschwindigkeit v ein, so ist wegen $s = vT$

$$Q = \frac{A}{a}\, vt \left(\frac{s}{a}\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 - \sin\varphi_1\right)$$

Die auf Zerstörung des rechten Ufers durch die Erdrotation verursachten Reibungsarbeiten nördlich fliessender Ströme sind demnach der darauf verwendeten Zeit und der flüssigen Geschwindigkeit proportional.

In demselben Masse also, wie die mittlere Geschwindigkeit wächst, nimmt die Grösse der Reibungsarbeit zu, während für variabele Stromlängen nicht in demselben Verhältniss proportionale Wirkungen erfolgen, da dieselben auch von der geographischen Breite ihrer Begrenzungen abhangen.

Die Voraussetzung rein nördlich oder südlich fliessender Ströme findet in der Natur nicht statt. Die obigen Ableitungen gelten also nur für einen idealen Fall. Um nun auch für Ströme veränderlicher Richtung die bezüglichen Integrale aufzustellen, wollen wir zuerst wieder die Arbeit eines Massenteilchens dm für die Dauer seiner Wirksamkeit bestimmen.

Die Wirkung der Kraft $A(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$ ist stets nach Osten gerichtet. Weicht nun die Richtung des Stromteilchens ds um den Winkel τ von dieser östlichen Richtung ab, so ist die Elementararbeit des Massenteilchens dm für die Verschiebung ds proportional $R\,dm\,ds$, wo R als Componente der Kraft normal gegen das entsprechende Ufer proportional dem Ausdruck $(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,dm\,ds \sin\tau$ wirkt.

Die Reibungsarbeit von dm für eine unbestimmte Stromstrecke ist demnach $A\,dm \int (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\sin\tau\,ds$. Nun ist aber

$$ds \sin\tau = a\,d\varphi$$

also die Arbeit dieses Stromteichens dm gleich

$$A \int (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

woraus folgt, dass sie unabhängig von der Stromlänge ist, sofern letztere nur die festen Grenzen φ_0 und φ_1 behält. Der Grund davon ist übrigens leicht einzusehen. Denn nimmt der Strom in seiner veränderlichen Richtung beispielsweise einmal eine südliche Richtung an, so findet innerhalb dieser Strecke ein Druck auf das rechte Ufer nicht mehr statt, und die Wirkung des jetzt auf das linke Ufer einwirkenden Stromes ist für das rechte gleich null. Lassen wir den Strom wieder zu seinem Ursprung oder zur Breite φ_0 zurückkehren, so hat er für das linke Ufer dieselbe Arbeit, wie für das rechte geleistet.

Man kann daher sagen, dass die Reibungsarbeit des Strom-

teilchens dm zwischen zwei festen Breitenkreisen stets dieselbe bleibt, welche Richtung der Strom auch nehmen mag. Die Parallelkreise der Erde sind also Niveaulinien gleicher Reibungsarbeit fliessender Stromteile und stehen daher in Analogie mit den Niveaulinien der Schwere.

Die gesamte Reibungsgrösse des Stromes ist nun

$$P = A \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\cos\varphi_0 - \cos\varphi) \;.\; \int_{s_0}^{s_1} dm$$

und da dm als Stromelement unter der Bedingung continuirlichen Zusammenhangs dem Differential ds proportional gesetzt werden kann, auch

$$P = A(s_1 - s_0)\left((\varphi_1 - \varphi_0)\cos\varphi_0 - \sin\varphi_1 + \sin\varphi_0\right)$$

Die Arbeit der Reibung ist also der Stromlänge proportional, was unmittelbar einleuchtet, weil bei einer grössern Länge in demselben Verhältniss mehr Wassermassen ein und dieselbe Stelle passiren und darauf influiren müssen.

Indessen ist auch dieses Resultat noch als unvollständig zu betrachten, da in den Voraussetzungen keine Rücksicht auf das stetige Wachstum durch Zufluss genommen ist. Die Berechnung wird eine genauere sein, wenn man die im allgemeinen zulässige Annahme macht, dass das Wasser des Stromes sich stetig um eine seiner zurückgelegten Strecke proportionalen Menge vermehrt. Bei gleicher Tiefe h und der nunmehr variabeln Breite $b + ks$ ist das Volumen des Stromes von $s_0 = 0$ bis s proportional $h(b + \frac{1}{2}ks)s$, sein Differential $= h(b + ks)\,ds$, die hievon ausgeübte Reibungsgrösse gleich $h(b + ks)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,ds \sin\tau$, daher die Gesamtgrösse der Reibung

$$P = A \int_{s_0}^{s} ds \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (b + k(s - s_0))(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\,d\varphi$$

Wenn nun s als Function von φ bekannt ist, so wird die noch erfolgende Integration diese Arbeitsgrösse liefern.

Für einen rein nördlich oder südlich fliessenden Strom ist dieselbe leicht durchzuführen. Ebenso für die Loxodrome, bekannt als Curve gleicher Richtung gegen die sie durchschneidenden Meridiane, Für 2 unendlich nahe aufeinander folgende Meridiane, welche von dieser Curve das Bogendifferential abschneiden, hat man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

wo

$$dy = ds \cos\alpha = a\,d\varphi, \quad dx = r\,dh = a\cos\varphi\,dh, \quad dx = \operatorname{tg}\alpha\,dy$$

also

$$\cos\varphi\,dh = \operatorname{tg}\alpha\,d\varphi, \quad dh = \operatorname{tg}\alpha\frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \quad l = \operatorname{tg}\alpha\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

als einfachste Gleichung der Loxodrome.

Da für sie die Relation $\varphi = s.\cos\alpha$ stattfindet, so würde auch für den Fall, dass ein Strom eine Loxodrome beschriebe, die Integration seines Reibungsintegrals ebensowenig Schwierigkeiten machen, als die analoge eines Stromes nördlicher Richtung als Grenzfall derselben macht:

Für den letztern Fall würde man erhalten, wenn man setzt

$$\frac{ia}{l} = \varrho$$

$$P = Abs\begin{pmatrix}(\varphi_1 - \varphi_0)\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 - \sin\varphi_1 \\ + \varrho(\tfrac{1}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_0^2)\cos\varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0)(\varphi_0\cos\varphi_0 + \sin\varphi_1) \\ + \cos\varphi_0 - \cos\varphi_1)\end{pmatrix}$$

und dieser Ausdruck bedeutet also die Reibungsarbeit eines nach Norden hin sich stetig verbreiternden Stromes.

In den bisherigen Berechnungen haben wir immer stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass die wirksame Kraft $A(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$ in ihrer Stetigkeit keine Einbusse erleidet, eine Voraussetzung allerdings, die in Wirklichkeit nicht erfüllt ist. Denn, wenn z B. der Strom aus seiner nördlichen Richtung plötzlich in eine östliche odee westliche übergeht, so werden durch Druck oder Stoss der in ihrer Bewegungsrichtung plötzlich gehemmten Stromwasser gegen die Stromränder Verluste an lebendiger Kraft erfolgen, welche eine Discontinuität der Bewegung herbeiführen, vielleicht mit Ausnahme bei rein nördlich oder südlich fliessenden Gewässern. Daher können die bisherigen Entwickelungen nur für Ströme wenig wechselnder Richtung gelten und auch nur unter der weitern Bedingung, dass die Reibung keine nennenswerte Abnahme der Druckkräfte herbeiführt.

Da die Reibung im allgemeinen von der Geschwindigkeit der gleitenden Massen unabhängig ist, so haben wir in den obigen Rechnungen auf die veränderliche Geschwindigkeit des Stromes keine Rücksicht genommeh. Wollte man indes die aus der Reibung hervorgehende Verzögerung der Bewegung annähernd bestimmen, so wäre als negative Acceleration dieser Geschwindigkeit eine dem Druck

$dm(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\sin\tau$ proportionale Grösse in der Gleichung der lebendigen Kraft

$$\tfrac{1}{2}v^2 = -\int p\,ds$$

für p einzusetzen, woraus

$$v^2 = c^2 - 2k(\varphi\cos\varphi_0 - \sin\varphi)$$

folgt. Das Stromteilchen dm würde also in seinem wechselnden Laufe in allen Punkten gleicher geographischer Breite stets dieselbe Geschwindigkeit haben, entsprechend den gleichen Geschwindigkeiten in den Niveaulinien der Schwere.

Die vollständige Durchführung und Berechnung aller dieser Verhältnisse ist im Grunde eine Aufgabe der Hydrodynamik, unter welche auch die Bewegungsverhältnisse der grossen Meeresströmungen fallen dürften.

Gräfrath, Jan. 1889. E. Oekinghaus.

2.

Relation der Flächenwinkel des Tetraeders.

Da ein Tetraeder durch 6 Stücke bestimmt ist, unter denen wenigstens eine Lineargrösse sein muss, so können nicht mehr als 5 Winkel des Tetraeders unabhängig sein; folglich existirt zwischen den 6 Flächenwinkel eine Relation; diese ist zu ermitteln.

Die Flächenwinkel seien α, β, γ, δ, ε, ζ, und zwar sei die um 2R vermehrte Ecke

$$\left.\begin{aligned} A &= \beta+\gamma+\delta \\ B &= \gamma+\alpha+\varepsilon \\ C &= \alpha+\beta+\zeta \\ D &= \delta+\varepsilon+\zeta \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Die ebenen Winkel seien nach den Kanten der Flächenwinkel benannt, so dass

$$\text{Winkel } (\beta\gamma)+(\gamma\alpha)+(\alpha\beta) = 2\text{R}$$

also

$$\cos(\beta\gamma)+\cos[(\gamma\alpha)+(\alpha\beta)] = 0$$

ist. Dies gibt die Gleichung:

$$\cos^2(\beta\gamma)+\cos^2(\gamma\alpha)+\cos^2(\alpha\beta)+2\cos(\beta\gamma)\cos(\gamma\alpha)\cos(\alpha\beta) = 1$$

Drückt man die cos der ebenen Winkel in Flächenwinkeln aus und bezeichnet die cos von α, β, γ, δ, ε, ζ durch a, b, c, d, e, f, die sin durch a', b', c', d', e', f', so wird die Gleichung:

$$\left(\frac{d+bc}{b'c'}\right)^2+\left(\frac{e+ca}{c'a'}\right)^2+\left(\frac{f+ab}{a'b'}\right)^2$$
$$+2\frac{d+bc}{b'c'}\;\frac{e+ca}{c'a'}\;\frac{f+ab}{a'b'}=1$$

das ist, entwickelt:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-(a^2d^2+b^2e^2+c^2f^2)&\\ +2(bcd+cae+abf+def)&\\ +2(be\,.\,cf+cf\,.\,ad+ad\,.\,be)=1&\qquad (2)\end{aligned}$$

Diese Relation ist symmetrisch, sofern darin ad, be, cf unter sich, nicht aber abc mit def vertauschbar sind, das Tetraeder also dasselbe bleiben muss.

Sie ist 2. Grades in Bezug auf die 6 Cosinus der Flächenwinkel. Lautet sie, entwickelt nach f,

$$\varphi(f)\equiv Kf^2+2Lf+M=0 \qquad (3)$$

so ist die Discriminante:

$$Q^2=L^2-KM=(a^2+e^2-1+2aec+c^2)(b^2+d^2-1+2bdc+c^2)$$

Damit A und B reell sind, müssen $\beta+\gamma+\delta$ und $\gamma+\alpha+\varepsilon>2R$, also die 2 Factoren der Discriminante negativ sein. Unter dieser Bedingung ist f stets reell. Auch für positive Factoren würde man ein reelles f erhalten; doch entsprächen die 6 Flächenwinkel keinem reellen Tetraeder.

Die Bedingung für reelles B lässt sich schreiben:

$$(1-a^2)(1-c^2)-(ae-c)^2>0 \quad \text{oder:}$$
$$(a'c')^2\{1-\cos^2(ac)\cos^2(ec)\}>0$$

Sie ist also von selbst erfüllt, unter der Voraussetzung, dass die 3 Winkel, deren cos $=a, c, e$ sind, ein Teteaeder bilden, d. h. dass $\alpha+\gamma+\varepsilon>2R$ ist.

Ein gleiches gilt für b, c, d in Betreff des zweiten Factors. Es ist zu beweisen, dass auch das aus Gl. (3) resultirende

$$f=\frac{-L\pm Q}{K} \qquad (4)$$

die analogen Bedingungen in Betreff der Ecken C und D, nämlich

$$a^2 + b^2 + f^2 + 2abf - 1 < 0$$
$$d^2 + e^2 + f^2 + 2def - 1 < 0$$

erfüllt. Erstere lässt sich schreiben:

$$(a'b')^2 - (ab + f^2)^2 > 0$$

und nach Einsetzung des Wertes (4):

$$(a'b'K)^2 - (abK - L \pm Q)^2 > 0$$

das ist:

$$-a'b'K < abK - L \pm Q < a'b'K \quad \text{oder:}$$
$$L - abK - a'b'K < \pm Q < L - abK + a'b'K$$

Nun findet man:

$$L - abK = ab + de + (ae + bd)c - ab(1 - c^2)$$
$$= (ac + e)(bc + d) = a'b'c'^2 \cos(ac)\cos(bc)$$

demnach wird, wegen $K = c'^2$,

$$-a'b'K\{1 - \cos(ac)\cos(bc)\} < \pm Q < a'b'K\{1 + \cos(ac)\cos(bc)\}$$

Für das obere Zeichen ist die erste Ungleichung, für das untere die letzte von selbst erfüllt. Daher bleibt nur zu untersuchen, ob

$$Q < a'b'K\{1 \pm \cos(ae)\cos(bc)\}$$

das ist, wenn wir auf die Ausdrücke (4) zurückgehen, ob

$$Q < a'b'K \pm (L - abK) \quad \text{oder}$$
$$L^2 - KM < (L - abK \pm a'b'K)^2$$

ist. Dies entwickelt gibt:

$$0 < M + 2L(-ab \pm a'b') + K(-ab \pm a'b')^2$$
$$= \varphi(-ab \pm a'b')$$

Nun ist Gl. (2) identisch mit

$$\frac{\varphi(f)}{a'b'c'^2} = 0$$

Substituirt man daselbst $-ab + a'b'$ für f, wobei

$$\frac{f + ab}{a'b'} \text{ in } \pm 1$$

übergeht, so erhält man sofort:

$$\varphi(-ab \pm a'b') = \{(d + bc)a' | + (e + ac)b'\}^2 > 0$$

Wenn also a, b, c, d, e, f Cosinus reeller Winkel sind und die

Gl. (2) erfüllen, so entsprechen je 3, die kein Par Gegenwinkel enthalten, bedingungslos einer reellen Ecke, mithin alle zusammen einem reellen Tetraeder.

Es bleibt die Frage, ob unter Voraussetzung, dass 5 gegebene unter ihnen, a, b, c, d, e, Cosinus sind, d. h. zwischen 1 und -1 liegen, auch die resultirende sechste, f, diese Bedingung erfüllt?

Betrachten wir zuerst den Specialfall:

$$a = b = d = e = c$$

dann ergibt Gl. (2) nach Division durch $1+a$:

$$(1+f)\{(1-a)f-1+a+4a^2\} = 0$$

woraus (da $1+f > 0$):

$$f = 1 - \frac{4a^2}{1-a} \tag{5}$$

Wächst a von -1 bis 0, so wächst f von -1 bis 1; darüber hinaus nimmt es ab von 1 bis $-\infty$ und wird $= -1$ für $a = \frac{1}{2}$, das ist $a = \frac{1}{3}R$. Daraus geht hervor, dass das System der a, b, c, d, e engern Grenzen unterworfen ist, als der natürlichen Begrenzung zwischen -1 und 1, um ein reelles ζ zu ergeben. Wir müssen also der Auflösung (4) die Bedingung hinzufügen:

$$-1 < \frac{-L \pm Q}{K} < 1$$

Es ist mir nicht gelungen, ohne Unterscheidung übermässig vieler Fälle die Begrenzung des Systems explicit festzustellen.

Betrachtet man jetzt die Grösse der Ecken als gegeben, so fehlt noch eine Bestimmung für das Tetraeder. Zunächst ist nach den Gl. (1):

$$\left.\begin{aligned} \alpha - \delta &= \tfrac{1}{2}(-A+B+C-D) = 2\Delta \\ \beta - \varepsilon &= \tfrac{1}{2}(A-B+C-D) = 2E \\ \gamma - \zeta &= \tfrac{1}{2}(A+B-C-D) = 2Z \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$(\alpha+\delta)+(\beta+\varepsilon)+(\gamma+\zeta) = \tfrac{1}{2}(A+B+C+D) = 2\Theta \tag{7}$$

Man kennt also die Differenzen der Gegenflächenwinkel und die Summe ihrer Summen. Ist nun

$$A = B = C = D$$

so wird hiernach

$$\alpha = \delta; \qquad \beta = \varepsilon; \qquad \gamma = \zeta$$

Hiernach haben alle Ecken gleiche Flächenwinkel, mithin auch gleiche Seitenwinkel, und man hat den vom fünften Bestimmungsstück unabhängigen Satz:

„Sind die Ecken eines Tetraeders von gleicher Grösse, so sind „sie auch congruent; zugleich sind dann auch die Seiten des Tetra„eders congruent.“

Sei jetzt allgemein

$$\alpha+\delta=2\alpha_1;\quad \beta+\varepsilon=2\beta_1;\quad \gamma+\zeta=2\gamma_1$$
$$\cos\alpha_1=a_1;\quad \cos\beta_1=b_1;\quad \cos\gamma_1=c_1$$
$$\cos\Delta=D_1;\quad \cos E=E_1:\quad \cos Z=F_1$$

und die Sinus dieser Winkel durch einen Strich von den Cosinus unterschieden, so dass $S'=\sin\varphi$, wenn $S=\cos\varphi$. Dann hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\alpha_1+\Delta;\quad \beta=\beta_1+E:\quad \gamma=\gamma_1+Z\\ \delta=\alpha_1-\Delta;\quad \varepsilon=\beta_1-E;\quad \zeta=\gamma_1-Z\end{array}\right\}\tag{8}$$

Die einzigen Unbekannten sind nun noch verbunden durch Gl. (2). Diese lässt sich leicht umformen in

$$2-a^2d^2-a'^2d'^2-b^2e^2-b'^2e'^2-c^2f^2-c'^2f'^2$$
$$+(ad+be+cf)^2+2(bdc+aec+abf+def)=0\tag{9}$$

Führt man die Werte (8) ein, so lautet sie:

$$2-M+(a_1^2+b_1^2+c_1^2-L)^2+2(a_1^2a_1'^2+b_1^2b_1'^2+c_1^2c_1'^2)$$
$$+8Ka_1b_1c_1+8K'a_1'b_1'c_1'=0\tag{10}$$

wo

$$\left.\begin{array}{l}K=D_1E_1F_1;\quad K'=D_1'E_1'F_1'\\ L=D_1'^2+E_1'^2+F_1'^2\\ M=D_1^4+D_1'^4+E_1^4+E_1'^4+F_1^4+F_1'^4\end{array}\right\}\tag{11}$$

gesetzt ist.

Die Grössen a_1, b_1, c_1 werden ferner bestimmt durch Gl. (7), d. i.

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\Theta$$

oder, wenn $\cos\Theta=N$,

$$a_1b_1c_1-a_1b_1'c_1'-b_1c_1'a_1'-c_1a_1'b_1'=N$$

woraus nach Elimination der 3 irrationalen Factoren:

$$\begin{vmatrix} N - a_1 b_1 c_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 b_1'^2 c_1'^2 & N - a_1 b_1 c_1 & c_1 b_1'^2 & b_2 c_1'^2 \\ b_1 c_1'^2 a_1'^2 & c_1 a_1'^2 & N - a_1 b_1 c_1 & a_1 c_1'^2 \\ c_1 a_1'^2 b_1'^2 & b_1 a_1'^2 & a_1 b_1'^2 & N - a_1 b_1 c_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Entwickelt man die Determinante und bestimmt a_1, b_1, c_1 als die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - lx^2 + mx - n = 0 \tag{13}$$

so wird Gl. (12)

$$Un^2 + Vn + W = 0 \tag{14}$$

wo

$$U = 4$$
$$V = -4(N^3 + 2N^2 l - N(2 - l^2 + 2m) - 8l$$
$$W = N^4 - 2N^2(l^2 - 2m - 2m^2) + l^4 - 4l^2 m$$

Eliminirt man auch aus Gl. (10) die Irrationale, führt ebenso die Coefficienten von Gl. (13) ein, und entwickelt nach n, so kommt:

$$U_1 n^2 + V_1 n + W_1 = 0 \tag{15}$$

wo

$$U_1 = 64\{(K - l)^2 + K'^2\}$$
$$V_1 = 16(K - l)\{2 - M + (l^2 - 2m - L)^2 + 2(l^2 - 2m - l^4 + 4l^2 m - 2m^2)\} + 128K'^2 l$$
$$W_1 = \{2 - M + (l^2 - 2m - L)^2 + 2(l^2 - 2m - l^4 + 4l^2 m - 2m^2\}^2 - 64K'^2(1 - l^2 + 2m + m^2)$$

und nach Elimination von n zwischen den Gl. (14) und (15):

$$\begin{vmatrix} U & W \\ U_1 & W_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} U & V \\ U_1 & V_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V & W \\ V_1 & W_1 \end{vmatrix} \tag{16}$$

Hiernach gibt eine Gleichung 16ten Grades l in m und eine Gleichung 8ten Grades m in l. Das Resultat ist folgendes.

„Betrachtet man die Inhalte der Ecken (A, B, C, D) als con-„stant, die Summe der Cosinus der halben Summen der 3 Pare von „Gegenwinkeln (l) als unabhängig variabel, so bestimmt zuerst eine „Gleichung 8. Grades (16) m, dann eine Gleichung 2. Grades (14) „n, dann eine Gleichung 3. Grades (13) a_1, b_1. c_1, woraus endlich „nach den Formeln

$$a = a_1 D_1 - a_1' D_1'; \quad [d = a_1 D_1 + a_1' D_1'$$

„und den analogen für b, e, c, f die Cosinus aller 6 Flächenwinkel „als Functionen von l gefunden werden."

Da aus den Flächenwinkeln die Seitenwinkel, aus diesen die Verhältnisse aller Kanten hervorgehen, so istd durch a, b, c, d, e, f die Gestalt des Tetraeders bekannt.

Geht man vom regelmässsigen Tetraeder aus, wo

$$a = b = c = d = e = f = \tfrac{1}{3}$$

ist, deformirt dasselbe durch beliebige unendlich kleine Incremente, indem man für die genannten 6 Grössen substituirt

$$\tfrac{1}{3}(1+a), \quad \tfrac{1}{3}(1+b), \quad \tfrac{1}{3}(1+c), \quad \text{etc.}$$

und entwickelt Gl (2). welche nur Terme 1., 2., 3. und 4. Ordnung enthält, bis auf 2. Ordnung, so erhält man:

$$8(a+b+c+d+e+f)+(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2 = 0$$

Schliessen wir zuerst alle Variationen des Tetraeders aus, bei welchen gleichzeitig

$$a = d; \quad b = e; \quad c = f \tag{17}$$

ist, so ist $a+b+c+d+e+f$ negativ und 2. Ordnung, folglich vor der Deformation ein Maximum.

In dem Falle (17) findet man, dass die Terme 3. und 4. Ordnung mit verschwinden.

Mögen jetzt $a, b, c, d. e, f$ wieder ihre frühere Bedeutung haben, so dass

$$a = \cos\alpha; \quad b = \cos\beta; \quad c = \cos\gamma; \quad \text{etc.}$$

ist; dann hat sich ergeben:

$$\partial a+\partial b+\partial c+\partial d+\partial e+\partial f = 0$$

und zwar ist $a+b+c+d+e+f$ ein Maximum für das regelmässige Tetraeder, mis Ausschluss des Falles (17). Da aber

$$da = -a'\partial\alpha; \quad \partial b = -b'\partial\beta; \quad \partial c = -c'\partial\gamma; \quad \text{etc}$$

und

$$a' = b' = c' = d' = e' = f'$$

ist, so folgt auch:

$$d\alpha+\partial\beta+\partial\gamma+\partial\delta+\partial\varepsilon+\partial\zeta = 0$$

und zwar wird $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta = \tfrac{1}{2}(A+B+C+D)$ ein Minimum.

Der Ausnahmefall (17) bedeutet, dass die Ecken des Tetraeders congruent bleiben.

Das Resultat ist der Satz:

„Die Summe der Ecken eines Tetraeders ist für das regelmässige „ein Minimum, wenn bei der Veränderung die Ecken nicht congruent „bleiben.“

Wir betrachten nun insbesondere das Tetraeder von congruenten Ecken (oder gleichen Gegenflächenwinkeln).

Nach Elimination von d, e, f geht Gl. (2) über in

$$(a+b+c-1)\{(a+b+c+1)^2(a+b+c-1) \\ -4(a+b+c+1)(bc+ca+ab)+8abc\}=0 \tag{18}$$

Es bestätigt sich, dass wenn die Summe der Flächenwinkel ihren Wert wie beim regelmässigen Tetraeder behält, die Gleichung vermöge des Factors $a+b+c-1$ erfüllt bleibt.

Den Fall, wo sie durch Verschwinden des zweiten Factors erfüllt wird, übergehe ich.

Da jetzt

$$A=B=C=D$$

mithin jede Ecke ein Viertel der Eckensumme ist, so bietet sich die Frage dar, wie jede Ecke variirt, wenn zwei der durch die Relation

$$a+b+c=1$$

verbundenen 3 Grössen beliebig variiren. Aus ihr geht wieder die Frage hervor, bei welcher Relation zwischen diesen 2 Grössen die Ecke constant ist.

Betrachtet man erst a und b als unabhängig, so wird

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a}=-\frac{1}{a'};\quad \frac{\partial\beta}{\partial a}=0;\quad \frac{\partial\gamma}{\partial a}=\frac{1}{c'};\quad \frac{\partial A}{\partial a}=\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}$$

folglich bei analoger Bestimmung

$$\partial A=\left(\frac{1}{c'}-\frac{1}{a'}\right)\partial a+\left(\frac{1}{c'}-\frac{1}{b'}\right)\partial b$$

daher findet für constantes A die Differentialgleichung statt:

$$b'(a'-c')\partial a+a'(b'-c')\partial b=0$$

wo $c'^2=1-(1-a-b)^2=(a+b)(2-a-b)$. Diese bietet indes wegen ihrer complicirten Irrationalität wenig Aussicht auf Anwendung.

Setzt man hingegen

$$a+b+c=l;\quad bc+ca+ab=m;\quad abc=n$$
$$\cos A=N$$

so werden, da $l=1$ bekannt ist, a, b, c in 2 Grössen m,n dargestellt, und die obigen Fragen finden sich beide bereits in primitiver Form gelöst in der Gleichung (14)

$$Un^2+Vn+W=0$$

die erstere, indem N mittelst biquadratischer Gleichung in m und n ausgedrückt ist, die letztere für constantes N durch quadratische Gleichung, welche n als Function von m bestimmt.

R. Hoppe.

3.

Eine bemerkenswerte Identität.

Unter der Bedingung

$$0 \leqq x < 1$$

gelten die Entwickelungen

$$x=\frac{1^0}{1}y+\frac{2^1}{2!}y^2+\frac{3^2}{3!}y^3\ldots \qquad 1)$$

$$e^{ax}=1+\frac{a}{1}y+\frac{a(a+2)^1}{2!}y^2+\frac{a(a+3)^2}{3!}y^3\ldots \qquad 2)$$

$$y=xe^{-x} \quad \text{(Schlömilch Comp. II. 107)}$$

Wird

$$a=-1$$

genommen, und die so specialisirte Gleichung Nr. 2) mit Nr. 1) multiplicirt, so ist

$$xe^{-x}=y=\left[\frac{1^0}{1}y+\frac{2^1}{2!}y^2+\frac{3^2}{3!}y^3\ldots\right]\left[1-\frac{1}{1}y-\frac{1^1}{2!}y^2-\frac{2^2}{3!}y^3\ldots\right]$$

Nach dem Satz der unbestimmten Coefficienten ist dann

$$\frac{2^1}{2!}-\frac{1^2}{(1!)^2}=0$$

$$\frac{3^2}{3!}-\frac{2^1}{1!\,2!}-\frac{1^3}{1!\,2!}=0$$

$$\frac{4^3}{4!}-\frac{3^2}{1!\,3!}-\frac{1^1\,2^1}{2!\,2!}-\frac{2^2\,1^0}{3!\,1!}=0$$

$$\frac{5^4}{5!} - \frac{4^3}{4!\,1!} - \frac{3^2\,1^1}{3!\,2!} - \frac{2^1\,2^2}{2!\,3!} - \frac{1^0\,3^3}{1!\,4!} = 0$$

. . . .

$$\frac{n^{n-1}}{n!} - \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)!\,1!} - \frac{(n-2)^{n-3}}{(n-2)!} \cdot \frac{1^1}{2!} - \frac{(n-3)^{n-k}}{(n-3)!} \cdot \frac{2^2}{3!} - \frac{(n-4)^{n-5}}{(n-4)!} \cdot \frac{3^3}{4!} \cdots$$

$$\cdots - \frac{2^1}{2!}\,\frac{(n-3)^{n-3}}{(n-2)!} - \frac{1^0}{1!}\,\frac{(n-2)^{n-2}}{(n-1)!} = 0 \qquad 3)$$

oder weil

$$\frac{(n-1)^{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)^{n-3}}{(n-2)!} \cdots$$

ist, nach Multiplication mit $(n-1)!$ auch

$$n^{n-2} = \binom{n-1}{1}(n-1)^{n-3} + \binom{a-1}{2}(n-2)^{n-4}$$

$$+ \binom{n-1}{3}(n-3)^{n-5}\,2^2 + \ldots + \binom{n-1}{n-3}\,3^1(n-4)^{n-4}$$

$$+ \binom{n-1}{n-2}\,2^0(n-3)^{n-3} + \binom{n-1}{n-1}(n-2)^{n-2} \qquad 4)$$

$$= \sum_{r=2}^{r=n-1} \binom{n-1}{r}(n-r)^{n-r-2}(r-1)^{r-1}$$

oder $n+1$ statt n geschrieben

$$(n+1)^{n-1} = \sum_{r=1}^{v=n} \binom{n}{r}(n-r+1)^{n-r-1}(r-1)^{r-1} \qquad 5)$$

Brünn, September 1890.

Franz Rogel.

4.

Maximum der Ecken eines Tetraeders für den Fall ihrer Gleichheit.

Im vorigen Aufsatze (Misc. 2. Seite 102) ward der Fall, wo alle Ecken einander gleich sind, nur als der einzige betrachtet, auf welchen der Beweis, dass die Eckensumme des regelmässigen Tetraeders ein Minimum ist, keine Anwendung hat. Es blieb fraglich, ob sie ein Minimum, Maximum oder keins von beiden sei. Zur Ergänzung füge ich jetzt folgendes hinzu.

Sei

$$\cos\varkappa = \tfrac{1}{3}; \quad \sin\varkappa = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha = \delta = \varkappa + \alpha_1; \quad \beta = \varepsilon = \varkappa + \beta_1; \quad \gamma = \zeta = \varkappa + \gamma_1$$

und α_1, β_1, γ_1 unendlich klein; dann hat man bis auf 2. Ordnung:

$$a = \cos\alpha = \left(1 - \frac{\alpha_1^2}{2}\right)\cos\varkappa - \alpha_1 \sin\varkappa$$

und analoge Ausdrücke für b und c, woraus:

$$a + b + c - 1 = -\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{2}\cos\varkappa - (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\sin\varkappa$$

Gl. (18) wird erfüllt durch

$$a + b + c - 1 = 0$$

ferner ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 3\varkappa + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = A$$

folglich

$$\frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{6} + (A - 3\varkappa)\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

oder

$$A = 3\varkappa - \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}{4\sqrt{2}}$$

Da nun α_1, β_1, γ_1 nicht sämtlich null sein können, so ist $A = 3\varkappa$ ein Maximum, und der vervollständigte Satz lautet nun:

„Die Summe der Ecken des regelmässigen Tetraeders ist für „jede Veränderung, bei welcher sie einander gleich bleiben, ein „Maximum, für jede andre ein Minimum“. R. Hoppe.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Zehnter Teil. Zweites Heft.

(Mit 1 lithographirten Tafel.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1891.

VII.

Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche.

Von

Ulrich Bigler.

In meinen Vorlesungen über theoretische Optik behandelte ich im vergangenen Winter die Brenn- und Wellenlinie eines reflectirenden Kreises. Es gelang mir hiebei, beide Curven mit allen ihren Singularitäten für jede Lage des leuchtenden Punktes genau anzugeben und für besondere Formen derselben merkwürdige Eigenschaften abzuleiten. Ich hatte meine Arbeit schon vollendet, als man mich auf eine Arbeit des Hrn. Hamnet Holditsch über die Brennlinie aufmerksam machte. Dieser Aufsatz findet sich im 1. Bd. des Quarterly Journals Seite 93—111 unter dem Titel: On the caustic by reflection from a spherical surface und ist im Jahre 1857 verfasst worden. Was nun die Brennlinie betrifft, so kann ich diesem Aufsatze nicht viel Neues beifügen. Neu ist aber die Untersuchung über die Wellenlinie, von welcher in genannter Abhandlung kein Wort zu lesen ist, und die doch ebenso interessant erscheint, wie die Brennlinie. Zudem verfolge ich den Gegenstand auf einem ganz andern Wege als es Hr. Holditsch tut, so dass ich es gleichwol wage, meine ganze Arbeit im Zusammenhange der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Man denke sich im Raume einen leuchtenden Punkt. Durch denselben und den Mittelpunkt der reflectirenden Kugel wird ein Durchmesser bestimmt. Eine durch diese Gerade gelegte Ebene schneidet die Brenn- und Wellenfläche in 2 ebenen Curven, welche resp. Brenn- und Wellenlinie genannt werden. Wird nun die Schnittebene um den Durchmesser als Axe gedreht, so beschreiben diese Curven die zwei genannten Flächen. Im folgenden sollen nun die Brenn- und Wellenlinien einer nähern Betrachtung unterzogen werden.

I. Brennlinie eines reflectirenden Kreises.

§. 1. Ableitung der Gleichung der Brennlinie.

$ADCD$ sei ein Kreis mit dem Radius a. Der Mittelpunkt c desselben werde als Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems gewählt, dessen Axen resp. mit den Geraden $\overline{oA}$ und $\overline{oB}$ zusammenfallen. L sei der leuchtende Punkt, und seine Entfernung von o werde mit f bezeichnet. Der einfallende Lichtstrahl $\overline{LP_0}$ bilde mit der x Axe den Winkel u, während das Einfallslot $\overline{oP_0}$ mit derselben Axe den Winkel φ bilden soll. Weil nun der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist, und jeder $\varphi - u$ beträgt, so bildet der reflectirte Strahl $\overline{EP_0}$ mit der x Axe den Winkel $2\varphi - u$. Werden nun die laufenden Coordinaten eines Punktes P dieses Strahles mit x, y bezeichnet, diejenigen des Punktes P_0 aber mit x_0, y_0, so ergibt sich aus dem Dreieck P_0PG sofort die Proportion

$$1)\qquad x - x_0 : y - y_0 = l\cos(2\varphi - u) : l\sin(2\varphi - u)$$

wo l die Strecke $\overline{LP_0}$ bezeichnet. Weil nun also

$$x_0 = a\cos\varphi,\quad y_0 = a\sin\varphi,\quad l\cos u = f + a\cos\varphi,\quad l\sin u = a\sin\varphi$$

so ist

$$l\cos(2\varphi - a) = \cos 2\varphi \,.\, l\cos u + \sin 2\varphi \,.\, l\sin u$$
$$= f\cos 2\varphi + a(\cos 2\varphi\cos\varphi + \sin 2\varphi\sin\varphi) = f\cos 2\varphi + a\cos\varphi$$

und

$$l\sin(2\varphi - u) = f\sin 2\varphi + a\sin\varphi$$

Die Gl. 1) verwandelt sich somit in

$$2)\qquad \begin{vmatrix} x - a\cos\varphi, & f\cos 2\varphi + a\cos\varphi \\ y - a\sin\varphi, & f\sin 2\varphi + a\sin\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Wird dieser Determinant aufgelöst, so erhält man

$$3)\qquad x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = af\sin\varphi$$

als Gleichung des reflectirten Strahles oder der Tangente der Brennlinie.

Wir wollen derselben noch eine andere Gestalt geben und setzen

$$t = e^{i\varphi},\quad p = x + iy,\quad q = x - iy$$

dann folgt aus Gleichung 2)

$$\begin{vmatrix} p-at, & ft^2+at \\ q-\frac{a}{t}, & \frac{f}{t^2}+\frac{a}{t} \end{vmatrix} = 0$$

und man erhält

$$4)\qquad fqt^4+a(q-f)t^3+0.t^2-a(p-f)t-pf=0$$

Denkt man sich nun für einen Augenblick x und y, also auch p und q gegeben, so gibt es 4 Werte von t, welche der Gleichung 4) genügen.

Man hat also den Satz gewonnen: „Von einem Punkte der „Ebene aus lassen sich im allgemeinen 4 Tangenten an die Brenn„linie ziehen. Dieselbe ist also von der 4. Classe." Um nun von hier aus auf dem kürzesten Wege zu der Gleichung der Brennlinie in rechtwinkligen Coordinaten zu gelangen, bedenke man, dass sich in einem Punkte der Curve zwei von den 4 Tangenten mit der Tangente in dem Punkte selber vereinigen, so dass also von einem solchen Punkte aus nur drei verschiedene Tangenten möglich sind, von welchen aber eine doppelt zu zählen ist. Liegt also der Punkt x, y in Gleichung 4) auf der Curve, so muss dieselbe in Bezug auf t zwei gleiche Wurzeln haben. Hat man nun im allgemeinen die Gleichung

$$\bar{a}t^4+4\bar{b}t^3+6\bar{c}t^2+4\bar{d}t+\bar{e}=0$$

und setzt abkürzend

$$\bar{\Delta}=\begin{vmatrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{c} & \bar{d} \\ \bar{c} & \bar{d} & \bar{e} \end{vmatrix}=\bar{a}\,\bar{c}\,\bar{e}+2\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}-\bar{a}\,\bar{d}^2-\bar{e}\,\bar{b}^2-\bar{c}^3$$

$$\bar{I}=\bar{a}\,\bar{e}-4\bar{b}\,\bar{d}+3\bar{c}^2$$

so muss bekanntlich die Bedingung

$$5)\qquad 27\bar{\Delta}^2-\bar{I}^3=0$$

erfüllt sein, wenn das Polynom 4. Grades in t zwei gleiche Wurzeln haben soll.

Die Bedingung 5) wollen wir nun auf unsere Gleichung 4) übertragen.

Um Brüche zu vermeiden, multipl. man dieselbe mit dem Factor 4) und hat dann

$$\bar{a} = 4fq,\quad \bar{b} = a(q-f),\quad \bar{c} = 0,\quad \bar{d} = -a(p-f),\quad \bar{e} = -4pf$$

zu setzen. Man findet so, dass

$$I = 4[a^2(p-f)(q-f) - 4f^2pq] = 4[(a^2-4f^2)pq - a^2f(p+q) + a^2f^2]$$

ist, folglich

$$I = 4[(a^2-4f^2)(x^2-y^2) - 2a^2fx + a^2f^2]$$

und

$$\Delta = -4a^2f[q(p-f)^2 - p(q-f)^2] = -4a^2f(pq-f^2)(p-q)$$
$$= -8ia^2fy(x^2+y^2-f^2)$$

somit nach Gleichung 5)

$$6)\quad [(a^2-4f^2)(x^2+y^2) - 2a^2fx + a^2f^2]^3 + 27a^4f^2[y(x^2+y^2-f^2)]^2 = 0$$

Diese Gleichung stellt nun die Brennlinie dar, welche somit eine Curve 6. Grades ist. Ich lasse hier noch eine andere Ableitung der Brennlinie folgen.

Als Gleichung des reflectirten Strahles haben wir

$$x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = af\sin\varphi$$

erhalten. Der Schnittpunkt desselben mit der unmittelbar nachfolgenden Tangente ist ein Punkt der Curve selber und für diesen gelten somit die zwei Gleichungen

$$\alpha)\quad x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = af\sin\varphi$$
$$\beta)\quad x(2f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) + y(2f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) = af\cos\varphi$$

durch welche nun die Coordinaten x, y genau bestimmt werden. Setzt man zur Abkürzung

$$N = 2f^2 + a^2 + 3af\cos\varphi$$

so findet man

$$Nx = af(a + 3f\cos\varphi - 2f\cos^3\varphi)$$
$$Ny = 2af^2\sin^3\varphi$$

Aus diesen zwei Gleichungen soll nun der Winkel φ eliminirt werden. Man findet

$$x^2 = \frac{a^2f^2}{N^2}(a^2 + 6af\cos\varphi + 9f^2\cos^2\varphi - 4af\cos^3\varphi - 12f^2\cos^4\varphi + 4f^2\cos^6\varphi$$

$$y^2 = \frac{a^2f^2}{N^2} \cdot 4f^2(1-\cos^2\varphi)^3 = \frac{a^2f^2}{N^2}(4f^2 - 12f^2\cos^2\varphi + 12f^2\cos^4\varphi$$
$$- 4f^2\cos^6\varphi$$

somit ist auch

$$x^2+y^2 = \frac{a^2f^2}{N^2}(a^2+4f^2+6af\cos\varphi-3f^2\cos^2\varphi-4af\cos^3\varphi)$$

Man kann diese Formel auch so schreiben

$$x^2+y^2 = \frac{f^2}{N^2}(a^4+4a^2f^2+(6a^3f+12af^3)\cos\varphi+9a^2f^2\cos^2\varphi+4f^4$$
$$-4f^4-12af^3\cos\varphi-12a^2f^2\cos^2\varphi-4a^3f\cos^3\varphi$$
$$= f^2-\frac{4f^3}{N^2}(f^3+3f^2a\cos\varphi+3a^2f\cos^2\varphi+a^3\cos^3\varphi)$$

und findet also

$$x^2+y^2-f^2 = -\frac{4f^3}{N^2}(f+a\cos\varphi)^3$$

woraus folgt, dass

$$7)\quad 27a^4f^2y^2(x^2+y^2-f^2)^2 = \frac{27.64a^6f^{12}\sin^6\varphi}{N^6}.(f+a\cos\varphi)^6 \quad \text{ist}$$

Ferner ist

$$(a^2-4f^2)(x^2+y^2) = \frac{a^2f^2}{N^2}(a^4-16f^4+(6a^3f-24af^3)\cos\varphi$$
$$+(12f^4-3a^2f^2)\cos^2\varphi+(16af^3-4a^3f)\cos^3\varphi)$$

und

$$-2a^2fx+a^2f^2 = \frac{a^2f^2}{N^2}(-a^4+4f^4-6a^3f\cos\varphi-9a^2f^2\cos^2\varphi$$
$$+(4a^3f+8af^3)\cos^3\varphi+12a^2f^2\cos^4\varphi)$$

Werden diese zwei Gleichungen addirt, so erhält man

$$(a^2-4f^2)(x^2+y^2)-2a^2fx+a^2f^2 = -\frac{12a^2f^4}{N^2}(f^2+2af\cos\varphi$$
$$+(f^2-a^2)\cos^2\varphi+2af\cos^3\varphi+a^2\cos^4\varphi)$$
$$= -\frac{12a^2f^4\sin^2\varphi}{N^2}(f+a\cos\varphi)^2$$

folglich ist

$$8)\quad [(a^2-4f^2)(x^2+y^2)-2a^2fx+a^2f^2]^3$$
$$= -\frac{27.64.a^6f^{12}\sin^6\varphi}{N^6}.(f+a\cos\varphi)^6$$

und aus den Gleichungen 7) und 8) ergibt sich sofort die Gleichung der Brennlinie.

§. 2. Die unendlich fernen Punkte der Curve und die Asymptoten.

Die Brennlinie wird von einer Geraden im allgemeinen in 6 Punkten geschnitten. Somit liegen auf der unendlich fernen Geraden auch 6 Schnittpunkte, und die Curve würde demnach 6 verschiedene Asymptoten aufweisen. Es wird sich aber zeigen, dass zwei von diesen Schnittpunkten Rückkehrpunkte sind, und dass somit die Zal der Asymptoten nicht 6, sondern nur 4 ist. Um die Schnittpunkte aufzusuchen, mache man die Gleichung 6) homogen, ersetze also die rechtwinkligen Coordinaten x und y durch die Verhältnisse $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$, wo $z = 0$ die unendlich ferne Gerade darstellen soll. Wird nun die Curve

$$[(a^2-4f^2)(x^2+y^2)-2a^2fxz+a^2f^2z^2]^3+27a^4f^2[y(x^2+y^2-z^2f^2)]^2=0$$

mit der Geraden $z=0$ geschnitten, so erhält man zur Bestimmung der Schnittpunkte die Gleichung

$$1) \qquad (x^2+y^2)^2[(a^2-4f^2)^3(x^2+y^2)+27a^4f^2y^2]=0$$

Der erste Factor gleich null gesetzt, liefert die Kreispunkte

$$z=0, \quad x+iy=0; \quad z=0, \quad x-iy=0$$

von welchen jeder doppelt zu zählen ist. Dem zweiten Factor kann man die Gestalt

$$(4f^2-a^2)^3x^2-(a^2-f^2)(8f^2+a^2)^2y^2=0$$

geben, woraus folgt

$$z=0, \quad (4f^2-a^2)^{\frac{3}{2}}x+(a^2-f^2)^{\frac{1}{2}}(8f^2+a^2)y=0$$

$$z=0, \quad (4f^2-a^2)^{\frac{3}{2}}x-(a^2-f^2)^{\frac{1}{2}}(8f^2+a^2)=0$$

Diese 2 Schnittpunkte sind aber nur dann reell, wenn $\frac{a}{2}<f<a$.

Wir wollen nun das Polynom der Curve in der Nähe dieser 4 Schnittpunkte noch etwas genauer untersuchen. Ich setze abkürzend

$$g^2=a^2-f^2, \quad h^2=4f^2-a^2$$

$$A=-h^2(x^2+y^2)-2a^2fxz+a^2f^2z^2, \quad B=y(x^2+y^2-f^2z^2)$$

folglich ist

$$\frac{\partial A}{\partial x}=-2h^2x-2a^2fz, \quad \frac{\partial A}{\partial y}=-2h^2y, \quad \frac{\partial A}{\partial z}=2a^2f^2z-2a^2fx$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial B}{\partial y} = x^2 + 3y^2 - f^2 z^2, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = -2f^2 yz$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -2h^2, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -2h^2, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 2a^2 f^2, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} = -2a^2 f, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = -2f^2 y; \quad \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial x} = 0. \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial y} = -2f^2 z$$

Weil nun jetzt:

$$f(x, y, z) = A^3 + 27a^4 f^2 B^2$$

so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3A^2 \frac{\partial A}{\partial x} + 54a^4 f^2 B \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3A^2 \frac{\partial A}{\partial y} + 54a^4 f^2 B \frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3A^2 \frac{\partial A}{\partial z} + 54a^4 f^2 B \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6A\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)^2 + 54a^4 f^2 B \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6A\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 + 54a^4 f^2 B \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2 + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^2 + 54a^4 f^2 B \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6A \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial y} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + B \frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 6A \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial x} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 6A \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial y} + 3A^2 \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y} + 54a^4 f^2 \left(\frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} + B \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial z \partial y}\right)$$

Für die Coordinaten der Kreispunkte verschwinden aber A, B, $\frac{\partial B}{\partial z}$, somit auch die ersten Abgeleiteten der Function und das Polynom nimmt in der Nähe dieser Punkte folgende Gestalt an

$$(x_0^2 \, dx^2 + y_0^2 \, dy^2 + 2x_0 \, y_0 \, dx \, dy) = 0$$

oder also

$$(x_0 \, dx + y_0 \, dy)^2 = 0$$

Diese Formel lässt nun sofort erkennen, dass die Kreispunkte Rückkehrpunkte sind mit den Rückkehrtangenten

$$x+iy=0, \quad x-iy=0$$

Wir suchen die Asymptoten in den zwei andern Schnittpunkten. Für die Coordinaten dieser Punkte hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=2x_0(x_0^2+y_0^2)[3(a^2-4f^2)^3(x_0^2+y_0^2)+54a^4f^2y_0^2]$$

und weil nun

$$(a^2-4f^2)^3(x_0^2+y_0^2)+27a^4f^2y_0^2=0$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=-54a^4f^2x_0y_0^2(x_0^2+y_0^2)$$

ebenso findet man

$$\frac{\partial f}{\partial y_0}=54a^4f^2x_0^2y_0(x_0^2+y_0^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_0}=-6a^2f(a^2-4f^2)^2x_0(x_0^2+y_0^2)$$

Werden nun diese Werte in die bekannte Gleichung der Tangente

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}x+\frac{\partial f}{\partial y_0}y+\frac{\partial f}{\partial z_0}z=0$$

eingesetzt, so erhält man nach einigen Reductionen die Gleichung

$$-y_0^2x+x_0y_0y+\frac{3a^2fy_0^2}{-h^2}=0$$

Es ist nun

$$\frac{x_0^2}{y_0^2}=\frac{g^2(8f^2+a^2)^2}{h^6}$$

und wenn die Werte für $\frac{x_0}{y_0}$, die sich aus dieser Gleichung ergeben, oben eingesetzt werden, so erhält man für die Asymptoten die Gleichungen

2) $$-h^3x+g(8f^2+a^2)y-3a^2fh=0$$

3) $$-h^3x-g(8f^2+a^2)y-3a^2fh=0$$

Diese beiden letzten Asymptoten können auch wie folgt abgeleitet werden:

Als Gleichung des reflectirten Strahles hatten wir erhalten

$$x(f\sin 2\varphi+a\sin\varphi)-y(f\cos 2\varphi+a\cos\varphi)=af\sin\varphi$$

Für den Durchschnitt dieser Tangente mit der unmittelbar nachfolgenden gelten die beiden Gleichungen

$$x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - a\,y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = af\sin\varphi$$

$$\beta)\quad x(2f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) + y(2f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) = af\cos\varphi$$

Soll nun dieser Durchschnitt im Unendlichen liegen, so muss die Bedingung

$$4)\quad \begin{vmatrix} f\sin 2\varphi + a\sin\varphi, & -(2f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) \\ f\cos 2\varphi + a\cos\varphi, & 2f\sin 2\varphi + a\sin\varphi \end{vmatrix} = 2f^2 + a^2 + 3af\cos\varphi = 0$$

erfüllt sein. Diese Bedingung ergibt nun

$$\cos\varphi = -\frac{a^2 + 2f^2}{3af}$$

und die Realität des Winkels φ erfordert, dass $a^2 + 2f^2 < 3af$, oder

$$(a - f)(a - 2f) < 0$$

was der Fall ist, sobald $\frac{a}{2} < f < a$ ist Aus Gl. 4) folgt nun auch

$$3af(1 + \cos\varphi) = (a - f)(2f - a)$$

und

$$3af(1 - \cos\varphi) = (a + f)(2f + a)$$

die Multipl. dieser Gl. ergibt sofort

$$9a^2f^2\sin^2\varphi = g^2h^2$$

also

$$5)\quad 3af\sin\varphi = gh \quad \text{oder auch} \quad = -gh$$

Man schreibe nun die Gleichung der Tangente auf folgende Art:

$$x\sin\varphi(a + 2f\cos\varphi) - y(f + a\cos\varphi - 2f\sin^2\varphi) = af\sin\varphi$$

Aus 4) und 5) folgt nun

$$a + 2f\cos\varphi = -\frac{h^2}{3a}$$

$$f + a\cos\varphi - 2f\sin^2\varphi = -\frac{g^2}{9a^2f}(a^2 + 8f^2)$$

werden diese Ausdrücke und die Werte für $\sin\varphi$ aus Gl. 5) oben eingesetzt, so erhält man

$$-h^2x + g(8f^2 + a^2)y - 3a^2fh = 0$$

$$-h^2x - g(8f^2 + a^2)y - 3a^2fh = 0$$

als Gleichungen für die Asymptoten.

§. Singularitäten der Brennlinie.

a) *Doppelpunkte.*

Wir haben oben gesehen, dass man von einem Punkte der Ebene aus im allgemeinen 4 Tangenten an die Curve ziehen kann. Ist nun aber der Punkt, von dem aus die Tangenten zu ziehen sind ein Doppelpunkt der Curve, so vereinigen sich je 2 Tangenten mit je einer Tangente im Punkte selber, so dass also nur 2 verschiedene Tangenten möglich sind, die aber doppelt gezählt werden müssen.

Für einen solchen Punkt muss also das Polynom 4 ein vollständiges Quadrat sein. Ich setze nun

$$t^4 + \frac{a(q-f)}{fq} t^3 + 0.t^2 - \frac{a(p-f)}{fq} t - \frac{p}{q} = (t^2 + \alpha t + \beta)^2$$
$$= t^4 + 2\alpha t^3 + (\alpha^2 + 2\beta)t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2$$

wo α und β noch unbestimmte Coefficienten sind. Die Identität dieser Gleichung verlangt nun

$$2fq\alpha = a(q-f), \quad 2\beta = -\alpha^2, \quad 2fq\alpha\beta = -a(p-f) \quad q\beta^2 = -p$$

woraus folgt

$$1)\ \ 2fq\alpha = a(q-f); \qquad 2)\ \ fq\alpha^3 = a(p-f); \qquad 3)\ \ q\alpha^4 = -4p$$

Wird nun 1) mit 2) multiplicirt, so folgt nach Gl. 3)

$$4)\ \ a^2(p-f)(q-f) + 8f^2pq = 0$$

Ferner ist

$$\begin{vmatrix} 2fq\alpha & a(q-f) \\ fq\alpha^3 & a(p-f) \end{vmatrix} = 0$$

also auch

$$\alpha^2(q-f) = 2(p-f) \quad \text{oder} \quad \alpha^4(q-f)^2 = 4(p-f)^2$$

somit nach Gl. 3)

$$5)\ \ q(p-f)^2 + p(q-f)^2 = 0$$

Wir wollen die Gleichung 5), die in Bezug auf die Coordinaten x unn y vom dritten Grade ist, durch eine einfachere zu ersetzen suchen. Wir haben

$$\begin{array}{ll} 4')\ \ (a^2+8f^2)pq - a^2f(p+q) + a^2f^2 = 0 & \Big| \times (p+q) \\ 5')\ \ (p+q)pq - 4fpq + f^2(p+q) = 0 & \Big| \times (a^2+8f^2) \end{array}$$

wird 4') mit $(p+q)$ und 5') mit (a^2+8f^2) multiplicirt und 5') von 4') subtrahirt, so folgt

$$6)\quad 4(a^2+8f^2)pq - a^2(p+q)^2 - 8f^3(p+q) = 0$$

wenn ferner Gl. 4') mit 4) multiplicirt wird und dann Gl. 6) davon subtrahirt, so erhält man schliesslich

$$7)\quad a^2(p+q)^2 + 4(2f^2-a^2)f(p+q) + 4a^2f^2 = 0$$

so dass nun die Doppelpunkte der Brennlinie durch folgendes System bestimmt werden:

$$8)\quad \begin{cases} (a^2+8f^2)(x^2+y^2) - 2a^2fx + a^2f^2 = 0 \\ 4a^2x^2 + 8f(2f^2-a^2)x + 4a^2f^2 = 0 \end{cases}$$

Die Curve hat also 4 Doppelpunkte. Dieselben liegen auf dem imaginären Kreise

$$\left(x - \frac{a^2f}{a^2+8f^2}\right)^2 + y^2 = -\frac{8a^2f^4}{a^2+8f^2}$$

und zwar in den Punkten, wo derselbe von den Geraden

$$x = -\frac{f(2f^2-a^2)+2if^2g}{a^2}$$

$$x = -\frac{f(2f^2-a^2)-2if^2g}{a^2}$$

geschnitten wird. Diese Geraden werden reell, sobald $f > a$ ist.

b) *Rückkehrpunkte.*

Ist der Punkt, von dem aus die Tangenten an die Curve gezogen werden sollen, ein Rückkehrpunkt der Curve, so vereinigen sich 3 Tangenten zu der Rückkehrtangente. Von einem solchen Punkte aus sind also nur zwei verschiedene Tangenten zu ziehen möglich, von welchen aber eine dreifach zu zählen ist. Denkt man sich demnach die Coordinaten eines solchen Punktes in das Polynom 4 eingesetzt, so muss dasselbe in Bezug auf t drei gleiche Wurzeln enthalten. Damit nun das der Fall sei, müssen die 3 Gleichungen

$$f(t) = 0, \quad \frac{\partial f(t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} = 0$$

gleichzeitig erfüllt sein. Wird nun das Polynom 4 oder $f(t) = 0$ homogen gemacht, indem man die Variable t durch das Verhältniss $\frac{t}{u}$ ersetzt, so lassen sich die obigen drei Bedingungsgleichungen durch die drei folgenden ersetzen:

$$\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial t . \partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2} = 0$$

Man findet nun

$$\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial t^2} = 6t[2fqt + a(q-f)u]$$

$$\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial t . \partial u} = 3a[(q-f)t^2 - (p-f)u^2]$$

$$\frac{\partial^2 f(t,u)}{\partial u^2} = -6[a(p-f)tu + 2fpu^2]$$

denkt man sich $u = 1$ gesetzt, so erhält man folgendes System:

$$(1) \quad 2fqt^2 + a(q-f)t = 0$$
$$(2) \quad (q-f)t^2 - (p-f) = 0$$
$$(3) \quad a(p-f)t + 2fp = 0$$

Aus (1) und (2) soll t^2 eliminirt werden. Es ist

$$\begin{vmatrix} 2fqt^2 + a(q-f)t & 2fq \\ (q-f)t^2 - (p-f) & q-f \end{vmatrix} = 0$$

also auch

$$\begin{vmatrix} a(q-f)t & 2fq \\ -(p-f) & (q-f) \end{vmatrix} = 0$$

somit

$$(4) \quad a(q-f)^2 t + 2fq(p-f) = 0$$

Nach (3) und (4) ist nun

$$\begin{vmatrix} a(q-f)^2 t + 2fq(p-f) & (q-f)^2 \\ a(p-f)t + 2fp & (p-f) \end{vmatrix} = 0$$

folglich auch

$$\begin{vmatrix} q(p-f) & (q-f)^2 \\ p & (p-f) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(5) \quad q(p-f)^2 - p(q-f)^2 = 0$$

Ferner folgt aus (1) und (3)

$$\begin{vmatrix} 2fqt + a(q-f) & 2fq \\ a(p-f)t + 2fp & a(p-f) \end{vmatrix} = 0$$

demnach auch

$$\begin{vmatrix} a(q-f) & 2fq \\ 2fp & a(p-f) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(6) \quad a^2(p-f)(q-f) - 4f^2pq = 0$$

und wir erhalten demnach zur Bestimmung der Rückkehrpunkte der Curve das System

$$(7)\quad \begin{cases} (pq-f^2)(p-q) = 2iy(x^2+y^2-f^2) = 0 \\ (a^2-4f^2)pq - a^2f(p+q) + a^2f^2 \\ \qquad = (a^2-4f^2)(x^2+y^2) - 2a^2fx + a^2f^2 = 0 \end{cases}$$

die Curve hat also 6 Rückkehrpunkte, die alle auf dem Kreise

$$\left(x - \frac{a^2f^2}{a^2-4f^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2af^2}{a^2-4f^2}\right)^2$$

liegen und zwar in den Punkten, wo derselbe von der Geraden $y=0$ und dem Kreise $x^2+y^2=f^2$ geschnitten wird. Die zwei Kreispunkte im Unendlichen haben wir schon als Rückkehrpunkte erkannt und ihre Tangenten dargestellt, und es bleibt uns jetzt noch übrig, die Coordinaten der 4 Rückkehrpunkte im Endlichen zu finden und die Tangenten abzuleiten. Die Gerade $y=0$ schneidet obigen Kreis in den zwei Punkten

$$x_0 = \frac{af}{a-2f}, \quad y_0 = 0; \quad x_1 = \frac{af}{a+2f}, \quad y_1 = 0$$

und man erkennt, dass diese zwei Schnittpunkte für alle Lagen des leuchtenden Punktes reell sind und auf der östlichen Seite der Abscissenaxe liegen, so lange $0 < f < \frac{a}{2}$ ist. Um die Coordinaten der zwei andern Rückkehrpunkte zu erhalten, setze ich den Wert von y^2 aus der Gleichung

$$x^2+y^2=f^2$$

in obige Kreisgleichung ein und erhalte

$$x = \frac{f(a^2-2f^2)}{a^2}.$$

Wird dieser Wert in die Gleichung

$$x^2+y^2=f^2$$

eingesetzt, so folgt

$$y^2 = \frac{4f^4(a^2-f^2)}{a^4}$$

somit die zwei andern Rückkehrpunkte

$$x_2 = \frac{f(a^2-2f^2)}{a^2}, \quad y_2 = \frac{2f^2g}{a^2}$$

$$x_3 = \frac{f(a^2-2f^2)}{a^2}, \quad y_3 = -\frac{2f^2g}{a^2}$$

Diese sind nur so lange reell, als $0 < f < a$ ist. Um die Rückkehrtangenten zu finden, entwickle man die Gleichung der Curve in der Nähe dieser Punkte und entnehme auf Seite 118 und 119 die Werte für die ersten und zweiten Abgeleiteten für diese Punkte. Für die Rückkehrpunkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) findet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 54\, a^4 f^2 (\bar{x}^2 - f^2)$$

und somit ist die Gleichung der Curve in nächster Nähe dieser Punkte

$$(\bar{x}^2 - f^2)\, dy^2 = 0$$

folglich die Gerade $y = 0$ gemeinsame Rückkehrtangente. Für die Rückkehrtangente (x_2, y_2), (x_3, y_3) hingegen folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4.54 a^4 f^2 \bar{x}^2 \bar{y}^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 4.54 a^4 f^2 \bar{x} \bar{y}^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4.54\, a^4 f^2 \bar{y}^4$$

somit die Gleichung der Curve in nächster Nähe dieser zwei Punkte

$$\bar{x}^2 dx^2 + 2\bar{x}\, \bar{y}\, dx \,.\, dy + \bar{y}^2 dy^2 = 0$$

Werden die Differentiale durch die Unterschie $x - \bar{x}$ und $y - \bar{y}$ ersetzt, so folgt

$$(8) \qquad \bar{x}\, x + \bar{y}\, y = f^2$$

und man erkennt sogleich, dass die Rückkehrtangen der Curve in diesen Punkten zugleich Tangenten an dem Kreise

$$x^2 + y^2 = f^2$$

sind. Aus Gl. (7) ergeben sich nun diese Tangenten in folgender Gestalt:

$$(9) \qquad (a^2 - 2f^2)\, x + 2 f g\, y - a^2 f = 0$$

$$(10) \qquad (a^2 - 2f^2)\, x - 2 f g\, y - a^2 f = 0$$

c) *Wendepunkte der Curve.*

Die Tangente der Brennlinie bildet mit der x Axe den Winkel $2\varphi - u$, wo u eine Function von φ ist. Ist nun diese Tangente eine Wendungstangente, so muss

$$\frac{\partial(2\varphi-u)}{\partial\varphi}=0$$

sein, also der Winkel $2\varphi-u$ ein Max. od. Min. Aus Fig. 1 folgt, dass

$$\operatorname{tg}u=\frac{a\sin\varphi}{f+a\cos\varphi}$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\frac{\partial\operatorname{tg}u}{\partial\varphi}}{1+\operatorname{tg}^2u}=\frac{a(a+f\cos\varphi)}{l^2}$$

wo

$$l^2=a^2+f^2+2af\cos\varphi$$

somit findet man auch

$$(1)\qquad\frac{\partial(2\varphi-u)}{\partial\varphi}=\frac{(a^2+2f^2+3af\cos\varphi)}{l^2}$$

und weil nun l nicht ∞ werden kann, so muss

$$(2)\qquad a^2+2f^2+3af\cos\varphi=0$$

sein, wenn der dem Winkel φ entsprechende reflectirte Strahl eine Wendungstangente sein soll. Wir haben aber in §. 2. gesehen, dass die Bedingung (2) die beiden Asymptoten

$$(3)\qquad -h^3x+g(a^2+8f^2)y-3a^2fh=0$$
$$(4)\qquad -h^3x-g(a^2+8f^2)y-3a^2fh=0$$

liefert, und es ist nur noch zu entscheiden, ob diese Asymptoten Wendungsasymptoten sind oder nicht. Wäre nun z. B. die Tangente (3) eine Wendungsasymptote, so müssten die beiden Curvenzweige im Unendlichen auf derselben Seite der Geraden liegen; dann aber könnte der Winkel $2\varphi-u$ weder Max. noch Min. sein, d. h. es müsste nicht nur

$$\frac{\partial(2\varphi-u)}{\partial\varphi}=0$$

sein, sondern auch noch

$$\frac{\partial^2(2\varphi-u)}{\partial\varphi^2}=0$$

Wir finden aber, dass

$$(5)\qquad\frac{\partial^2(2\varphi-u)}{\partial\varphi^2}=-\frac{afg^2}{l^4}\sin\varphi$$

ist und für obigen Wert von φ nicht verschwindet. Die beiden Asymptoten sind demnach keine Wendungsasymptoten und die Curve besitzt somit keine Wendepunkte.

d) *Doppeltangenten der Curve.*

Ich nehme an, den beiden Winkeln φ und φ' entsprechen die beiden Tangenten

$$(1) \quad x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) - af\sin\varphi = 0$$
$$(2) \quad x(f\sin 2\varphi' + a\sin\varphi') - y(f\cos 2\varphi' + a\cos\varphi') - af\sin\varphi' = 0$$

Dieselaen fallen nur zusammen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{vmatrix} f\sin 2\varphi + a\sin\varphi & \sin\varphi \\ f\sin 2\varphi' + a\sin\varphi' & \sin\varphi' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} f\cos 2\varphi + a\cos\varphi & \sin\varphi \\ f\cos 2\varphi' + a\cos\varphi' & \sin\varphi' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} f\sin 2\varphi + a\sin\varphi. & f\cos 2\varphi + a\cos\varphi \\ f\sin 2\varphi' + a\sin\varphi'. & f\cos 2\varphi' + a\cos\varphi' \end{vmatrix} = 0$$

Die Lösung

$$\varphi = \varphi'$$

ist zu verwerfen; hingegen ist

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \varphi' = \pi$$

eine richtige Lösung und gibt

$$y = 0$$

als Doppeltangente. Weil die erste Bedingungsgleichung auch in der Form

$$\sin\varphi\sin\varphi'(\cos\varphi - \cos\varphi') = 0$$

geschrieben werden kann, so darf man

$$\cos\varphi = \cos\varphi'$$

setzen und muss

$$\varphi' = -\varphi$$

annehmen. Setzt man nun diesen Wert von φ' in die zweite Bedingungsgleichung ein, so erhält man zur Bestimmung des Winkels folgende Gleichung:

$$(3) \quad 2f\cos^2\varphi + a\cos\varphi - f = 0$$

woraus folgt

$$\cos\varphi_0 = -\frac{a + \sqrt{a^2 + 8f^2}}{4f}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 8f^2}}{4f}$$

und die Gleichungen der beiden andern Doppeltangenten sind somit:

$$(4)\qquad (a+\sqrt{a^2+8f^2})x-2af=0$$

$$(5)\qquad (a-\sqrt{a^2+8f^2})x-2af=0$$

die Doppeltangente (4) berührt die Curve in den zwei Punkten

$$\left\{ x=\frac{2af}{a+\sqrt{a^2+8f^2}},\quad \begin{array}{l} y_0=\left[\dfrac{2(h^2+a\sqrt{a^2+8f^2})}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}} \\ y_1=-\left[\dfrac{2(h^2+a\sqrt{a^2+8f^2})}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right\}$$

und die Doppeltangente (5) in den Punkten

$$\left\{ x=\frac{2af}{a-\sqrt{a^2+8f^2}},\quad \begin{array}{l} y_2=\left[\dfrac{2(h^2-a\sqrt{a^2+8f^2})}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}} \\ y_3=-\left[\dfrac{2(h^2-a\sqrt{a^2+8f^2})}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}} \end{array} \right\}.$$

Bem. Bei den Ordinaten ist der Factor

$$\frac{8af^2}{\sqrt{a^2+8f^2}(\sqrt{a^2+8f^2}-3a)}$$

weggelassen worden.

§. 4. Darstellung der Brennlinie in Liniencoordinaten.

Wir haben als Gleichung der Tangente den Ausdruck

$$x(f\sin 2\varphi+a\sin\varphi)-y(f\cos 2\varphi+a\cos\varphi)-af\sin\varphi=0$$

gefunden. Soll demnach auch die Gerade

$$lx+my+nz=0$$

Tangente an der Curve sein, so müssen folgende Bedingungen stattfinden:

$$(1)\qquad \frac{l}{n}=-\frac{f\sin 2\varphi+a\sin\varphi}{af\sin\varphi}$$

$$(2)\qquad \frac{m}{n}=\frac{f\cos 2\varphi+a\cos\varphi}{af\sin\varphi}$$

Aus (1) folgt nun

$$2fn\cos\varphi = -a(fl+n)$$

und wenn man mit am multiplicirt und beide Seiten in's Quadrat erhebt, so ist

$$(3) \qquad 4a^2f^2n^2m^2\cos^2\varphi = a^4m^2(ft+n)^2$$

ferner folgt aus (2)

$$afm\sin\varphi = n(2f\cos^2\varphi + a\cos\varphi - f)$$

somit ist auch

$$2af^2mn\sin\varphi = 4f^2n^2\cos^2\varphi + 2fn^2\cos\varphi \times a - 2f^2n^2, \quad \text{oder}$$
$$= a^2(fl+n)^2 - a^2(fl+n)n - 2f^2n^2, \quad \text{also}$$
$$2afmn\sin\varphi = a^2l(fl+n) - 2fn^2$$

folglich

$$(4) \qquad 4a^2f^2m^2n^2\sin^2\varphi = [a^2l(fl+n) - 2fn^2]^2$$

Die Addition von (3) und (4) ergibt sofort die Gleichung

$$4a^2f^2m^2n^2 = a^4(l^2+m^2)(fl+n)^2 - 4a^2fln^2(fl+n) + 4f^2n^4$$

welche auch auf folgende Weise geschrieben werden kann:

$$(5) \quad a^2(l^2+m^2)[a^2f^2l^2 + 2a^2fln + (\alpha^2 - 4h)n^2] - 4a^2fln^3 + 4f^2n^4 = 0$$

§. 5. Brennlinien für besondere Lagen des leuchtenden Punktes.

$$(\text{I}) \qquad o < f < \frac{a}{2}$$

Gleichung der Curve:

$$[(a^2-4f^2)(x^2+y^2) - 2a^2fx + a^2f^2]^3 + 27a^4f^2[y(x^2+y^2-f^2)]^2 = 0$$

In diesem Falle ist der Factor (a^2-4f^2) positiv; alle reellen Punkte der Curve liegen somit innerhalb des Kreises

$$\left(x - \frac{a^2f}{a^2-4f^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2af^2}{a^2-4f^2}\right)^2$$

welcher um den Punkt m mit dem Radius $\frac{2af^2}{a^2-4f^2}$ beschrieben wird. (Fig. 2). Weil

$$h^2 = 4f^2 - a^2$$

negativ ist, so werden auch die beiden Asymptoten

$$-h^3x+g(a^2+8f^2)y-3a^2fh=0$$
$$-h^3x-g(a^2+8f^2)y-3a^2fh=0$$

imaginär, und die Curve hat keine reellen Punkte im Unendlichen.

Die 4 Rückkehrpunkte im Endlichen (in der Figur mit A, B, C, D bezeichnet) sind alle reell und haben die Coordinaten

$$\text{A:}\quad x=\frac{af}{a+2f};\quad y=0 \qquad \text{B:}\quad x=\frac{f(a^2-2f^2)}{a^2};\quad y=-\frac{2f^2g}{a^2} \qquad \text{C:}\quad x=\frac{af}{a-2f};\quad y=0$$

$$\text{D:}\quad x=\frac{f(a^2-2f^2)}{a^2};\quad y=\frac{2f^2g}{a^2}$$

Ferner sind

$$(a^2-2f^2)x-2fgy-a^2f=0$$
$$(a^2-2f^2)x+2fgy-a^2f=0$$

die Gleichungen der beiden Rückkehrtangenten $\overline{BF}$ und $\overline{DF}$, welche die x Axe im Punkte F schneiden, dem die Coordinaten

$$\left(x=\frac{a^2f}{a^2-2f^2},\quad y=0\right)$$

zukommen. Die beiden Doppeltangenten GH und JK haben die Gleichungen

$$x=\frac{2af}{a+\sqrt{a^2+8f^3}}$$

und

$$x=\frac{2af}{a-\sqrt{a^2+8f^2}}$$

Die Tangente GH berührt die Curve in den zwei Punkten p und p' denen die Coordinaten

$$\text{p:}\quad x=\frac{2af}{a+\sqrt{a^2+8f^2}};\quad y=\left[\frac{2(h^2+a\sqrt{a^2+8f^2}}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{p}':\quad x=\frac{2af}{a+\sqrt{a^2+8f^2}};\quad y=-\left[\frac{2(h^2+a\sqrt{a_3+8f^2}}{16f^2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

(Bem. Auch hier ist bei den Ordinaten der Factor

$$\frac{8af^2}{\sqrt{a^2+8f^2}(\sqrt{a^2+8f^2}-3a)}$$

weggelassen.)

estsprechen, während die Berührungspunkte der andern Doppeltangente imaginär sind. In Figur 2 ist L der leuchtende Punkt, welcher auf dem Kreise $x^2+y^2=f^2$ liegt. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist 0, und dieser Punkt ist zugleich Mittelpunkt des reflectirenden Kreises mit dem Radius a. Die Curve muss die in Fig. 2. gezeichnete Form haben.

$$\text{(II)} \quad f=\frac{a}{2}.$$

Gleichung der Curve:

$$a^3(4x-a)^3-432\left[y\left(x^2+y^2-\frac{a^2}{4}\right)\right]^2=0$$

Der Kreis der Rückkehrpunkte

$$(a^2-4f^2)(x^2+y^2)-2a^2fx+a^2f^2=0$$

verwandelt sich in die Gerade

$$x=\frac{a}{4}$$

oder $\overline{BD}$ (Fig. 3.), und alle reellen Punkte der Curve liegen auf der östlichen Seite derselben. Weil $h=0$, so fliessen beide bis dahin imaginären Asymptoten mit der reellen Geraden $y=0$ zusammen. Die Rückkehrpunkte A, B, C, D haben resp. die Coordinaten

A: $x=\frac{a}{4}$, $y=0$ B: $x=\frac{a}{4}$, $y=-\frac{a}{4}\sqrt{3}$ C: $x=\infty$, $y=0$

D: $x=\frac{a}{4}$, $y=\frac{a}{4}\sqrt{3}$

und die Gleichungen der Rückkehrtangenten BF und DF sind

$$x-\sqrt{3}y-a=0$$
$$+\sqrt{3}y-a=0$$

und ihr Schnittpunkt F hat die Coordinaten ($x = a$, $y = 0$). Ferner sind

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1) = 0,3 \ldots a$$

$$x = -\frac{a}{2}(\sqrt{3}+1) = -1,3 \ldots a$$

die Gleichungen der beiden Doppeltangenten GH und JK. Die Berührungspunkte p und p' haben die Coordinaten

$$p: \quad x = 0,3 \ldots a, \quad y = \frac{(\sqrt{3}+3)a}{\sqrt[4]{12^3}}; \qquad p': \quad x = 0,3 \ldots a, \quad y = -\frac{(\sqrt{3}+3)a}{\sqrt[4]{12^3}}$$

während die Tangente JK die Curve imaginär berührt. Die Brennlinie muss die in Fig. 3. dargestellte Form haben.

(III) $\frac{a}{2} < f < a$

Der Factor $(a^2 - 4f^2)$ in der Gleichung der Curve wird nun negativ, und in Folge dessen liegen alle reellen Punkte ausserhalb des Kreises

$$\left(x - \frac{a^2 f}{a^2 - 4f^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2af^2}{a^2 - 4f^2}\right)^2$$

dessen Mittelpunkt nun auf der negativen Seite der x Axe liegt. Weil sowol $h^2 = 4f^2 - a^2$, als auch $g^2 = a^2 - f^2$ positiv ist, so werden nun die beiden Asymptoten

$$-h^3 x + g(a^2 + 8f^2)y - 3a^2 fh = 0$$
$$-h^3 x - g(a^2 + 8f^2)y - 3a^2 fh = 0$$

reell, und die Curve hat somit auch im Unendlichen reelle Punkte. Hingegen bleiben immer noch die Berührungspunkte der Doppeltangente

$$(a - \sqrt{a^2 + 8f^2})x - 2af = 0$$

imaginär. Die Curve hat die in Figur 4. dargestellte Gestalt. GM und GN sind die beiden Asymptoten.

(IV) $f = a$

Gleichung der Curve:

$$[(3x - a)(x + a) + 3y^2]^3 - 27y^2[(x^2 - a^2) + y^2]^2 = 0$$

oder

$$(1) \qquad (x+a)^2\,[27y^4+18(3x^2-a^2)y^2+(3x-a)^3(x+a)\,] = 0$$

die Curve enthält also in diesem Falle die Gerade

$$x = -a$$

doppelt; der übrige Teil ist eine Curve 4. Grades und hat die Gleichung

$$(2) \qquad 27(x^2+y^2)^2-18(x^2+y^2)+8a^3x-a^4 = 0$$

Weil in diesem Falle $g^2 = 0$, so vereinigen sich die beiden Asymptoten mit der Geraden

$$x = -a$$

Der Rückkehrpunkt A (Fig. 5.) hat die Coordinaten

$$\left(x = \frac{a}{3}, \quad y = 0\right)$$

während die drei andern Rückkehrpunkte B, C und D im Lichtpunkte $f = a$ zusammenfliessen. Die Doppeltangente GH hat die Gleichung

$$x = \frac{a}{2}$$

und die andere fällt mit der Geraden

$$x = -a$$

zusammen. Die Curve ist in Figur 5. dargestellt.

Wir wollen die Curve vom 4. Grade, also Gleichung (2) noch etwas genauer untersuchen. Zu diesem Zwecke transformire ich sie zu dem Punkte A als Coordinatenanfangspunkte, setze also

$$x = \frac{a}{3} + x', \quad y = y'$$

und finde

$$(3) \qquad [3(x^2+y^2)+2ax]^2-4a^2(x^2+y^2) = 0$$

Man ziehe nun vom Punkte A aus (Fig. 6.) einen Strahl, der mit der negativen x Axe den Winkel φ bildet und den Kreis mit dem Radius $\frac{a}{3}$ um den Punkt B beschrieben in P schneidet. Wird nun von hier aus auf dieser Geraden die Strecke r abgetragen, so sind die Coordinaten von P_0 resp.

$$x = -\frac{a}{3}(1+\cos 2\varphi) - r\cos\varphi$$

$$y = \frac{a}{3}\sin 2\varphi + r\sin\varphi$$

Liegt nun dieser Punkt auf der Curve, so müssen seine Coordinaten der Gleichung (2) genügen. Man findet

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2a\cos\varphi}{3} + r\right)^2$$

$$3(x^2+y^2) + 2ax = 3r\left(\frac{2a\cos\varphi}{3} + r\right)$$

somit

$$(9r^2 - 4a^2)\left(\frac{2a\cos\varphi}{3} + r\right)^2 = 0$$

folglich

(4) $$r^2 = \frac{4a^2}{9}$$

„Die Curve kann somit auch erhalten werden, indem man von „dem festen Punkte A aus (Fig. 6.) nach einem variabeln Punkte „P des Grundkreises B einen Strahl zieht und von hier aus nach „beiden Seiten die constante Länge $\frac{2a}{3}$, also gleich dem Durch-„messer des Grundkreises, abträgt." Die Curve ist somit eine Kreisconchoide.

Für die Coordinaten des Punktes P_0 erhalten wir nun die Ausdrücke:

$$x = -\frac{a}{3} - \left(\frac{2a}{3}\cos\varphi + \frac{a}{3}\cos 2\varphi\right)$$

$$y = \frac{2a}{3}\sin\varphi + \frac{a}{3}\sin 2\varphi$$

Um zu diesem Punkte zu gelangen, ziehe man von B aus eine Parallele mit $\overline{AP_1}$, mache $\overline{BC} = \frac{2a}{3}$ und beschreibe um C mit dem Radius $\frac{a}{3}$ einen Kreis. Von C aus ziehe man unter dem Azimute $\pi - 2\varphi$ einen Strahl, so ist der Schnittpunkt desselben mit dem Kreise C der verlangte Punkt der Curve. „Lässt man nun den Kreis „C auf dem Grundkreise B rollen, so beschreibt dee mit dem rollen-„den Kreise fest verbundene Punkt P_0 die Curve 4. Grades."

Der Rückkehrpunktenkreis, dessen Mittelpunkt in D liegt, hat in Bezug auf A als Coordinatenanfangspunkt die Gleichung:

(5) $$\left(x + \frac{2a}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2$$

und

$$x\left(x_0+\frac{2a}{3}\right)+yy_0+\frac{2a}{3}x_0=0$$

ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x_0, y_0). Vom Punkte A aus fälle man auf diese Tangente eine Senkrechte und für den Schnittpunkt (x, y) gelten nun die zwei Gleichungen

$$(6) \qquad x_0\left(x+\frac{2a}{3}\right)+y_0y+x\frac{2a}{3}=0$$

$$(7) \qquad x_0y \qquad -y_0x+y\frac{2a}{3}=0$$

aus welchen folgt

$$x_0=-\frac{(x^2+y^2)\cdot\frac{2a}{3}}{x\left(x+\frac{2a}{3}\right)+y^2}, \qquad y_0=\frac{y\cdot\left(\frac{2a}{3}\right)^2}{x\left(x+\frac{2a}{3}\right)+y^2}$$

Setzt man nun diese Werte für x_0 und y_0 in Gleichung (5) ein, so folgt

$$[3(x^2+y^2)+2ax]^2=4a^2(x^2+y^2)$$

Der Fusspunkt der Normalen liegt somit auf der Curve 4. Grades.

„Die Curve ist somit auch der Ort der Fusspunkte der Nor-„malen, die vom Punkte A aus auf die variabeln Tangenten des „Rückkehrpunktenkreises gefällt werden.

(V) $a<f$

Gleichung der Curve:

$$[(a^2-4f^2)(x^2+y^2)-2a^2fx+a^2f^2]^3+27a^4f^2[y(x^2+y^2-f^2]^2=0$$

Nach Voraussetzung ist

$$g^2=a^2-f^2$$

negativ; die beiden Asymptoten werden somit wieder imaginär und die Curve hat keine reellen Punkte mehr im Unendlichen. Weil ferner

$$a-\left(\frac{a^2f}{4f^2-a^2}+\frac{2af^2}{4f^2-a^2}\right)=\frac{a(f-a)}{2f-a}$$

positiv ist, so liegt der Kreis der Rückkehrpunkte innerhalb des reflectirenden Kreises, somit auch innerhalb des Kreises mit dem Radius f und die Curve hat nur 2 reelle Rückkehrpunkte mehr, nämlich die Punkte A und B (Fig. 7.). Hingegen hat nicht nur die Doppeltangente GH oder

$$x = \frac{2af}{a + \sqrt{a^2 + 8f^2}}$$

reelle Berührungspunkte, sondern auch die Tangente

$$x = \frac{2af}{a - \sqrt{a^2 + 8f^2}}$$

oder JK. Weil ferner die von L aus an den reflectirenden Kreis gezogenen Tangenten zugleich Tangenten der Brennlinie sind, so muss dieselbe genannten Kreis in den Berührungspunkten der Tangenten berühren, und da sie keine Wendepunkte hat, so liegt sie ganz innerhalb dieses Kreises.

(VI) $f = \infty$

Gleichung der Curve:

$$[4(x^2 + y^2) - a^2]^3 - 27\,a^4 y^2 = 0$$

Die beiden Asymptoten

$$-h^3 x + g(a^2 + 8f^2)y - 3a^2 fh = 0$$

und

$$-h^3 x - g(a^2 + 8f^2)y - 3a^2 fh = 0$$

werden resp. zu

$$x - iy = 0 \quad \text{und} \quad x + iy = 0$$

fallen also mit den Asymptoten nach den Kreispunkten zusammen. Ferner ist

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

der Kreis der Rückkehrpunkte und

$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ oder GH (Fig. 8.) und $x = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$ oder JK

sind die Gleichungen der Doppeltangenten, welche die Curve in den Punkten (p, p') und (p_2, p_3) berühren. Diesen Punkten entsprechen nach der allgemeinen Formel die Coordinaten:

$$\mathfrak{p}: \begin{cases} x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \\ y = \frac{a}{4}\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \mathfrak{p}': \begin{cases} x = \frac{a}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{a}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\mathfrak{p}_2: \begin{cases} x = -\frac{a}{2}\sqrt{2} \\ y = \frac{a}{4}\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \mathfrak{p}_3: \begin{cases} x = -\frac{a}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{a}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Wir wollen noch zeigen, dass auch diese Form der Brennlinie als Rollcurve aufgefasst werden kann. Es war

$$x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) - af\sin\varphi = 0$$

die Gleichung des refl. Strahles. Denkt man sich hier f sehr gross, so geht diese in

$$x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi = a\sin\varphi$$

über. Für den Schnittpunkt dieser Tangente mit der unmittelbar nachfolgenden gelten somit die zwei Gleichungen

$$(1) \qquad x\sin 2\varphi - y\cos 2\varphi = a\sin\varphi$$

$$(2) \qquad x\,2\cos 2\varphi + y\,2\sin 2\varphi = a\cos\varphi$$

aus diesen folgt

$$x = a\cos\varphi - \frac{a}{2}\cos\varphi\cos 2\varphi = \frac{3a}{4}\cos\varphi - \frac{a}{4}\cos 3\varphi$$

$$y = a\sin\varphi - \frac{a}{2}\sin\varphi\sin 2\varphi = \frac{3a}{4}\sin\varphi - \frac{a}{4}\sin 3\varphi$$

somit auch

$$x + iy = \frac{3a}{4}e^{i\varphi} + \frac{a}{4}e^{i(\pi+3\varphi)}$$

Um diesen Punkt zu erhalten, ziehe man von Θ aus unter dem Azimute φ einen Strahl und mache $\overline{PC}$ gleich $\frac{3a}{4}$: um den Punkt C beschreibe man ferner mit dem Radius $\frac{a}{4}$ einen Kreis, ziehe von C aus unter dem Azimute $\pi + 3\varphi$ einen Strahl, und der Punkt, wo derselbe den Kreis C schneidet, ist der verlangte Punkt. „Lässt „man nun den Kreis C auf dem Kreise der Rückkehrpunkte rollen, „so beschreibt der mit dem rollenden Kreise fest verbundene Punkt P die Brennlinie.

II. Wellenlinie eines reflectirenden Kreises.

Die Flächen, auf denen die Aetherteilchen sich in gleichen Schwingungszuständen befinden, sollen Wellenflächen genannt werden, Diese sind für einen Lichtpunkt, von dem aus die Aetherschwingungen sich ungestört fortpflanzen können, bekanntlich Kugelflächen. Wird nun aber der freien Ausbreitung des Lichtes ein Hinderniss entgegengebracht, so erleiden die einfallenden Aetherwellen eine Reflexion und es entsteht die Frage nach der Beschaffenheit der Wellen-

fläche des reflectirten Lichtes. Dass diese von der Gestalt der reflectirenden Fläche und der Lage des leuchtenden Punktes zu derselben abhängig ist, sieht man unmittelbar ein. Ich denke mir nun als reflectirende Fläche eine Kugel und will im folgenden die Wellenfläche des reflectirten Lichtes etwas genauer untersuchen. Diese ist offenbar eine Umdrehungsfläche, welche den Durchmesser der reflectirenden Kugel durch den leuchtenden Punkt zur Umdrehungsaxe hat. Man hat demnach nur nötig, den Durchschnitt einer durch diese Axe gelegten Ebene mit der Wellenfläche einer Betrachtung zu unterziehen. Denkt man sich nun eine ganz beliebig gestaltete Curve als Wellenlinie, errichtet in jedem Punkte derselben die Normale und trägt auf dieser die constante Länge a ab, so bilden die Endpunkte eine neue Curve, welche die Wellenlinie für einen andern Zeitaugenblick darstellt. Lässt man nun die Constante a variiren, so erhält man das ganze System von Wellenlinien. Auch die Schnittpunkte der unmittelbar aufeinander folgenden Normalen bilden eine Curve, welche die Evolute der Wellenlinie oder die Brennlinie genannt wird. Wir haben nun im ersten Abschnitt die Brennlinie einer nähern Betrachtung unterzogen und jetzt fragen wir nach der Evolvente derselben.

§. 6. Ableitung einer elementaren Construction der Wellenlinie.

Für einen Punkt (x, y) der Brennlinie gelten bekanntlich die zwei Gleichungen

$$1)\quad x(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - y(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = af\sin\varphi$$

$$2)\quad x(2f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) + y(2f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) = af\cos\varphi$$

aus welchen nun folgt, dass

$$3)\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) - \frac{\partial y}{\partial\varphi}(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) = 0$$

$$4)\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi}(2f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) + \frac{\partial y}{\partial\varphi}(2f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) = \frac{6af^2\sin\varphi}{N}(a\cos\varphi + f)$$

ist, folglich hat man

$$5)\quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{6af^2\sin\varphi}{N^2}(a\cos\varphi + f)(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi)$$

$$6)\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\frac{6af^2\sin\varphi}{N^2}(a\cos\varphi + f)(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi)$$

wenn

$$N = a^2 + 2f^2 + 3af\cos\varphi$$

gesetzt wird. Für das Linienelement der Brennlinie ergibt sich demnach der Ausdruck:

$$7) \qquad ds = -\frac{6af^2\sin\varphi}{N^2}(a\cos\varphi + f)\,l\,d\varphi$$

wenn l die Länge des einfallenden Lichtstrahles $\overline{LP_0}$ bezeichnet, also

$$l^2 = a^2 + f^2 + 2af\cos\varphi$$

gesetzt wird (Fig. 9.). Man mache nun $\overline{P_0P} = l$ und setze

$$r = \varrho + l$$

wo ϱ die Strecke $\overline{P_1F_0}$, also die Länge des reflectirten Lichtstrahles bedeutet. Weil nun aber

$$\varrho^2 = (x - a\cos\varphi)^2 + (y - a\sin\varphi)^2$$

und

$$x - a\cos\varphi = \frac{a}{N}(a + f\cos\varphi)(f - a\cos\varphi - 2f\cos^2\varphi)$$

$$y - a\sin\varphi = -\frac{a\sin\varphi}{N}(a + f\cos\varphi)(a + 2f\cos\varphi)$$

so findet man

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{N^2}(a + f\cos\varphi)^2 l^2$$

also

$$r = \varrho + l = \frac{al}{N}(a + f\cos\varphi + N)$$

oder

$$r = \frac{2l^3}{N}$$

Aus dieser Formel ergibt sich nun, dass

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = \frac{6af\sin\varphi}{N^2}(N - l^2)\,l$$

ist, somit

$$8) \qquad dr = -\frac{6af^2\sin\varphi}{N^2}(f + a\cos\varphi)\,l\,d\varphi$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) geht nun hervor, dass die Zu- oder Abnahme des Strahles $\overline{P_1P}$ mit der Länge des Linienelementes der Brennlinie im Punkte P_1 übereinstimmt. „Zieht man „demnach von L aus nach einem variabeln Punkte P_0 des reflecti- „renden Kreises einen Strahl und trägt von hier aus auf dem re- „flectirten Strahle die veränderliche Länge l ab, so ist der Ort des „Punktes P die Evolvente der Brennlinie oder die Wellenlinie.“

§. 7. Ableitung der Gleichung der Wellenlinie.

Aus obiger Construction der Wellenlinie ergeben sich nun für die Coordinaten (x, y) des Punktes P die Werte

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2a\cos\varphi + f\cos 2\varphi \\ y = 2a\sin\varphi + f\sin 2\varphi \end{array}\right. \tag{1}$$

Setzt man nun $t = e^{i\varphi}$, so folgt

$$p = x + iy = ft^2 + 2at, \quad q = x - iy = \frac{f}{t^2} + \frac{2a}{t}$$

Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} ft^2 + 2at - p, & f \\ qt^2 - 2at - f, & q \end{vmatrix} = 0$$

also auch

$$2a(q+f)t - pq + f^2 = 0 \tag{2}$$

Ferner ist auch

$$\begin{vmatrix} ft^2 + 2at - p, & ft + 2a \\ qt^2 - 2at - f, & qt - 2a \end{vmatrix} = 0$$

und aus dieser Gleichung folgt sogleich

$$(pq - f^2)t - 2a(p+f) = 0 \tag{3}$$

Nach (2) und (3) ist nun auch

$$\begin{vmatrix} 2a(q+f)t - pq + f^2, & 2a(q+f) \\ (pq - f^2)t - 2a(p+f), & (pq - f^2) \end{vmatrix} = 0$$

folglich

$$(pq - f^2)^2 - 4a^2(p+f)(q+f) = 0$$

Setzt man nun in diesem Ausdrucke für p und q obige Werte ein, so erhält man

$$(x^2 + y^2 - f^2)^2 - 4a^2[(x+f)^2 + y^2] = 0 \tag{4}$$

als Gleichung der Wellenlinie.

§. 8. Die unendlich fernen Punkte der Curve und die Asymptoten.

Um die unendlich fernen Punkte der Curve zu finden, schreibe man ihre Gleichung in der Form

$$(x^2 + y^2 - z^2 f^2)^2 - 4a^2 z^2[(x + zf)^2 + y^2] = 0$$

in welcher z das Längenmass bedeutet. Wird nun diese Curve mit der Geraden $z = 0$ geschnitten, so erhält man zur Bestimmung dieser Schnittpunkte die Gleichung

und findet

$$x^2+y^2=0$$

$$x+iy=0,\quad z=0,\qquad x-iy=0,\quad z=0$$

als unendlich ferne Punkte der Curve. Diese fallen also mit den Kreispunkten zusammen. Wir wollen nun diese Punkte noch näher untersuchen. Es sei

$$A=x^2+y^2-z^2f^2,\qquad B=(x+f)^2+y^2$$

dann ist die Gleichung der Curve, die mit $f(x, y, z)$ bezeichnet werden soll,

$$f(x,y,z)=A^2+4a^2z^2B$$

Man findet nun

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2A\frac{\partial A}{\partial x}-4a^2z^2\frac{\partial B}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2A\frac{\partial A}{\partial y}-4a^2z^2\frac{\partial B}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2A\frac{\partial A}{\partial z}-4a^2z^2\frac{\partial B}{\partial z}-8a^2zB$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2-4a^2z^2\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2A\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2-4a^2z^2\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2A\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2-4a^2z^2\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}-16a^2z\frac{\partial B}{\partial z}-8a^2B$$

etc. und die Gleichung der Curve in nächster Nähe der Kreispunkte ist somit

$$x_0^2dx^2+2x_0y_0\,dx\,dy+y_0^2dy^2=0$$

oder

$$(x_0\,dx+y_0\,dy)^2=0$$

Die beiden Kreispunkte sind somit Rückkehrpunkte der Curve und

$$x+iy=0,\quad x-iy=0$$

sind die Rückkehrtangenten.

§. 9. Die Singularitäten der Curve im Endlichen.

a) *Doppelpunkte und Rückkehrpunkte.*

Es ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x(x^2+y^2-z^2f^2)-8a^2z^2(x+zf)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y(x^2+y^2-z^2f^2)-8a^2z^2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4zf^2(x^2+y^2-z^2f^2)-8za^2((x+zf)^2+y^2)-8z^2a^2f(x+zf)$$

setzt man nun hier $z=1$, so erhält man zur Bestimmung der Doppelpunkte und Rückkehrpunkte der Curve das System von Gleichungen

1) $x(x^2+y^2-f^2)-2a^2(x+f)=0$

2) $y[(x^2+y^2-f^2)-2a^2]=0$

3) $f^2(x^2+y^2-f^2)+2a^2((x+f)^2+y^2)+2a^2f(x+f)=0$

dem aber nur der Punkt $(x=-f,\ y=0)$ genügt. Die Gleichung der Curve in der Nähe dieses Punktes hat nun die Form

4) $$(f^2-a^2)dx^2-(a^2+f^2)dy^2=0$$

und wir erkennen, dass der Punkt $(x=-f,\ y=0)$ ein Doppelpunkt der Curve ist, der sich aber für $f=0$ in einen Rückkehrpunkt verwandelt. Ferner sind

5) $$xg+y\sqrt{a^2+f^2}+fg=0$$

6) $$xg-y\sqrt{a^2+f^2}+fg=0$$

die Gleichungen der beiden Doppelpunktstangenten. Diese Tangenten sind imaginär und conjugirt, so lange $f<a$ ist; ihr Schnittpunkt ist somit ein von der Curve isolirter, reeller Punkt. Ist $f=a$, so vereinigen sich beide mit der reellen Geraden $y=0$, und $f>a$ fahren sie fort, reell zu bleiben. „Die Curve hat also im Endlichen „einen Doppelpunkt, der mit dem leuchtendon Punkte zusammen„fällt und null Rückkehrpunkte.

b) *Wendepunkte der Curve.*

Um die Gleichung der Curve auf ihre Wendepunkte und Wendungstangenten untersuchen zu können, müssen wir zuerst die Gleichung der Tangente im allgemeinen ableiten. Die Gerade, welche im Punkte P (Fig. 9.) die Wellenlinie berührt, muss auf der Linie PP_1, also auf der Tangente der Brennlinie, senkrecht stehen. Nun hat aber die Gerade PP_1 die Gleichung

$$x(f\sin 2\varphi+a\sin\varphi)-y(f\cos 2\varphi+a\cos\varphi)=af\sin\varphi$$

und

$$x=2a\cos\varphi+f\cos 2\varphi,\quad y=2a\sin\varphi+f\sin 2\varphi$$

sind die Coordinaten des Punktes P, somit ist

1) $$x(f\cos 2\varphi+a\cos\varphi)+y(f\sin 2\varphi+a\sin\varphi)=2a^2+f^2+3af\cos\varphi$$

die Gleichung der Tangente der Wellenlinie. Diese Tangente bildet mit der x Axe den Winkel $\left(2\varphi - u + \frac{\pi}{2}\right)$ und dieser muss ein Maximum oder Minimum sein, sobald die Tangente eine Wendungstangente ist, d. h. es muss sein

$$\frac{\partial\left(2\varphi - u + \frac{\pi}{2}\right)}{\partial\varphi} = 0$$

Man findet aber, dass

$$\frac{\partial\left(2\varphi - u + \frac{\pi}{2}\right)}{\partial\varphi} = \frac{a^2 + 2f^2 + 3af\cos\varphi}{f^2}$$

somit muss für die Wendungstangente

$$a^2 + 2f^2 + 3af\cos\varphi = 0$$

sein, woraus folgt, dass

$$3af\cos\varphi = -(a^2 + 2f^2), \quad 9a^2f^2\sin^2\varphi = g^2h^2$$

also auch

$$f\cos 2\varphi + a\cos\varphi = -\frac{g^2(a^2 + 8f^2)}{9a^2f}$$

$$f\sin 2\varphi + a\sin\varphi = \left(-\frac{gh^3}{9a^2f}, \frac{gh^3}{9a^2f}\right)$$

und

$$2) \qquad g(a^2 + 8f^2)x + h^3y + 9a^2fg = 0$$

$$3) \qquad g(a^2 + 8f^2)x - h^3y + 9a^2fg = 0$$

sind die Gleichungen der beiden Wendungstangenten der Curve. Sie stehen auf den Asymptoten der Brennlinie senkrecht und sind nur für das Intervall $\frac{a}{2} < f < a$ reell.

c) *Doppeltangenten.*

Wenn man zur Abkürzung

$$t = e^{i\varphi}, \quad p = x + iy, \quad q = x - iy$$

setzt, so geht die Gleichung der Tangente

$$x(f\cos 2\varphi + a\cos\varphi) + y(f\sin 2\varphi + a\sin\varphi) = 2a^2 + f^2 + 3af\cos\varphi$$

über in

$$1) \qquad fqt^4 + a(q - 3f)t^3 - 2(2a^2 + f^2)t^2 + a(p - 3f)t + fp = 0$$

und man erkennt aus dieser Formel, dass die Wellenlinie von der 4. Classe ist. Von einem Punkte der Ebene aus lassen sich demnach im allgemeinen 4 verschiedene Tangenten an die Curve ziehen.

Die allgemeine Form derselben ist

$$lp + mq + n = 0$$

wenn

$$l = at + f, \quad m = ft^4 + at^3, \quad n = -3aft^3 - (4a^2 + 2f^2)t^2 - 3aft$$

gesetzt wird. Man verlangt nun, dass für zwei verschiedene Werte von t dieselben zusammenfallen sollen. Wird ferner

$$l' = at' + f, \quad m' = ft'^4 + at'^3, \quad n' = -3aft'^3 - (4a^2 + 2f^2)t'^2 - 3aft'$$

gesetzt, so erfordert die Identität der beiden Gleichungen

$$lp + mq + n = 0, \quad l'p + m'q + n' = 0$$

die drei Bedingungen

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

Nun ist

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = (t' - t)vA, \quad \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix} = (t' - t)B$$

$$\begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = (t' - t)C$$

wo

$$A = 3af^2v^2 + (f(4a^2 + 2f^2)u + a(4a^2 - f^2))v + 3af^2u^2 + 3a^2fu$$
$$B = (3a^2fu + a(4a^2 - f^2))v + 3af^2u^2 + f(4a^2 + 2f^2)u + 3af^2$$
$$C = -afv^2 + (afu^2 + (a^2 - 2f^2)u - af)v + f^2u^3 + afu^2$$

und wenn

$$u = t + t', \quad v = tt'$$

gesetzt wird. Die Lösung $t' - t = 0$ ist zu verwerfen, und ebenso ist $v = 0$ unmöglich, weil die beiden Ausdrücke

$$3afu^2 + (4a^2 + 2f^2)u + 3af \quad \text{und} \quad u^2(fu + a)$$

keinen Factor gemein haben. Man kann daher die Betrachtung auf das System $(A = 0,\ B = 0,\ C = 0)$ beschränken. Setzt man

$$D = (3afu + 4(a^2 - f^2))v + 3af(fu + a), \quad E = 3afv + (a^2 - 2f^2)u$$

so ist

$$A + 3fC = (fu + a)D, \quad A - B = (v-1)E$$

und das System $(A = 0,\ B = 0,\ C = 0)$ kann durch das folgende ersetzt werden:

$$1) \quad \begin{cases} B = 0 \\ (fu + a)D = 0 \\ (v-1)E = 0 \end{cases}$$

dieses System zerfällt nun in die 4 folgenden Systeme:

I. $(B = 0, \quad fu + a = 0, \quad v - 1 = 0)$
II. $(B = 0, \quad fu + a = 0, \quad E = 0)$
III. $(B = 0, \quad D = 0, \quad v - 1 = 0)$
IV. $(B = 0, \quad D = 0, \quad E = 0)$

welche nun auf ihre Existenzfähigkeit näher untersucht werden sollen.

I. Durch $fu = -a$ wird

$$B = a(a^2 - f^2)(v-1)$$

und System I. ist erfüllt. II. Durch $fu = -a$ wird

$$B = a(a^2 - f^2)(v-1), \quad fE = a(3f^2 v - a^2 + 2f^2)$$

und System II. enthält somit einen Widerspruch. III. Durch $v = 1$ wird

$$B = (fu + a)(3afu + 4a^2 + 2f^2), \quad D = 3f^2 u^2 + 6afu + 4(a^2 - f^2)$$

und weil B und D keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist auch System III. unmöglich. IV. Durch $3afv = -(a^2 - 2f^2)u$ werden

$$-3fB = 3af(a^2 - f^2)u^2 + (4a^4 - 21a^2f^2 - 4f^4)u - 9af^3$$
$$3afD = -u[3af(a^2 - 5f^2)u + 4a^4 - 21a^2f^2 + 8f^4]$$

und weil auch diese Ausdrücke für B und D keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so führt auch System IV. auf einen Widerspruch. Es kann somit nur System I. bestehen und

$$fu = -a, \quad v = 1$$

ist die einzig mögliche Lösung des Systems I.

$$t \times t' = 1$$

verlangt

$$\varphi' = -\varphi, \quad \text{und} \quad t' + t = -\frac{a}{f}$$

gibt dann

$$\cos\varphi = -\frac{a}{2f}$$

und man erhält

2) $$2fx + a^2 + 2f^2 = 0$$

als Gleichung der einzigen Doppeltangente der Curve.

§. 10. Besondere Eigenschaften der Wellenlinie.

Man beschreibe um den Anfangspunkt der Coordinaten einen Kreis mit dem Radius f, ziehe vom Punkte L aus (Fig. 9.) nach einem veränderlichen Punkte P_3 dieses Kreises einen Strahl und trage von hier aus die Strecke m ab. Wird nun das Azimut dieses Strahles mit u bezeichnet, so sind

$$x = f\cos 2u + r\cos u, \quad y = f\sin 2u + r\sin u$$

die Coordinaten des Punktes P_4, somit ist

$$x^2 + y^2 - f^2 = r(r + 2f\cos u)$$

was auch die Figur 9. sofort zeigt. Ferner ist auch

$$(x+f)^2 + y^2 = (r + 2f\cos u)^2$$

und man erhält zur Bestimmung der Länge m, wenn der Punkt P_4 auf der Wellenlinie liegt, die Gleichung

$$(r^2 - 4a^2)(r + 2f\cos u)^2 = 0$$

also

1) $$m^2 = 4a^2$$

„Die Wellenlinie ist somit eine Kreisconchoide und wird erhalten, „wenn man vom leuchtenden Punkte L aus nach einem veränder- „lichen Punkte P_3 des Kreises f, den ich im folgenden Grundkreis „der Conchoide nennen will, einen Strahl zieht und von hier aus „nach beiden Seiten die constante Länge $2a$ abträgt.“

Wir bemerken hier die eigentümliche Erscheinung, dass die Länge dieser Strecke für alle Lagen des leuchtenden Punktes dieselbe bleibt.

Die x Axe schneidet die Curve in den zwei gewöhnlichen Punkten

$$x = 2a + f. \quad x = -2a + f$$

und in dem Doppelpunkte

$$x = -f$$

Ein Kreis, mit dem Radius $2a$ um den Punkt $(x = f,\ y = 0)$ beschrieben, hat die Gleichung

$$(x-f)^2 + y^2 = 4a^2$$

und schneidet die x Axe in den beiden oben angegebenen Punkten. Die Tangente dieses Kreises im Punkte $(x_0,\ y_0)$ hat die Gleichung

$$x(x_0 - f) + y y_0 - [(x_0 - f) f + 4a^2] = 0$$

und ebenso ist

$$-x y_0 + y(x_0 - f) - f y_0 = 0$$

die Gleichung der vom leuchtenden Punkte aus auf diese Tangente gefällten Normalen. Für ihren Schnittpunkt gelten somit die zwei Gleichungen

$$2)\qquad (x_0 - f)(x - f) + y_0 y = 4a^2$$

$$3)\qquad (x_0 - f) y - y_0 (x + f) = 0$$

aus welchen nun folgt, dass

$$x_0 - f = \frac{4a^2(x+f)}{x^2 + y^2 - f^2}$$

$$y_0 = \frac{4a^2 y}{x^2 + y^2 - f^2}$$

ist, und weil nun

$$(x_0 - f)^2 + y_0^2 = 4a^2$$

ist, so erhält man für die Coordinaten des Schnittpunktes P_5 (Fig. 9) die Gleichung

$$4)\qquad [x^2 + y^2 - f^2]^2 - 4a^2[(x+f)^2 + y^2] = 0$$

Derselbe liegt also auf unserer Curve 4. Grades, und wir können nun die Wellenlinie auch auf folgende Weise definiren: „Die Wellen- „linie ist der Ort der Fusspunkte der Normalen, die vom leuchten- „den Punkte aus auf die variabeln Tangenten des Kreises gefällt „werden, der mit dem Radius $2a$ um den Punkt $(x = f,\ y = 0)$ be- „schrieben wird". Dieser Kreis soll im Folgenden Leitkreis genannt werden. Sein Radius ist für alle Lagen des leuchtenden Punktes derselbe und gleich dem Durchmesser des reflectirenden Kreises.

Wir wollen ferner zeigen, dass die Wellenlinie auch als Rollcurve aufgefasst werden kann. Aus der in §. 6. angegebenen Construction der Wellenlinie geht hervor, dass

$$x = 2a\cos\varphi + f\cos 2\varphi, \quad y = 2a\sin\varphi + f\sin 2\varphi$$

die Coordinaten des Punktes P sind, somit ist

$$x + iy = 2a\,e^{i\varphi} + f\,e^{i2\varphi}$$

Um diesen Punkt zu construiren, ziehe man vom Punkte A aus (Fig. 9.) unter dem Winkel φ einen Strahl, mache $\overline{AD} = 2a$ und beschreibe um den Punkt D mit dem Radius a einen Kreis. Von D aus ziehe man unter dem Azimute 2φ einen zweiten Strahl und mache $\overline{DP} = f$, so ist P der verlangte Punkt der Curve. Wie auch der Winkel φ sich ändert, so ist doch immer Bogen P_0B gleich dem Bogen P_0C und man erkennt, dass der „mit dem Kreise D fest ver- „bundene Punkt P die Wellenlinie beschreibt, wenn dieser Kreis auf „dem festen Kreise A rollt."

Es scheint mir nicht überflüssig, am Ende dieses Abschnittes noch eine andere Definition der Brennlinie abzuleiten. Dieselbe ergiebt sich leicht aus der in §. 6. angegebenen Construction der Wellenlinie, nach welcher man vom Punkle P_0 aus (Fig. 9.) auf dem rückwärts verlängerten, reflectirten Strahle die Länge des einfallenden Lichtstrahles abträgt. Aus dieser Construction der Conchoide oder Wellenlinie geht sogleich hervor, dass die Summe des einfallenden und reflectirten Lichtstrahles gleich der Länge des Krümmungshalbmessers der Wellenlinie im Punkte P ist. Verlangt man demnach einen Kegelschnitt, dessen grosse Axe gleich dem Krümmungshalbmesser $\overline{PP_1}$ ist, und dessen Brennpunkte der leuchtende Punkt E und P_1 sind, so muss dieser Kegelschnitt durch den Punkt P_0 gehen und hat hier die Tangente des reflectirenden Kreises zu seiner Tangente, berührt also denselben in diesem Punkte. „Die ,'Brennlinie ist somit der geometrische Ort des einen Brennpunktes „eines den reflectirenden Kreis berührenden Kegelschnittes, dessen „anderer Brennpunkt der leuchtende Punkt ist, und dessen variable „grosse Axe gleich der Länge des Krümmungshalbmessers der Wellen- „linie ist."

§. 11. Länge der Wellenlinie und Grösse der von ihr eingeschossenen Fläche.

Die Länge des Bogenelementes ds der Wellenlinie ergibt sich aus den Werten der Coordinaten eines Curvenpunktes. Nach früherem sind dieselben

$$x = 2a\cos\varphi + f\cos 2\varphi, \quad y = 2a\sin\varphi + f\sin 2\varphi$$

und hieraus folgt nun

$$dx = -2(a\sin\varphi + f\sin 2\varphi)\,d\varphi, \quad dy = 2(a\cos\varphi + f\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

somit ist

1) $$ds = 2\sqrt{a^2+f^2+2af\cos\varphi}\,d\varphi$$

folglich auch

2) $$s = 2\int_0^{\varphi_1} \frac{a^2+f^2+2af\cos\varphi}{\sqrt{a^2+f^2+2af\cos\varphi}}\,d\varphi$$

Dieses Integral, das die Länge des Bogens der Wellenlinie von C an gerechnet darstellt, ist ein elliptisches Integral II. Art. Denn setze man abkürzend

$$\sin\operatorname{am} x = Sx, \quad \cos\operatorname{am} x = Cx, \quad \Delta\operatorname{am} x = Dx,$$

so geht dieses Integral durch die Substitution

$$1 - \cos\varphi = 2\,Sx$$

über in

2′) $$s = 4(a+f)\int_0^{s_1} \frac{Dx}{Cx}\,dS = 4(a+f)\,E(\operatorname{am} x')$$

wenn

$$k^2 = \frac{4af}{(a+f)^2}$$

gesetzt wird. Weil der Winkel PLP_0 in Fig. 10. auch gleich φ ist, so ist der Umfang U der Wellenlinie

3) $$U = 4\int_0^{\pi} \frac{a^2+f^2+2af\cos\varphi}{\sqrt{a^2+f^2+2af\cos\varphi}}\,d\varphi$$

$$= 8(a+f)\int_0^{1} \frac{Dx}{Cx}\,dS = 8(a+f)E$$

Bezeichnet n eine positive ganze Zahl und setzt man

$$f = na$$

so wird

$$k^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

Diesen Wert von k^2 erhält man aber auch, wenn

$$f = \frac{a}{n}$$

gesetzt wird. Wird nun der Umfang der Wellenlinie für

$$f = \frac{a}{n}$$

mit U und derjenige für

$$f = na$$

mit U' bezeichnet, so hat man

$$U = \frac{8a(n+1)}{n} E, \quad \text{für} \quad k^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

$$U' = 8a(n+1)E, \quad \text{für} \quad k^2 = \frac{4n}{(n+1)^2}$$

somit ist

$$4) \qquad U' = nU$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die von der Wellenlinie eingeschlossene Fläche zu berechnen. Bezeichnet r den Leitstrahl der Curve, also die Strecke $\overline{LP}$ (Fig. 12.), so hat man

$$\begin{aligned} r^2 &= (f + 2a\cos\varphi + f\cos 2\varphi)^2 + (2a\sin\varphi + f\sin 2\varphi)^2 \\ &= 4(a + f\cos\varphi)^2 \end{aligned}$$

und somit ist eer Inhalt dS des infinitesimalen Sectors PP_1L gleich

$$5) \qquad dS = 2(a + f\cos\varphi)^2 d\varphi$$

also

$$6) \qquad S = 2\int_0^{\varphi_1} (a + f\cos\varphi)^2 d\varphi = (2a^2 + f^2)\varphi_1 + (4af + f^2\cos\varphi_1)\sin\varphi'$$

folglich der Gesamtinhalt J der Fläche

$$7) \qquad J = 4\int_0^{\pi} (a + f\cos\varphi)^2 d\varphi = (2a)^2\pi + 2.f^2\pi$$

„Der Inhalt der von der Wellenlinie eingeschlossenen Fläche ist gleich dem Inhalte des Leitkreises plus dem doppelten Inhalte des Grundkreises der Conchoide.“ Ferner ist der Inhalt der schraffirten zweieckigen Figur CD gleich dem Inhalte des Grundkreises.

§. 12. Die Wellenlinie für besondere Lagen des leuchtenden Punktes.

Wir haben gesehen, dass die Wellenlinie eine Function von f ist, das heisst, vom Abstande des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkte des reflectirenden Kreises. Jeder Lage des Lichtpunktes

entspricht demnach auch eine besondere Form der Wellenlinie. Für $f = 0$ ist

$$x^2 + y^2 = 4a^2$$

ihre Gleichung.

$$\text{I.} \quad 0 < f < \frac{a}{2}$$

Die Curve muss die in Fig. 11. gezeichnete Form haben. Der leuchtende Punkt L ist ein von der Curve isolirter reeller Doppelpunkt. Die beiden Wendepunktstangenten

$$g(a^2 + 8f^2)x + h^3y + 9a^2fg = 0, \quad g(a^2 + 8f^2)x - h^3y + 9a^2fg = 0$$

sind imaginär und die Wellenlinie hat somit in diesem Falle keine reellen Wendepunkte. Hingegen ist die Doppeltangente

$$2fx + a^2 + 2f^2 = 0$$

reell, berührt aber die Curve in imaginären Punkten. Ferner ist

$$U = 8(a + f)E$$

und

$$J = (2a)^2\pi + 2 \,.\, f^2\pi$$

$$\text{II.} \quad f = \frac{a}{2}$$

Die Gestalt der Curve zeigt Fig. 12. Der Doppelpunkt

$$\left(x = -\frac{a}{2}, \quad y = 0\right)$$

bleibt von der Curve isolirt und die beiden Wendungstangenten vereinigen sich mit der reellen Geraden

$$x = -\frac{3}{2}a$$

fallen also mit der Doppeltangente

$$x = -\frac{3}{2}a$$

zusammen. Der Umfang U ist gleich

$$U = 12aE, \quad \text{wenn} \quad k^2 = \frac{8}{9}$$

und

$$J = \frac{9}{2} \,.\, a^2\pi$$

III. $\frac{a}{2} < f < a$

Fig. 13. zeigt uns die Gestalt der Curve für diesen Fall. Auch hier bleibt der Doppelpunkt ($x = -f$, $y = 0$) von der Curve isolirt. Hingegen werden die beiden Wendungstangenten EF und FG reell und auch die Doppeltangente

$$2fx + a^2 + 2f^2 = 0$$

berührt die Curve in den zwei reellen Punkten P und P_0.

IV. $f = a$

Die Gestalt der Wellenlinie zeigt Fig. 14. Der bis dahin von der Curve isolirt gelegene Doppelpunkt ($x = -f$. $y = 0$) hat sich in einen Rückkehrpunkt verwandelt und die beiden Wendepunktstangenten haben sich mit der Rückkehrtangente $y = 0$ vereinigt. Die Doppeltangente

$$2fx + a^2 + 2f^2 = 0$$

berührt auch in diesem Falle die Curve in den zwei reellen Punkten P und P_0. Weil hier $k^2 = 1$ ist, so ist

$$U = 16a \quad \text{und} \quad J = 6a^2\pi$$

V. $f > a$

Die Gestalt der Curve ist aus Fig. 15, erkennbar. Der Doppelpunkt ($x = -f$, $y = 0$) liegt nun auf der Curvo selber, und

$$gx + \sqrt{a^6 + f^2}y + fg = 0, \quad gx - \sqrt{a^2 + f^2}y + fg = 0$$

sind die beiden reellen Doppelpunktstangenten. Hingegen sind die Wendungstangenten wieder imaginär geworden, und die reelle Doppeltangente berührt die Curve in den beiden reellen Punkten P und P_0.

Zum Schlusse der Abhandlung will ich noch bemerken, dass Herr Prof. Sidler in Bern bei Anlass eines Aufsatzes über die Trisection des Winkels die Kreisconchoide und deren Evolute für den speciellen Fall $f = 2a$ einer sehr eingehenden Betrachtung unterzogen hat. Diese in der Litteratur schon mehrfach erwähnte Arbeit findet sich als Separatabdruck aus den Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern und ist am 11. Januar 1873 vorgetragen worden.

Bern, den 24. April 1884.

VIII.

Ueber congruente Raumteilungen.

Von

V. Schlegel.

Die Aufgabe, einen beliebig gekrümmten dreidimensionalen Raum durch vollständige „Ebenen“ (d. h. Flächen von constanter Krümmung) in congruente Teile zu zerlegen, ist für positive Krümmung von Hrn. Hossfeld (Schlöm. Ztschr. XXXI, 310), für negative von Hrn. Dyck (Verh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1883) behandelt worden. — Auf wesentlich anderem Wege gelangt man, wie im Folgenden gezeigt werden soll, zur Lösung dieser Aufgabe, wenn man von den elf homogenen Ausfüllungen dreidimensionaler Räume durch homogene Polyeder ausgeht, wie ich sie in meiner „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“ (Nova Acta Acad. Leop. XLIV, 440 ff.) [1]) dargestellt habe. — Dieser Weg lässt gleichzeitig die Gruppirung der Teilkörper und die Beziehungen der einzelnen Fälle zu den regelmässigen Körpern des vierdimensionalen Raumes besonders deutlich hervortreten.

Ein Polyeder nenne ich homogen, wenn alle seine Seitenflächen von gleichvielen Kanten begrenzt sind, und auch in allen Ecken gleichviele Kanten zusammenstossen. (Das regelmässige Polyeder ist also ein specieller Fall des homogenen.). — Unter homogener Ausfüllung eines Raumes mit homogenen Polyedern verstehe ich diejenige, bei welcher in jeder Ecke sowie in jeder Kante gleichviele Körper zusammenstossen. Solcher homogener Ausfüllungen giebt es nun elf. Es kann nämlich der positiv gekrümmte Raum in

---

1) Ich citire diese Abhandlung im Folgenden kurz als „Nova Acta“.

5, 16, 600 Tetraeder, 8 Hexaeder, 24 Oktaeder und 120 Dodekaeder geteilt werden, der ebene Raum in unendlich viele Hexaeder, der negativ gekrümmte in unendlich viele Hexaeder, Ikosaeder, und auf zwei verschiedene Arten in unendlich viele Dodekaeder. (Nova Acta S. 443 ff. Sätze VIII, IX, X). In jedem dieser elf Fälle kann man nun die Teilkörper als congruente regelmässige Polyeder annehmen, und erhält hierdurch bereits ebensoviele congruente Raumteilungen. — Diese Raumteilungen sind einerseits specieller als die Eingangs erwähnten, insofern sie homogen sind (im oben erklärten Sinne), andrerseits aber allgemeiner, insofern sie auch solche Fälle umfassen, bei welchen die Teilung nicht durch vollständige Ebenen, sondern nur durch Stücke derselben bewirkt wird.

Ein analoges anschauliches Beispiel gewähren für positive Krümmung die congruenten und homogenen Teilungen der Kugelfläche mit Hilfe der Ecken der einbeschriebenen regelmässigen Polyeder. Aus diesen Teilungen gehen congruente (nicht homogene) Teilungen in dem Eingangs festgestellten Sinne dadurch hervor, dass die Teilbogen zu ganzen Kreisen vervollständigt werden. Man bemerkt dabei erstens, dass die Maximalzahlen von congruenten Kugeldreiecken in denjenigen Fällen erreicht werden, wo diese Dreiecke nicht gleichschenklig sind, während andernfalls die Teilung durch weitere grösste Kugelkreise fortgesetzt werden kann, zweitens, dass im Falle des Oktaeders die drei vorhandenen grössten Kugelkreise bereits eine congruente Teilung der verlangten Art liefern, drittens, dass man in mehreren Fällen von verschiedenen Anfangsfiguren aus zu gleichen Teilungen gelangt (Tetraeder und Hexaeder liefern das 24-teilige, Dodekaeder und Ikosaeder das 120-teilige Netz durch einfache Vervollständigung der grössten Kugelkreise, Oktaeder und Hexaeder zusammen das 48-teilige, wenn man die grössten Kugelkreise des einen durch die des andern vervollständigt), viertens, dass diejenigen beiden Arten der congruenten Kugelteilung fehlen, welche aus den beiden Arten uneigentlicher regelmässiger Polyeder hervorgehen [1]).

---

1) Bedeuten s, e, k der Reihe nach die Anzahl der Seiten, Ecken und Kanten eines regelmässigen Polyeders, bei welchem die Anzahl der in jeder Ecke zusammenstossenden n-Ecke gleich p ist, so ist (Nova Acta S. 367):

$$s = \frac{4p}{2(n+p)-np}; \quad e = \frac{4n}{2(n+p)-np}; \quad k = \frac{2np}{2(n+p)-np}$$

In diesen Formeln ist für die uneigentlichen Polyeder $p = 2$ oder $n = 2$ zu setzen.

Für $p = 2$ erhält man $s = 2$, $e = n$, $k = n$; d. h. das entsprechende Polyeder hat als Ecken und Kanten die Ecken und Seiten eines regelmässigen, einem grössten Kugelkreise einbeschriebenen n-Ecks, und als Flächen die

Aus den oben erwähnten elf Arten congruenter Raumteilung lassen sich nun zahlreiche andere ableiten, indem man das Princip der Homogenität aufgiebt, und jeden Teilkörper auf alle möglichen Arten in congruente Körper zerlegt. Unter diesen Zerlegungen sind diejenigen die wichtigsten, bei welchen ein Körper in die grösstmögliche Anzahl congruenter Körper geteilt wird. Denn alle übrigen Zerlegungsarten lassen sich aus diesen durch gruppenweise Zusammenfassung der Teilkörper herstellen. Bei jenen Zerlegungen maximaler Teilzahl, die wir „Hauptteilungen" nennen wollen, gruppiren sich nun die teilenden Flächenstücke notwendig zu vollständigen „Ebenen". Denn andernfalls würde die Vervollständigung der etwa vorhandenen Flächenstücke zu vollständigen Ebenen eine weitere Teilung der bereits gebildeten Teilkörper bewirken, bei welcher vermöge der allseitigen Symmetrie des ganzen Raumgebildes alle Körper nochmals in congruente Teile zerfallen müssten, gegen die Annahme einer bereits vorhandenen Maximalteilung. — Es werden hiernach die Hauptteilungen zu den im Eingang dieses Aufsatzes erwähnten congruenten Raumteilungen durch vollständige Flächen gehören. — Andrerseits werden neben diesen Hauptteilungen noch andere congruente Teilungen durch vollständige Flächen aus den uneigentlichen regelmässigen vierdimensionalen Körpern hervorgehen, analog wie wir es bei der Teilung der Kugelfläche gesehen haben.

Im Folgenden sollen nun zunächst die Hauptteilungen der hier in Betracht kommenden regelmässigen Polygone und der regelmässigen Polyeder zusammengestellt werden, alsdann die homogenen Teilungen des positiv und des negativ gekrümmten Raumes. Nach diesen Vorbereitungen werden dann die congruenten Teilungen dieser Räume (Hauptteilungen) durch vollständige Flächen abgeleitet werden.

Die Hauptteilung des gleichseitigen Dreiecks wird, wie man leicht findet, durch die Mittellinien bewirkt und liefert 6 congruente Dreiecke. — Die des Quadrates erfordert streng genommen unendlich viele Constructionen, da jedes der durch die

---

doppelt zu denkende Fläche dieses Polygons. Die zwischen den Ecken desselben liegenden Teilbogen des grössten Kugelkreises teilen zusammen die Kugelfläche in 2 Halbkugelflächen.

Für $n = 2$ folgt: $s = p$, $e = 2$, $k = p$. Das entsprechende (dem vorigen conjugirte) Polyeder hat als Ecken die Endpunkte eines Durchmessers, als Kanten den p-fach zu denkenden Durchmesser selbst. Die durch die Endpunkte dieses Durchmessers gehenden, im Winkelabstand $\frac{360^0}{p}$ auf einander folgenden grössten Kugelkreise teilen die Kugelfläche in p congruente Zweiecke. (Vgl. hierüber auch Hess, Lehre von der Kugelteilung, S. 22.)

Diagonalen entstehenden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke beständig in neue congruente Dreiecke derselben Art geteilt werden kann. Da aber das Quadrat in unserem Falle nur als Grundfläche einer vierseitigen Pyramide (der Bestimmungspyramide des Würfels) vorkommt, so können, wie man leicht sieht, nur diejenigen congruenten Quadratteilungen in Betracht kommen, bei welchen alle Teilungslinien durch den Mittelpunkt gehen; denn nur diese führen zu congruenten Teilungen der eben erwähnten Pyramide. Es ist also für unseren Zweck, die Hauptteilung des Quadrates diejenige durch die Diagonalen und Mittellinien. Dieselbe liefert 8 congruente Dreiecke[1]). — Beim regelmässigen Fünfeck endlich wird (was auch für die beiden vorhergehenden Figuren gilt) die Hauptteilung durch die grossen und die kleinen Radien bewirkt; man erhält 10 congruente Dreiecke.

Nunmehr können zunächst die Bestimmungspyramiden der regelmässigen Polyeder mittelst Ebenen durch die Höhe und die Hauptteilungslinien der Grundfläche in ebensoviele congruente Teile zerlegt werden wie die Grundfläche. Demnach zerfällt durch die Hauptteilung:

Tabelle A.

1)	das Tetraeder	in	4 . 6 = 24	congruente Tetraeder
2)	„ Oktaeder	„	8 . 6 = 48	„ „
3)	„ Ikosaeder	„	20 . 6 = 120	„ „
4)	„ Hexaeder	„	6 . 8 = 48	„ „
5)	„ Dodekaeder	„	12 . 10 = 120	„ „

Es sei jetzt daran erinnert, dass dieselben Ebenen, welche, durch den Mittelpunkt, die Kanten, und die Hauptteilungslinien der Flächen gelegt, die Hauptteilung eines regelmässigen Polyeders bewerkstelligen, auch die dem Polyeder umbeschriebene Kugelfläche in Linien einer Hauptteilung schneiden und die Kugelfläche in ebensoviele congruente Teile (sphärische Dreiecke) zerlegen, wie das Polyeder[2]).

---

1) Für das Quadrat existirt noch eine andere Art von Hauptteilungen, nämlich mittelst zweier auf einander senkrechter durch den Mittelpunkt gehender Linien, Da jedoch hier die letzten Teile Vierecke sind, so kann auf diese Teilung nicht, wie in den sonstigen Fällen, eine Raumteilung in Tetraeder gegründet werden, wir schliessen sie daher hier aus.

2) Durch dieses Verfahren geht im Einzelnen aus dem Tetraeder das Tetrakishexaedernetz (X bei Hess a. a. O.), aus Oktaeder und Hexaeder das Hexakisoktaedernetz (XV), aus Ikosaeder und Dodekaeder das Diakishexekontaedernetz (XVI) hervor.

In durchaus analoger Weise entsprechen nun (wie ich Nova Acta S. 440 ff. gezeigt habe) zunächst den sechs homogenen Körpern des vierdimensionalen Raumes eine gleiche Anzahl homogener Ausfüllungen (oder Teilungen) des positiv gekrümmten dreidimensionalen Raumes. Speciell gehen aus den „regelmässigen Körpern des vierdimensionalen Raumes" homogene congruente Teilungen des positiv gekrümmten dreidimensionalen Raumes hervor, und aus diesen wieder die Hauptteilungen, indem jeder dreidimensionale Grenzkörper eines solchen vierdimensionalen Körpers der Hauptteilung unterworfen und diese Hauptteilung auf den dem vierdimensionalen Körper umbeschriebenen positiv gekrümmten Raum in analoger Weise wie oben übertragen wird.

In analoger Weise entstehen auch für den negativ gekrümmten Raum zunächst die homogenen Teilungen (von denen schon in der Einleitung die Rede war), sodann die congruenten, endlich die Hauptteilungen. Da der negativ gekrümmte Raum, ebenso wie der ebene, in unendlich viele congruente Teile zerlegt werden kann, so bilden hier nur die Hauptteilungen der regelmässigen Polyeder das Kriterium für die Hauptteilungen des Raumes.

Zunächst ist nun die Anzahl der Körper (c), Flächen (f), Kanten (k) und Ecken (e) in einem regelmässigen vierdimensionalen Körper, und demnach auch gleichzeitig in der mit seiner Hilfe bewirkten „homogenen Teilung des positiv gekrümmten dreidimensionalen Raumes" aus folgender Tabelle ersichtlich (vgl. Nova Acta S. 434):

Tabelle B.

	c	f	k	e
1) Fünfzell	5	10	10	5
2) Sechszehnzell	16	32	24	8
3) Sechshundertzell	600	1200	720	120
4) Achtzell	8	24	32	16
5) Vierundzwanzigzell	24	96	96	24
6) Hundertzwanzigzell	120	720	1200	600

Es möge ferner für „sämtliche Fälle homogener Raumteilung" (also Teilung des positiv gekrümmten, ebenen und negativ gekrümmten Raumes) P die Anzahl der in jeder Ecke und x die Anzahl der in jeder Kante zusammenstossenden Körper bedeuten (in jeder Fläche stossen natürlich 2 Körper zusammen), ausserdem p die Anzahl der

in jeder Ecke eines einzelnen Körpers zusammenstossenden Kanten (oder Flächen). Dann ist Nova Acta S. 401, Formel 34a)

$$x = \frac{2pP}{P(p-2)+4}$$

mithin gelten für die elf Fälle der Teilung folgende Zahlen:

Tabelle C.

	p	P	x	Krümmung des geteilten Raumes
1) Fünfzellige tetraedrische Teilung	3	4	3	+
2) Sechszehnzellige tetraedr. Teilung	3	8	4	+
3) Sechshundertzellige tetraedr. Tlg.	3	20	5	+
4) Achtzellige hexaedrische Teilung	3	4	3	+
5) Vierundzwanzigzellige oktaedr. Tl.	4	6	3	+
6) Hundertzwanzigz. dodekaedr. Tl.	3	4	3	+
7) Unendliche hexaedrische Teilung	3	8	4	0
8) Unendliche ikosaedrische Teilung	5	12	3	—
9) Unendliche hexaedrische Teilung	3	20	5	—
10) Unendliche dodekaedr. T. 1. Art	3	8	4	—
11) Unendliche dodekaedr. T. 2. Art	3	20	5	—

Bei der nun vorzunehmenden Aufstellung aller Hauptteilungen des positiv und des negativ gekrümmten Raumes soll zur besseren Veranschaulichung der den Raum ausfüllenden Zellgewebe in jedem der Fälle 1 — 6 und 8 — 11 die Anzahl der Körper mitbestimmt werden, welche in einem Eckpunkte, Kanten-, Flächen- und Körpermittelpunkte der der Teilung zu Grunde liegenden regelmässigen Polyeder zusammenstossen. — Alle Teilkörper sind Tetraeder, die von constant gekrümmten Flächen begrenzt werden, und schliessen einen Teil des (positiv oder negativ) gekrümmten Raumes in sich.

I. Congruente Teilungen des positiv gekrümmten Raumes.

1. Die fünfzellige tetraedrische Teilung liefert, wenn jedes der fünf regelmässigen congruenten Tetraeder der Hauptteilung in 24 congruente Tetraeder (s. Tabelle A.) unterworfen wird, eine Zerlegung des Raumes in 5.24 =

1) 120 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. S. 315, Fall 4.)

An jedem der 5 Körpermittelpunkte liegen 24 Tetraeder, an jedem der 10 Flächenmittelpunkte (s. Tabelle B.) 2.6 = 12 Tetraeder, an jedem der 10 Kantenmittelpunkte 3.4 = 12 Tetraeder (da $x = 3$, nach Tabelle C), endlich an jedem der 5 Eckpunkte 4.6 = 24 Tetraeder (da $P = 4$, nach Tabelle C.)

Anm. Bei der Hauptteilung eines regelmässigen Tetraeders liegen nämlich, wie man unmittelbar erkennt, an jedem Flächenmittelpunkte 6, an jedem Kantenmittelpunkte 4, an jedem Eckpunkte 6 Tetraeder. Diese Zahlen sind noch bzhw. mit der Zahl der in einer Fläche, Kante oder Ecke zusammenstossenden regelmässigen Tetraeder zu multipliciren.

2. Die sechszehnzellige tetraedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Tetraeders eine Zerlegung des Raumes in 16.24 =

2) 384 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. Fall 5.) [1])

An jedem der 16 Körpermittelpunkte liegen 24 Tetraeder, an jedem der 32 Flächenmittelpunkte 2.6 = 12 Tetraeder, an jedem der 24 Kantenmittelpunkte 4.4 = 16 Tetraeder, an jedem der 8 Eckpunkte 8.6 = 48 Tetraeder.

3. Die sechshundertzellige tetraedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Tetraeders eine Zerlegung des Raumes in 600.24 =

3) 14400 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. Fall 7.)

An jedem der 600 Körpermittelpunkte liegen 24 Tetraeder, an jedem der 1200 Flächenmittelpunkte 2.6 = 12 Tetraeder, an jedem der 720 Kantenmittelpunkte 5.4 = 20 Tetraeder, an jedem der 120 Eckpunkte 20.6 = 120 Tetraeder.

4. Die achtzellige hexaedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Hexaeders eine Zerlegung des Raumes in 8.48 = 384 congruente Tetraeder.

---

1) Zu dieser Teilung gelangt auch (vom Standpunkte der Substitutionsgruppen aus) Goursat. (Etude des surfaces qui admettent tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier III. Ann. scient. de l'Ecole norm. sup. (3). IV. 335 (1887).)

An jedem der 8 Körpermittelpunkte liegen 48 Tetraeder, an jedem der 24 Flächenmittelpunkte 2.8 = 16 Tetraeder, an jedem der 32 Kantenmittelpunkte 3.4 = 12 Tetraeder, an jedem der 16 Eckpunkte 4.6 = 24 Tetraeder.

Anm. Denn bei der Hauptteilung eines regelmässigen Hexaeders liegen an jedem Flächenmittelpunkte 8, an jedem Kantenmittelpunkte 4, an jedem Eckpunkte 6 Tetraeder.

Hiernach ist die eben erhaltene Teilung identisch mit der in Nr. 2. beschriebenen, da nur die Benennung der Punkte in beiden verschieden ist.

5. Die vierundzwanzigzellige oktaedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Oktaeders eine Zerlegung des Raumes in 24.48 =

4) 1152 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. Fall 6.)

An jedem der 24 Körpermittelpunkte liegen 48 Tetraeder, an jedem der 96 Flächenmittelpunkte 2.6 = 12 Tetraeder, an jedem der 96 Kantenmittelpunkte 3.4 = 12 Tetraeder, an jedem der 24 Eckpunkte 6.8 = 48 Tetraeder.

Anm. Denn bei der Hauptteilung eines regelmässigen Oktaeders liegen an jedem Flächenmittelpunkte 6, an jedem Kantenmittelpunkte 4, an jedem Eckpunkte 8 Tetraeder.

6. Die hundertzwanzigzellige dodekaedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Dodekaeders eine Zerlegung des Raumes in 120.120 = 14400 congruente Tetraeder.

An jedem der 120 Körpermittelpunkte liegen 120 Tetraeder, an jedem der 720 Flächenmittelpunkte 2.10 = 20 Tetraeder, an jedem der 1200 Kantenmittelpunkte 3.4 = 12 Tetraeder, an jedem der 600 Eckpunkte 4.6 = 24 Tetraeder.

Anm. Denn bei der Hauptteilung eines regelmässigen Dodekaeders liegen an jedem Flächenmittelpunkte 10, an jedem Kantenmittelpunkte 4, an jedem Eckpunkte 6 Tetraeder.

Die eben gefundene Teilung ist also identisch mit der in Nr. 3. beschriebenen, da wiederum nur die Benennung der Punkte in beiden verschieden ist.

Es sind hiernach im ganzen aus den 6 regelmässigen vierdimensionalen Körpern 4 congruente Maximalteilungen des positiv

gekrümmten Raumes hervorgegangen. — Um zu weiteren derartigen Teilungen zu gelangen, sind zunächst die uneigentlichen regelmässigen vierdimensionalen Körper zu ermitteln. Denn auch auf der Kugelfläche geht eine analoge Teilung aus den beiden uneigentlichen regelmässigen Polyedern hervor.

Es sei nun zunächst daran erinnert, dass unter den regelmässigen Polygonen ein uneigentliches existirt, das von der doppelt gedachten Strecke (AB) begrenzte Zweieck, welches 2 einfache Eckpunkte und 2 sich deckende Seiten enthält, aber keine Fläche einschliesst. Seine Endpunkte teilen die über AB als Durchmesser beschriebene Kreislinie in zwei congruente Bogen. — Unter den regelmässigen Polyedern giebt es zwei uneigentliche, nämlich erstens die p-fache Strecke (AB) mit 2 Eckpunkten, p zusammenfallenden Kanten und p zusammenfallenden Nullflächen (Zweiecken), welche keinen Körper einschliessen, zweitens das doppelt gedachte regelmässige Polygon mit n Ecken, n Kanten und 2 zusammenfallenden Flächen, welches ebenfalls keinen Körper einschliesst. (Beide genügen offenbar der Bedingung der Euler'schen Polyeder $e+f=k+2$). — Denken wir uns das erste dieser Polyeder als Durchmesser (Axe) einer Kugelfläche, A und B als Pole, und das zweite Polyeder dem zugehörigen Aequator einbeschrieben, so geht durch Uebertragung der Kanten des ersten auf die Kugelfläche eine Teilung derselben in n congruente Zweiecke (Meridianteilung) hervor, und durch Uebertragung der Kanten des zweiten auf die Kugelfläche eine Teilung derselben in 2 Halbkugeln (Aequatorteilung). Beide zusammen geben eine Maximalteilung der Kugelfläche in $2n$ congruente Dreiecke. (Vgl. auch die Fussnote S. 155).

Um nun in analoger Weise die uneigentlichen regelmässigen vierdimensionalen Körper und ihren Zusammenhang mit der Teilung des positiv gekrümmten Raumes zu ermitteln, haben wir nur in der Formel

$$x=\frac{2pP}{P(p-2)+4}$$

(S. 159) die Annahme $p<3$ oder $x<3$ oder $P<4$ zu machen, da $p=x=3$, $P=4$ die Minimalwerte sind, welche zu eigentlichen Körpern jener Art führen (Nova Acta S. 401). — Man erhält hierbei nur 2 Combinationen, nämlich

$$p=2,\quad x=P \quad \text{und} \quad P=2,\quad x=2$$

Im ersten Falle kann x (oder P), im zweiten p jeden beliebigen Wert annehmen.

Im ersten Falle wird der vierdimensionale Körper von beliebig vielen (n) zusammenfallenden regelmässigen Polygonen begrenzt, da die Annahme $p = 2$ die Bedeutung hat, dass an die Stelle der den Körper begrenzenden regelmässigen Polyeder ebensolche (doppelte) Polygone treten, und die Annahme $x = P$ festsetzt, dass in jeder Ecke und jeder Kante eine beliebige aber gleiche Anzahl solcher Polygone zusammenstösst. Diese Polygone sind Nullkörper und schliessen keinen vierdimensionalen Raum ein. Das ganze Gebilde ist hiernach vollkommen analog zu dem ersten der uneigentlichen regelmässigen Polyeder.

Im zweiten Falle wird der vierdimensionale Körper von zwei zusammenfallenden regelmässigen Polyedern beliebiger Art (da p beliebig ist) begrenzt. Es stossen dann in der Tat, wie die Bedingungen $P = 2$ und $x = 2$ verlangen, in jeder Ecke und jeder Kante 2 Polyeder zusammen. Auch hier ist der von den beiden Körpern begrenzte vierdimensionale Raum null, und das ganze Gebilde ist analog dem zweiten uneigentlichen regelmässigen Polyeder [1]).

Im ersten Falle gelangt man durch Uebertragung der Polygonkanten auf den umbeschriebenen Kreis und durch Uebertragung der sich deckenden beliebig vielen (σ) Kreisflächen in den positiv gekrümmten Raum zu einem Systeme congruenter Kugelflächen, die sich alle in demselben grössten Kreise schneiden und halbiren, und von denen je zwei benachbarte immer gleiche Winkelabstände haben. Dieselben teilen den Raum in 2σ congruente Teile. — Man kann dieses System in analoger Weise in den ebenen dreidimensionalen Raum projiciren, wie die gewöhnlichen Kartendarstellungen der östlichen oder westlichen Erdhalbkugel das analoge System der Meridiane auf die Ebene projicirt zeigen. Zu diesem Zwecke denke man sich in einem rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensysteme die Kugelfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

construirt, und innerhalb derselben über und unter dem Kreise

---

1) Beide Körper genügen der zum Euler'schen Polyedersatz analogen Bedingung der vierdimensionalen Körper

$$E + S - K - C = 0$$

(S. Nova Acta S. 397, Fussnote). Es ist nämlich im ersten Falle

$$E = K = n, \quad S = C$$

im zweiten

$$E + S = K + 2 \quad \text{und} \quad C = 2$$

wobei die Zahl der Ecken, Kanten, Flächen und Körper bzhw. mit E, K, S, C bezeichnet ist.

$$x^2+y^2=r^2$$

beliebig viele Kugelkappen, deren Kugelmittelpunkte sämtlich auf der z-Axe liegen. Dieselben teilen den Kugelraum in eine Reihe von Schalen, deren jede von zwei in dem Kreise

$$x^2+y^2=r^2$$

sich schneidenden Kappen begrenzt ist.

Ein zweites System von Kugelflächen (Anzahl τ), die unter sich und mit denen des vorigen Systems congruent sind, ebenfalls in gleichen Winkelabständen auf einander folgen und die letzteren Flächen rechtwinklig schneiden, vollendet die Teilung des positiv gekrümmten Raumes in eine Maximalzahl von $2\sigma.2\tau =$

5) $4\sigma\tau$ cogruenten Tetraedern

(Hossfeld a. a. O. Fall 3).

In dem soeben beschriebenen Projectionsgebilde wird diese Teilung durch ein System an die Stelle grösster Kugelflächen tretender Ebenen vollendet, die alle durch die z-Axe gehen und in gleichen Winkelabständen auf einander folgen, ebenso wie in der oben erwähnten Darstellung der Halbkugel auf der Ebene die Maximalteilung in $2n$ sphärische Dreiecke durch den als Gerade erscheinenden Aequator vollendet wird.

Bestehen die beiden Kugelsysteme nur aus je 2 Orthogonalkugeln, so ist

$$\sigma = \tau = 2$$

und man erhält als speciellen Fall die (schon Nova Acta S. 442 unter 1) beschriebene) Maximalteilung des positiv gekrümmten Raumes in 16 congruente Tetraeder mittelst vier auf einander senkrechter Kugelflächen (auch hervorgehend aus dem Sechszehnzell). — Das Analogon hierzu ist die Kugelteilung mittelst zweier sich senkrecht schneidenden Meridiankreise und des Aequators.

Im zweiten Falle gelangt man zunächst durch Uebertragung der Polyederflächen auf die umbeschriebene Kugel zu einer Teilung des positiv gekrümmten Raumes in zwei congruente Hälften mittelst dieser Kugelfläche selbst. Legt man nun, orthogonal zu dieser Kugelfläche, diejenigen ebenen Räume, welche das zu Grunde gelegte regelmässige Polyeder in den Ebenen schneiden, die seine Hauptteilung bewirken, so schneiden dieselben ebenen Räume den positiv gekrümmten Raum in Kugelflächen, welche jede der vorher erhaltenen Hälften dieses Raumes in eine der Hauptteilung des Polyeders ent-

sprechende Anzahl von Tetraedern zerlegen. — Hierbei ist das Tetraeder als Ausgangskörper auszuschliessen, da seine Teilungsebenen dasselbe Resultat (24 Tetraeder) ergeben, wie die Teilung des Hexaeders durch die 6 Ebenen, welche durch je zwei gegenüberliegende Kanten gehen, eine Teilung, die erst durch das Hinzutreten dreier durch den Mittelpunkt gehenden und den Seitenflächen des Hexaeders parallelen Ebenen zu einer Maximalteilung wird. (Vgl. Fussnote S. 157).

Im Uebrigen ist der eben entwickelte Gedankengang durchaus analog demjenigen, welcher von der Teilung der Kugelfläche in zwei Halbkugeln zu derjenigen in $2n$ congruente sphärische Dreiecke führt (d. h. zu der S. 162 besprochenen combinirten Aequator- und Meridianteilung).

Unter Zugrundelegung des Oktaeders oder Hexaeders ergiebt sich demnach eine Teilung jeder Hälfte des constant positiv gekrümmten Raumes in 48 congruente Tetraeder (vgl. Tabelle A.), und eine Teilung des ganzen Raumes in 2.48 =

6) 96 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. Fall 1).

Unter Zugrundelegung des Dodekaeders oder Ikosaeders ergiebt sich eine Teilung jeder Hälfte des constant positiv gekrümmten Raumes in 120 congruente Tetraeder, demnach eine Teilung des ganzen Raumes in 2.120 =

7) 240 congruente Tetraeder

(Hossfeld a. a. O. Fall 2).

Hiermit sind die 7 von Hrn. Hossfeld ermittelten Fälle erschöpft. — In den drei hier zuletzt behandelten Fällen ist übrigens die Teilung des Raumes durch vollständige Flächen unmittelbar einleuchtend.

II. Congruente Teilungen des negativ gekrümmten Raumes.

1. Die unendliche ikosaedrische Teilung liefert, wenn jedes Ikosaeder der Hauptteilung in 120 Tetraeder unterworfen wird (S. Tabelle A.), eine Zerlegung des Raumes in congruente Tetraeder, die durch folgende Eigenschaften charakterisirt ist.

An jedem Körpermittelpunkte liegen 120 Tetraeder, an jedem Flächenmittelpunkte

$$2 . 6 = 12 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Kantenmittelpunkte

$$3 . 4 = 12 \text{ Tetraeder}$$

(da $x = 3$, nach Tabelle C.), endlich an jedem Eckpunkte

$$12 . 10 = 120 \text{ Tetraeder}$$

(da $P = 12$, nach Tabelle C.)

Anm. Denn bei der Hauptteilung eines regelmässigen Ikosaeders liegen an jedem Flächenmittelpunkte 6, an jedem Kantenmittelpunkte 4, an jedem Eckpunkte 10 Tetraeder.

2. Die unendliche hexaedrische Teilung liefert durch Hauptteilung jedes Hexaeders eine Zerlegung des Raumes in congruente Tetraeder, für welche folgende Zahlen gelten.

An jedem Körpermittelpunkte liegen

$$48 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Flächenmittelpunkte

$$2 . 8 = 16 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Kantenmittelpunkte

$$5 . 4 = 20 \text{ Tetraeder}$$

(da $x = 5$, nach Tabelle C.), an jedem Eckpunkte

$$20 . 6 = 120 \text{ Tetraeder}$$

(da $P = 20$, nach Tabelle C.). (Vgl. Anm. zu Nr. 4, S. 161).

3. Die unendliche dodekaedrische Teilung 1. Art liefert durch Hauptteilung jedes Dodekaeders eine Zerlegung des Raumes in congruente Tetraeder, für welche folgende Zahlen gelten.

An jedem Körpermittelpunkte liegen

$$120 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Flächenmittelpunkte

$$2.10 = 20 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Kantenmittelpunkte

$$4.4 = 16 \text{ Tetraeder}$$

(da $x = 4$, nach Tabelle C.), an jedem Eckpunkte

$$8.6 = 48 \text{ Tetraeder}$$

(da $P = 8$, nach Tabelle C.). (Vgl. Anm. zu Nr. 6, S. 161).

Hiernach ist die eben erhaltene Teilung identisch mit der unter Nr. 2. beschriebenen, da nur die Benennung der Punkte in beiden verschieden ist.

Die Mitten der bei Teilung 2 um einen Punkt herum liegenden 20 Hexaeder sind die Ecken eines Dodekaeders der Teilung 3. Und die Mitten der bei Teilung 3 um einen Punkt herum liegenden 8 Dodekaeder sind die Ecken eines Hexaeders der Teilung 2.

4. Die unendliche dodekaedrische Teilung 2. Art liefert folgende Zerlegung des Raumes in congruente Tetraeder.

An jedem Körpermittelpunkte liegen

$$120 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Flächenmittelpunkte

$$2.10 = 20 \text{ Tetraeder}$$

an jedem Kantenmittelpunkte

$$5.4 = 20 \text{ Tetraeder}$$

(da $x = 5$, nach Tabelle C.), an jedem Eckpunkte

$$20.6 = 120 \text{ Tetraeder}$$

(da $P = 20$, nach Tabelle C.).

Wir haben hiernach im ganzen drei congruente Maximalteilungen des constant negativ gekrümmten Raumes erhalten.

Diese letzteren Teilungen sind, wie ich einer gef. brieflichen Mitteilung des Herrn Prof. Dyck entnehme, nicht die einzigen ihrer Art. Es giebt neben denselben noch andere, deren Eckpunkte entweder innerhalb oder auf der „Fundamentalkugel" der Massbestimmung (vgl. z. B. den Eingangs citirten Aufsatz des Hrn. Dyck p. 70.

Fall 3) gelegen sind. Um zu diesen zu gelangen, müssten die homogenen Teilungen des negativ gekrümmten Raumes eine ähnliche Vervollständigung erfahren, wie es oben mit denen des positiv gekrümmten Raumes geschehen ist. Doch mag im Interesse der Kürze dieser Hinweis genügen.

Es sei schliesslich bemerkt, dass die oben mit 1) bis 4) bezeichneten Teilungen des positiv gekrümmten Raumes an den von mir hergestellten Projectionsmodellen der regelmässigen vierdimensionalen Körper (Verlag von Brill in Darmstadt) veranschaulicht werden können, indem es nur erübrigt, die in jenen Modellen auftretenden Polyeder den oben erwähnten Hauptteilungen unterworfen zu denken, was der geometrischen Vorstellungskraft keine Schwierigkeit bereitet.

Hagen i./W.

IX.

Transformationen der Potenzreihen ganzer und reciproker Zalen.

Von

Franz Rogel.

Die Quotienten $\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$ und $\frac{\cos n\varphi}{\cos \varphi}$ lassen sich auf zweierlei Arten in endliche Reihen verwandeln. Durch wiederholtes Differentiiren und Integriren und Specialisirungen des Bogens entstehen eigenartige mit den Potenzreihen der ganzen und der reciproken Zalen bzhw. gleichwertige Reihen, welche die Bernoulli'schen resp. Euler'schen Zalen nicht enthalten.

I. Reihen mit geradem Exponenten und Zeichenfolge und Reihen mit ungeradem Exponenten und Zeichenwechsel.

1. Transformation der Reihen.

$$S_{2n} = 1^{2n} + 2^{2n} + \ldots + j^{2n}$$

$$T_{2n} = 1^{2n} + 3^{2n} + \ldots + k^{2n}$$

$$U_{2n+1} = 1^{2n+1} - 3^{2n+1} + 5^{2n+1} + \ldots + (-1)^{\frac{k-1}{2}} k^{2n+1}$$

$$V_{2n} = 1^{2n} - 2^{2n} + 3^{2n} + \ldots + (-1)^{j+1} j^{2n}$$

Durch $2n$ und $2n+1$ maliges Differentiiren der für jeden Wert von φ und für ungerade m giltigen Formel:

$$\Phi \equiv \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \dots + \cos(m-1)\varphi = -\tfrac{1}{2} + \frac{\sin m\varphi}{2\sin\varphi}$$

$$= m - \frac{m(m^2-1^2)}{3!}\sin^2\varphi + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\sin^4\varphi \dots$$

$$\dots + \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}} m(m^2-1^2)\dots[m^2-\overline{m-2}^2]}{m!}\sin^{m-1}\varphi \qquad 1)$$

entsteht, wenn

$$\varphi = 0, \quad = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad = \frac{\pi}{4}$$

gesetzt wird

$$D_\varphi^{2n}\Phi_{\varphi=0} = (-1)^n 2^{2n} S_{2n}$$

$$= \frac{m}{2}\left[-\frac{m^2-1^2}{3!}a_2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}a_4 \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-1^2)\dots[m^2-\overline{m-2}^2]}{m!}a_{m-1}\right] \qquad 2)$$

$$D_{\varphi^{2n}}\Phi_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n+1} 2^{2n} V_{2n}$$

$$= \frac{m}{2}\left[-\frac{m^2-1^2}{2!}b_2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}b_4 \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-1^2)\dots[m^2-\overline{m-2}^2]}{m!}b_{m-1}\right] \qquad 3)$$

$$D_\varphi^{2n+1}\Phi_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = (-1)^n 2^{2n+1} U_{2n+1}$$

$$= \frac{m}{2}\left[-\frac{m^2-1^2}{3!}c_2 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}d_4 - \right.$$

$$\left. - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}c_6 \dots\right] \qquad 4)$$

Die Coefficienten a, b, c, d zu bestimmen, dient

$$(-1)^{\frac{r}{2}} 2^{r-1}\sin^r\varphi = \cos r\varphi - \binom{r}{1}\cos(r-2)\varphi \dots \qquad 5)$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{r}{2}-1}\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\cos 2\varphi + (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{\frac{r}{2}} \quad (r \text{ gerade}) \qquad .5)$$

es ist dann

$$a_r = D_{2n}\sin^r\varphi_{\varphi=0}$$

$$= (-1)^{n+\frac{r}{2}} \frac{1}{2^{r-1}}\left[r^{2n} - \binom{r}{1}(r-2)^{2n} + \binom{r}{2}(r-4)^{2n} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{r}{2}-1}\binom{r}{\frac{r}{2}-1} 2^{2n}\right]$$

$$b_r = D^{2n}\sin^r\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{r-1}}\left[r^{2n} + \binom{r}{1}(r-2)^{2n} + \binom{r}{2}(r-4)^{2n} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \binom{r}{\frac{r}{2}-1} 2^{2n}\right]$$

$$c_r = D^{kn+1}\sin^r\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-\frac{r-2}{4}}}{2^{r-1}}\left[r^{2n+1} - \binom{r}{2}(r-4)^{2n+1} + \binom{r}{4}(r-8)^{2n+1} \ldots\right]$$

$$r \equiv 2 \bmod 4$$

$$d_r = D^{2n+1}\sin^r\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1+\frac{r}{4}}}{2^{r-1}}\left[\binom{r}{1}(r-2)^{2n+1} - \binom{r}{3}(r-6)^{2n+1} \ldots\right]$$

$$r \equiv 0 \bmod 4$$

und

$$a_2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2} 2^{2n}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^n}{2^3}\left(4^{2n} - \binom{4}{1} 2^{2n}\right)$$

$$a_6 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^5}\left(6^{2n} - \binom{6}{1} 4^{2n} + \binom{6}{2} 2^{2n}\right)$$

$$a_8 = \frac{(-1)^n}{2^7}\left(8^{2n} - \binom{8}{1} 6^{2n} + \binom{8}{2} 4^{2n} - \binom{8}{3} 2^{2n}\right)$$

. . . .

$$a_{m-1} = \frac{(-1)^{n+\frac{m-1}{2}}}{2^{m-2}}\left[(m-1)^{2n} - \binom{m-1}{1}(m-3)^{2n} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} 2^{2n}\right]$$

$$b_2 = \frac{(-1)^n}{2} 2^{2n}$$

$$b_4 = \frac{(-1)^n}{2^3}\left(4^{2n} + \binom{4}{1} 2^{2n}\right)$$

$$b_6 = \frac{(-1)^n}{2^5}\left(6^{2n} + \binom{6}{1} 4^{2n} + \binom{6}{2} 2^{2n}\right)$$

$$b_8 = \frac{(-1)^n}{2^7}\left(8^{2n} + \binom{8}{1} 6^{2n} + \binom{8}{2} 4^{2n} + \binom{8}{3} 2^{2n}\right)$$

. . . .

$$b_{m-1} = \frac{(-1)^n}{2^{m-2}}\left[(m-1)^{2n} + \binom{m-1}{1}(m-3)^{2n} \ldots + \binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} 2^{2n}\right]$$

$$c_2 = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2}$$

$$c_6 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^5}\left(6^{2n+1} - \binom{6}{2} 2^{2n+1}\right)$$

$$c_{10} = \frac{(-1)^n}{2^9}\left(10^{2n+1} - \binom{10}{2} 6^{2n+1} + \binom{10}{4} 2_{2n+1}\right)$$

. . . .

$$c_{4\nu+2} = \left[4\nu+2)^{2n+1} - \binom{4\nu+2}{2}(4\nu-2)^{2n+1}\right.$$

$$\left. + \binom{4\nu+2}{4}(4\nu-6)^{2n+1} \ldots\right]$$

$$d_4 = \frac{(-1)^n}{2^3}\binom{4}{1}2^{2n+1}$$

$$d_8 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^7}\left(\binom{8}{1}6^{2n+1} - \binom{8}{3}2^{2n+1}\right)$$

$$d_{12} = \frac{(-1)^n}{2^{11}}\left(\binom{12}{1}10^{2n+1} - \binom{12}{3}6^{2n+1} + \binom{12}{5}2^{2n+1}\right)$$

. . . .

$$d_{4\nu} = \frac{(-1)^{n+1+\nu}}{2^{4\nu-1}}\left[\binom{4\nu}{1}(4\nu-2)^{2n+1} - \binom{4\nu}{3}(4\nu+2)^{2n+1} + \binom{4\nu}{5}(4\nu+6)^{2n+1}\ldots\right]$$

Nach Einsetzung dieser Werte in 1) ergiebt sich

$$S_{2n} = \frac{m}{4}\left[\frac{m^2-1^2}{3!} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\,\frac{2^{2n}-\binom{4}{1}}{2!} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}\cdot\frac{3^{2n}-\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}}{2^4}\ldots\right.$$
$$\ldots + \frac{(m^2-1^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{m!}$$
$$\left.\times\frac{\frac{(n-1)^{2n}}{2} - \binom{m-1}{1}\frac{(m-3)^{2n}}{2}\ldots(-1)^{\frac{m-3}{2}}\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}}{2^{m-3}}\right] \qquad 6)$$

$$m = 2j+1$$

$$V_{2n} = \frac{m}{4}\left[\frac{m^2-1^2}{3!} - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\,\frac{2^{2n}+\binom{4}{1}}{2!} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}\cdot\frac{3^{2n}+\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}}{2^4}\ldots\right.$$
$$\ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{(m^2-1^2)\ldots[m^2-(m-2)^2]}{m!}$$
$$\left.\times\frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n} + \binom{m-1}{1}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{2n}\ldots + \binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}}{2^{m-3}}\right] \qquad 7)$$

$$m = 2j+1$$

$$U_{2n+1} = \frac{m}{4}\left[\frac{m^2-1^2}{3!} - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\cdot\frac{\binom{4}{1}}{2^2}\right.$$

$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}\cdot\frac{3^{2n+1}-\binom{6}{2}}{2^4}$$

$$+\frac{(m^2-1^2)\ \ldots\ (m^2-7^2)}{9!}\cdot\frac{\binom{8}{1}3^{2n+1}-\binom{8}{3}}{2^6}$$

$$+\frac{(m^2-1^2)\ \ldots\ (m^2-9^2)}{11!}$$

$$\left.\times\frac{5^{2n+1}-\binom{10}{2}3^{2n+1}+\binom{10}{4}}{2^8} - - \ldots\right] \qquad 8)$$

$$m = 2k+1$$

$$T_{2n} = \frac{S_{2n}+V_{2n}}{2} = \frac{m}{4}\left[\frac{m^2-1^2}{3!} - \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}\cdot\frac{\binom{4}{1}}{2^2}2^{2n}\right.$$

$$\left.+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}\cdot\frac{3^{2n}+\binom{6}{2}}{2^4}\ldots\right] \qquad 9)$$

$$m = 2k+1$$

Sämtliche mit dem $\frac{m+1}{2}$ ten Gliede abbrechende Reihen lassen sich mit Rücksicht auf

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m^2-1^2}{2^2\,3!} &= \tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2}\\
\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2^4.5!} &= \tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\\
\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^6.7!} &= \tfrac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}
\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(m^2-1^2)\,\ldots\,(m^2-7^2)}{2^8.9!} = \frac{1}{9}\dbinom{\frac{m+7}{2}}{8} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{2^{m-1}.\,m!}\left[(m^2-1^2)\,\ldots\,(m^2-\overline{m-2}^2)\right] = \dfrac{1}{m}\dbinom{m-1}{m-1} = \dfrac{1}{m}\end{array}\right\} \qquad 10)$$

auch schreiben

$$S_{2n} = m\Bigg[\tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2} + \tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\left(2^{2n}-\binom{4}{1}\right)$$
$$+\tfrac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\left(3^{2n}-\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1}\left(\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}-\binom{m-1}{1}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{2n}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\pm\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}\right)\Bigg] \qquad 11)$$

$$V_{2n} = m\Bigg[\tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2} - \tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\left(2^{2m}+\binom{4}{1}\right)$$
$$+\tfrac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\left(3^{2n}+\binom{6}{1}2^{2n}+\binom{6}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1}\left(\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}+\binom{m-1}{1}\left(\frac{m-3}{2}\right)^{2n}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}\right)\Bigg] \qquad 12)$$

$$m = 2j+1$$

$$U_{2n+1} = m\Bigg[\tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2} - \tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\binom{4}{1}$$
$$-\tfrac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\left(3^{2n+1}-\binom{6}{2}\right) \qquad 13)$$

$$+\tfrac{1}{9}\binom{\frac{m+7}{2}}{8}\left(\binom{8}{1}3^{2n+1}-\binom{8}{3}\right) \qquad 13)$$

$$+\tfrac{1}{11}\binom{\frac{m+9}{2}}{10}\left(5^{2n+1}-\binom{10}{2}3^{2n+1}+\binom{10}{4}\right)\ldots\Bigg]$$

$$T_{2n}=m\left[\tfrac{1}{3}\binom{\frac{m+3}{2}}{2}-\tfrac{1}{5}\binom{\frac{m+5}{2}}{4}\binom{4}{1}2^{2n}\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{7}\binom{\frac{m+7}{2}}{6}\left(3^{2n}+\binom{6}{2}\right)-\ldots\right] \qquad 14)$$

$$m=2k+1$$

2. Transformation der Reihen.

$$S_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\ldots+\frac{1}{j^{2n}}$$

$$T_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots+\frac{1}{k^{2n}}$$

$$U_{2n+1}=\frac{1}{1^{2n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}\ldots+\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^{2n+1}}$$

$$V_{2n}=\frac{1}{1^{2n}}-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}\ldots+\frac{(-1)^{j+1}}{j^{2n}}$$

Durch Integriren der Gleichung 1) entsteht

$$\int_0^\varphi \Phi\,d\varphi=\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 4\varphi}{4}+\ldots+\frac{\sin(m-1)\varphi}{m-1}$$

$$\int_0^\varphi\!\!\int_0^\varphi \Phi\,d\varphi=-\frac{\cos 2\varphi}{2^2}-\frac{\cos 4v}{4^2}\ldots-\frac{\cos(m-1)\varphi}{(m-1)^2}+\frac{S_2}{2^2}$$

. . . .

und die $2n$ und $2n+1$ fachen Integrale

$$\int_0^{\varphi} {}^{2n}\Phi\, d\varphi = (-1)^n \left(\frac{\cos 2\varphi}{2^{2n}} + \frac{\cos 4\varphi}{4^{2n}} \dots + \frac{\cos(m-1)\varphi}{(m-1)^{2n}}\right)$$

$$+ \frac{S_2}{(2n-2)!\, 2^2}\varphi^{2n-2} - \frac{S_4}{(2n-4)!\, 2^4}\varphi^{2n-4} + \frac{S_6}{(2n-6)!\, 2^6} \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{2^{2n}}$$

$$\int_0^{\varphi} {}^{2n+1}\Phi\, d\varphi = (-1)^n \left(\frac{\sin 2\varphi}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 4\varphi}{4^{2n+1}} \dots + \frac{\sin(m-1)\varphi}{(m-1)^{2n+1}}\right)$$

$$+ \frac{S_2}{(2n-1)!\, 2^2}\varphi^{2n-1} - \frac{S_4}{(2n-3)!\, 2^4}\varphi^{2n-3}$$

$$+ \frac{S_6}{(2n-5)!\, 2^6}\varphi^{2n-5} \dots + (-1)^{n+1}\frac{S_{2n}}{2^{2n}}\varphi$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, resp. $= \frac{\pi}{4}$ ist

$$\left(\int_0^{\varphi} {}^{2n}\Phi\, d\varphi\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n+1}\frac{2T_{2n}}{2^{2n}} + \frac{S_2}{(2n-2)!\, 2^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}$$

$$- \frac{S_4}{(2n-4)!\, 2^4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-4} \dots + (-1)^{n-1}\frac{S_{2n-2}}{2!\, 2^{2n-2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad 15)$$

$$\left(\int_0^{\varphi} {}^{2n+1}\Phi\, d\varphi\right)_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = (-1)^n \frac{U_{2n+1}}{2^{2n+1}} + \frac{S_2}{(2n-1)!\, 2^2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$$

$$- \frac{S_4}{(2n-3)!\, 2^4}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-3} \dots + (-1)^n \frac{S_{2n-2}}{3!\, 2^{2n-2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{S_{2n}}{2^{2n}}\cdot\frac{\pi}{4} \qquad 16)$$

Es ist aber auch

$$\left(\int_0^{\varphi} {}^{2n}\Phi\, d\varphi\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{m-1}{2(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} - \frac{m(m^2-2^2)}{2.3!}\alpha_2$$

$$+ \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.5!}\alpha_4 \qquad 17)$$

$$\int_0^{\varphi}\!\!{}^{2n+1}\Phi\,d\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = \frac{m-1}{2(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} - \frac{m(m^2-1^2)}{2.3!}\beta_2 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.5!}\beta_4 \qquad 18)$$

hierin ist

$$\alpha_r = \int_0^{\varphi}\!\!{}^{2n}\sin^r\varphi\,d\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

und

$$\beta_r = \int_0^{\varphi}\!\!{}^{2n+1}\sin^r\varphi\,d\varphi \qquad r \text{ gerade}$$

15) mit 17) und 16) mit 18) verglichen, ergiebt:

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}}T_{2n} + \frac{S_2}{(2n-2)!\;2^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2} \cdots + (-1)^n\frac{S_{2n-2}}{2!\;2^{2n-2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\frac{m-1}{2(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} - \frac{m(m^2-1^2)}{2.3!}\alpha_2 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.5!}\alpha_4 \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{2m!}\alpha_{m-1} \qquad 19)$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}U_{2n+1} + \frac{S_2}{(2n-1)!\;2^2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1} \cdots + (-1)^{n+1}\frac{S_{2n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{m-1}{2(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} - \frac{m(m^2-1^2)}{2.3!}\beta_2 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{2.5!}\beta_4 \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{2m!}\beta_{m-1} \qquad 20)$$

Zur Bestimmung der α und β dient wieder die Formel 5); es ist

$$2^{r-1}\int_0^{\varphi}\sin^r\varphi\,d\varphi = \binom{r}{\frac{r}{2}}\frac{\varphi}{2} - \binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{\sin 2\varphi}{2} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{r+1}{2}}\binom{r}{1}\frac{\sin(r-2)\varphi}{r-2} + (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{0}\frac{\sin r\varphi}{r} \qquad r \text{ gerade}$$

$${}^{r-1}\overset{2}{\int_0^{\varphi}} \sin^r\varphi\, d\varphi = \binom{r}{\frac{r}{2}} \frac{\varphi^2}{2.2!} + \binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{\cos 2\varphi}{2^2} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{1} \frac{\cos(r-2)\varphi}{(r-2)^2} + (-1)^{\frac{r}{2}+1} \binom{r}{0} \frac{\cos r\varphi}{r^2}$$

$$-\Bigg[\binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{1}{2^2} - \binom{r}{\frac{r}{2}-2} \frac{1}{4^2} \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{1} \frac{1}{(r-2)^2} + (-1)^{\frac{r}{2}+1} \binom{r}{0} \frac{1}{r^2}\Bigg]$$

$${}^{r-1}\overset{3}{\int_0^{\varphi}} \sin^r\varphi d\varphi = \binom{r}{\frac{r}{2}} \frac{\varphi^3}{2.3!} + \binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{\sin 2\varphi}{2^3} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{1} \frac{\sin(r-2)\varphi}{(r-2)^3} + (-1)^{\frac{r}{2}+1} \binom{r}{0} \frac{\sin r\varphi}{r^3}$$

$$-\Bigg[\binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{1}{2^2} - \binom{r}{\frac{r}{2}-2} \frac{1}{4^2} \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{1} \frac{1}{(r-2)^2} + (-1)^{\frac{r}{2}+1} \binom{r}{0} \frac{1}{r^2}\Bigg] \varphi$$

$${}^{r-1}\overset{4}{\int_0^{\varphi}} \sin^4\varphi d\varphi = \binom{r}{\frac{r}{2}} \frac{\varphi^4}{2.4!} + \binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{\cos 2\varphi}{2^4} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}-1} \binom{r}{1} \frac{\cos(r-2)\varphi}{(r-2)^4} + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{0} \frac{\cos r\varphi}{r^4}$$

$$-\Bigg[\binom{r}{\frac{r}{2}-1} \frac{1}{2^2} - \binom{r}{\frac{r}{2}-2} \frac{1}{4^2} \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{r}{2}} \binom{r}{1} \frac{1}{(r-2)^2} + (-1)^{\frac{r}{2}+1} \binom{r}{0} \frac{1}{r^2}\Bigg] \frac{\varphi^2}{2!}$$

$$+\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^4}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^4}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^4}+(-1)^{\frac{r}{2}+1}\binom{r}{0}\frac{1}{r^4}\right]$$

. . . .

$$2^{r-1}\overset{2n}{\int_0^{\varphi}}\sin^r d\varphi=\binom{r}{\frac{r}{2}}\frac{\varphi^{2n}}{2(2n)!}$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{\cos 2\varphi}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{\cos 4\varphi}{4^{2n}}\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{\cos r\varphi}{r^{2n}}\right.$$

$$-\frac{\varphi^{2n-2}}{(2n-2)!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^2}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^2}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^2}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^2}\right]$$

$$+\frac{\varphi^{2n-4}}{(2n-4)!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^4}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^4}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^4}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^4}\right]$$

. . . .

$$(-1)^{n-1}\frac{\varphi^2}{2!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n-2}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n-2}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n-8}}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^{2n-2}}\right]$$

$$+(-1)^{n}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n}}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

$$\frac{2n+1}{2^{r-1}}\int\limits_0^{\varphi}\sin^r\varphi\,d\varphi = \binom{r}{\frac{r}{2}}\frac{\varphi^{2n+1}}{2(2n+1)!}$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{\sin 2\varphi}{2^{2n+1}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{\sin 4\varphi}{4^{2n+1}}\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{\sin r\varphi}{r^{2n+1}}\right]$$

$$-\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^2}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^2}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^2}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^2}\right]$$

$$+\frac{\varphi^{2n-3}}{(2n-3)!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^4}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^4}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^4}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^4}\right]$$

. . . .

$$(-1)^{n-1}\frac{\varphi^3}{3!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n-2}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n-2}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n-2}}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^{2n-2}}\right]$$

$$+(-1)^n\frac{\varphi}{1!}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n}}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

$$2^{r-1}\alpha_r=\frac{1}{2(2n)!}\binom{r}{\frac{r}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}+(-1)^n\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n}}\right.$$

$$\left.+\binom{r}{\frac{r}{2}-3}\frac{1}{6^{2n}}\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{(2n-2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-2}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^2}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^2}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^2}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^2}\right]$$

. . . .

$$+(-1)^{n}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n}}+(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

$$2^{r-1}\beta_r = \frac{1}{2(2n+1)!}\binom{r}{\frac{r}{2}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^{2n+1}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-3}\frac{1}{4^{2n+1}}\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-3}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{2^2}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^2}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{2}\frac{1}{(r-2)^2}+(-1)^{\frac{r}{2}+1}\frac{1}{r^2}\right]$$

. . . .

$$+(-1)^{n}\frac{\pi}{4}\left[\binom{r}{\frac{r}{1}-1}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{4^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{(r-2)^{2n}}+(-1)^{\frac{r}{2}+1}\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

Nach Einsetzung der sich für $r = 2, 4, 6 \ldots$ ergebenden Werte in 19) und 20) gehen sofort Relationen zwischen T und S einerseits und U und S andrerseits hervor, deren charakteristische Eigenschaft — die Verknüpfung der Transcendenten π mit rationalen Zalen — zur Trennung der T von S und U von S vorteilhaft ausgebeutet werden kann.

Da es nämlich in der Natur der Sache liegt, dass eine Transcendente nicht durch eine endliche Anzal rationaler Zalen ausgedrückt werden kann, so können die Gleichungen 19) und 20) in ihrer vollendeten Form nur bestehen, wenn der in irgend eine Potenz multiplicirte Factor der einen Seite gleich ist dem in dieselbe Potenz multiplicirten Factor der andern Seite der Gleichung 19) bzhw. 20).

Aus der Vergleichung der von π freien Glieder ergeben sich T_{2n} und U_{2n+1}. Nun ist der von π freie Bestandteil von α_r nach leichter Reduction

$$\frac{(-1)^n}{2^{r-1}2^{2n}}\left[2\binom{r}{\frac{r}{2}-1}+2\binom{r}{\frac{r}{2}-3}\frac{1}{3^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-4}\frac{1}{4^{2n}}-\cdots\right]$$

daher der von

$$\alpha_2\cdots\frac{(-1)^n 2}{2.2^{2n}}\binom{2}{0}$$

$$\alpha_4\cdots\frac{(-1)^n}{2^3.2^{2n}}\left(2\binom{4}{1}-\binom{4}{0}\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$\alpha_6\cdots\frac{(-1)^n}{2^5.2^{2n}}\left(2\binom{6}{2}+2\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n}}-\binom{6}{1}\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$\alpha_8\cdots\frac{(-1)^n}{2^7.2^{2n}}\left(2\binom{8}{3}+2\binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n}}-\binom{8}{2}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{8}{0}\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

. . . .

$$\alpha_{m-1}=\frac{(-1)^n}{2^{m-2}.2^{2n}}\left(2\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}+2\binom{m-1}{\frac{m-7}{2}}\frac{1}{3^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\binom{m-1}{\frac{m-5}{2}}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{m-1}{\frac{m-9}{2}}\frac{1}{4^{2n}}-\cdots\right)$$

somit folgt aus 19)

$$T_{2n}=\frac{m(m^2-1^2)}{8}\left[\frac{2\binom{2}{0}}{3!}-\frac{m^2-3^2}{5!\,2^2}\left(2\binom{4}{1}-\frac{\binom{4}{0}}{2^{2n}}\right)\right. \qquad 21)$$

$$+\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!\ 2^4}\left(2\binom{6}{2}+\frac{2\binom{6}{0}}{3^{2n}}-\frac{\binom{6}{1}}{2^{2n}}\right)$$

$$-\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{9!\ 2^6}\left(2\binom{8}{3}+2\binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n}}\right.$$

$$\left.-\binom{8}{2}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{8}{0}\frac{1}{4^{2n}}\right)\ldots\Big]\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\ 2^{m-3}}\times$$

$$\times\left[2\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}+2\binom{m-1}{\frac{m-7}{2}}\frac{1}{3^{2n}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-\binom{m-1}{\frac{m-5}{2}}\frac{1}{2^{2n}}-\binom{m-1}{\frac{m-9}{2}}\frac{1}{4^{2n}}\ldots\right)\Big] \qquad 21)$$

$$m=2b+1$$

Der von π freie Bestandteil von β_r ist

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{r-1}.\,2^{2n+1}}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}-\binom{r}{\frac{r}{2}-3}\frac{1}{3^{2n+1}}+-\ldots\right]$$

daher der von

$$\beta_2\ldots\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}}\frac{\binom{2}{0}}{2}$$

$$\beta_4\ldots\frac{(-1)^{n-1}}{2^3.\,2^{2n+1}}\binom{4}{1}$$

$$\beta_6\ldots\frac{(-1)^{n-1}}{2^5.\,2^{2n+1}}\left(\binom{6}{2}-\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n+1}}\right)$$

$$\beta_8\ldots\frac{(-1)^{n-1}}{2^7.\,2^{2n+1}}\left(\binom{8}{3}-\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n+1}}\right)$$

. . . .

$$\beta_{m-1}\ldots\frac{(-1)^{n-1}}{2^{m-2}.\,2^{2n+1}}\left[\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}-\binom{m-1}{\frac{m-7}{2}}\frac{1}{3^{2n+1}}\ldots\right]$$

es folgt aus 20)

$$U_{2n+1} = \frac{m(m^2-1^2)}{4}\left[\frac{1}{3!}\binom{2}{0} - \frac{m^2-3^2}{5!\,2^2}\binom{4}{1}\right.$$

$$+\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!\,2^4}\left(\binom{6}{2}-\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n+1}}\right)$$

$$-\frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{9!\,2^6}\left(\binom{8}{3}-\binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n+1}}\right)\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{(m^2-3^2)\;\ldots\;(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\,2^{n-3}}\times$$

$$\left.\times\left(\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}-\binom{m-1}{\frac{m-7}{2}}\frac{1}{3^{2n+1}}\cdots\right]\right) \qquad 22)$$

$$m = 2k+1$$

Die Vergleichung der $\frac{\pi}{4}$ enthaltenden Glieder in 20) ergiebt $S_{2\alpha}$. Der Coefficient von $\frac{\pi}{4}$ in β_r ist

$$\frac{(-1)^n}{2^{r-1}.\,2^{2n}}\left[\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\frac{1}{1^{2n}}-\binom{r}{\frac{r}{2}-2}\frac{1}{2^{2n}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{1}\frac{1}{\left(\frac{r-2}{2}\right)^{2n}}+(-1)^{\frac{r}{2}+1}\frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}}\right]$$

mithin der von

$$\beta_2 \ldots \frac{(-1)^n}{2.\,2^{2n}}\binom{2}{0}$$

$$\beta_4 \ldots \frac{(-1)^n}{2^3.\,2^{2n}}\left(\binom{4}{1}-\binom{4}{0}\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$\beta_6 \ldots \frac{(-1)^n}{2^5.\,2^{2n}}\left(\binom{6}{2}-\binom{6}{1}\frac{1}{2^{2n}}+\binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

$$\beta_8 \ldots \frac{(-1)^n}{2^7.\,2^{2n}}\left(\binom{8}{3}-\binom{8}{2}\frac{1}{2^{2n}}+\binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n}}-\binom{8}{0}\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

. . . .

$$\beta_{m-1} \ldots \frac{(-1)^n}{2^{m-2}.\,2^{2n}}\left[\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{1^{2n}}-\binom{m-1}{\frac{m-5}{2}}\frac{1}{2^{2n}}\cdots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \binom{m-1}{1} \frac{1}{\left(\frac{m-3}{2}\right)^{2n}} + \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}}\Bigg] .$$

aus 20) folgt somit

$$S_{2n} = \frac{m(m^2-1^2)}{4}\left[\frac{1}{3!}\binom{2}{0} - \frac{m^2-3^2}{2^2.5!}\left(\binom{4}{1} - \binom{4}{0}\frac{1}{2^{2n}}\right)\right.$$

$$+ \frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{2^4.7!}\left(\binom{6}{2} - \binom{6}{1}\frac{1}{2^{2n}} + \binom{6}{0}\frac{1}{3^{2n}}\right)$$

$$m = 2j+1$$

$$- \frac{(m^2-3^2)(m^2-5^2)(m^2-7^2)}{2^6.9!} \times$$

$$\times\left(\binom{8}{3} - \binom{8}{2}\frac{1}{2^{2n}} + \binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n}} - \binom{8}{0}\frac{1}{4^{2n}}\right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-3^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\,2^{m-3}} \times$$

$$\left.\times\left(\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} - \binom{m-1}{\frac{m-5}{2}}\frac{1}{2^{2n}} \ldots + \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}}\right)\right] \qquad 23)$$

$$V_{2n} = 2T_{2n} - S_{2n}$$

Mit Berücksichtiuung der Formeln 10) kann auch geschrieben werden:

$$T_{2n} = \frac{m}{2}\left[\frac{1}{3}\binom{\frac{m+1}{2}}{2} 2\binom{2}{0} - \frac{1}{5}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}\left(2\binom{4}{1} - \frac{\binom{4}{0}}{2^{2n}}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{7}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\left(2\binom{6}{2} + \frac{2\binom{6}{0}}{3^{2n}} - \frac{\binom{6}{1}}{2^{2n}}\right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1}\left(2\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} + 2\binom{m-1}{\frac{m-7}{2}}\frac{1}{3^{2n}} + \ldots\right.$$

$$- \frac{1}{9}\binom{\frac{m+7}{2}}{8}\left(2\binom{8}{3} + 2\binom{8}{1}\frac{1}{3^{2n}} - \binom{8}{2}\frac{1}{2^{2n}} - \binom{8}{0}\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

$$\ldots - \binom{m-1}{\frac{m-5}{2}} \frac{1}{2^{2n}} - \binom{m-1}{\frac{m-9}{2}} \frac{1}{4^{2n}} \ldots \Big)\Big] \qquad 24)$$

$$m = 2k + 1$$

$$C_{2n+1} = m \Bigg[\frac{1}{3} \binom{\frac{m+1}{2}}{2} \binom{2}{0} - \frac{1}{5} \binom{\frac{m+3}{2}}{4} \binom{4}{1}$$

$$+ \frac{1}{7} \binom{\frac{m+5}{2}}{6} \left(\binom{6}{2} - \frac{\binom{6}{0}}{3^{2n+1}} \right) - \frac{1}{9} \binom{\frac{m+7}{2}}{8} \left(\binom{8}{3} - \frac{\binom{8}{1}}{3^{2n+1}} \right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m} \binom{m-1}{m-1} \left(\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} - \binom{m-1}{\frac{m-7}{2}} \frac{1}{3^{2n+1}} - \ldots \right) \Bigg] \qquad 25)$$

$$m = 2k + 1$$

$$S_{2n} = m \Bigg[\frac{1}{3} \binom{\frac{m+1}{2}}{2} \binom{2}{0} - \frac{1}{5} \binom{\frac{m+3}{2}}{4} \left(\binom{4}{1} - \frac{\binom{4}{0}}{2^{2n}} \right)$$

$$+ \frac{1}{7} \binom{\frac{m+5}{2}}{6} \left(\binom{6}{2} - \frac{\binom{6}{1}}{2^{2n}} + \frac{\binom{6}{0}}{3^{2n}} \right)$$

$$- \frac{1}{9} \binom{\frac{m+7}{2}}{8} \left(\binom{8}{3} - \binom{8}{2} \frac{1}{2^{2n}} + \binom{8}{1} \frac{1}{3^{2n}} - \frac{\binom{8}{0}}{4^{2n}} \right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m} \binom{m-1}{m-1} \left(\binom{m-1}{\frac{m-3}{2}} - \binom{m-1}{\frac{m-5}{2}} \frac{1}{2^{2n}} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n}} \right) \Bigg] \qquad 26)$$

$$m = 2j + 1$$

Ausser diesen Beziehungen lässt sich noch eine bemerkenswerte Identität, welche sich nur auf eine ungerade Zal n bezieht, aus den π^{2n} enthaltenden Gliedern in 19) ableiten.

Die linke Seite enthält kein mit π^{2n} behaftetes Glied; die π^{2n} auf der rechten Seite enthaltenden Bestandteile sind allgemein in

$$\alpha_r \ldots \frac{1}{2^r(2n)!}\binom{r}{\frac{r}{2}}$$

somit in

$$\alpha_2 \ldots \frac{1}{2^2(2n)!}\binom{2}{1}$$

$$\alpha_4 \ldots \frac{1}{2^4(2n)!}\binom{4}{2}$$

$$\alpha_6 \ldots \frac{1}{2^6(2n)!}\binom{6}{3}$$

$$\alpha_8 \ldots \frac{1}{2^8(2n)!}\binom{8}{4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{m-1} \ldots \frac{1}{2^{m-1}(2n)!}\binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}$$

Nach Unterdrückung des gemeinsamen Factors $\frac{1}{2(2n)!}$ ist daher für jedes ungerade m

$$m-1-m\frac{m^2-1^2}{3!\,2^2}\binom{2}{1}+m\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!\,2^4}\binom{4}{2}$$

$$-\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!\,2^6}\binom{6}{3}\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^3-\overline{m-4}^2)}{(m-2)!\,2^{m-3}}\binom{m-3}{\frac{m-3}{2}}$$

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{m(m^2-1^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\,2^{m-1}}\binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}=0 \qquad 27)$$

Eine einfachere Form erhält diese Identität, wenn die Einheit auf die rechte Seite geschafft und durch m dividirt wird:

$$1-\frac{m^2-1^2}{3!\,2^2}\binom{2}{1}+\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!\,2^4}\binom{4}{2}$$

$$-\frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!\,2^6}\binom{6}{3}\ldots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{(m^2-1^2)\ \ldots\ (m^2-\overline{m-4}^2)}{(m-2)!\ 2^{m-3}} \binom{m-3}{\frac{m-3}{2}}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m^2-1^2)\ \ldots\ (m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\ 2^{m-1}} \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} = \frac{1}{m} \qquad 28)$$

Die Differenzen der Quadrate in ihre Factoren aufgelöst und nach ihrer Grösse geordnet, gibt

$$1 - \frac{1}{3!} \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m+1}{2} \binom{2}{1} + \frac{1}{5!} \frac{m-3}{2}, \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+3}{2} \binom{4}{2}$$

$$- \frac{1}{7!} \left(\frac{m-5}{2} \cdots \left(\frac{m+5}{2}\right) \binom{6}{3} \cdots\right.$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{(m-2)!} (2\ \ldots\ (m-2)) \binom{m-3}{\frac{m-3}{2}}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m!} (1\ \ldots\ (m-1)) \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} = \frac{1}{m}$$

Im zweiten Gliede treten die zwei mittleren Zalen der Reihe 1, 2, 3, ... $m-2$, $m-1$, im dritten die 4 mittleren, im vierten die 6 mittleren ... und im letzten sämtliche als Factoren auf.

Mit Hilfe der Formeln 10) ist eine weitere Vereinfachung in der Anschreibung möglich; es ist

$$1 - \tfrac{1}{3} \binom{2}{1} \binom{\frac{m+1}{2}}{2} + \tfrac{1}{5} \binom{4}{2} \binom{\frac{m+3}{2}}{4} - \tfrac{1}{7} \binom{6}{3} \binom{\frac{m+5}{2}}{6} \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{m-2} \binom{m-3}{\frac{m-3}{2}} \binom{m-2}{m-3}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m} \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} \binom{m-1}{m-1} + \frac{1}{m} \qquad 29)$$

Nicht alle der hier erscheinenden Binomial-Coefficienten

$$\binom{m-1}{m-1},\ \binom{m-2}{m-3}\ldots\binom{m-\mu}{m-2\mu+1}\ldots$$

haben die einfachste Form; sie kann jedoch mit Anwendung der Formel

$$\binom{p}{q}=\binom{p}{p-q}$$

wenn $p<\frac{q}{2}$ ist, erzielt werden. Hiedurch entsteht ein einziges mittleres Glied von einer der Formen

$$\binom{2v}{v}\quad\text{und}\quad\binom{2v+1}{v+1}=\binom{2v+1}{v}$$

Dasselbe zu erhalten, müssen vor allem 3 Fälle unterschieden werden, für welche die folgenden, aus dem Gesetze der Fortschreitung dieser Coefficienten sich ergebenden Gleichungen gelten

a) $m-\mu=2(m-2\mu+1),\quad \mu=\frac{m+2}{3}$

Mittleres Glied $\binom{m-1}{m-2\mu+1}=\binom{\frac{2m-2}{3}}{\frac{m-1}{3}}$

Bedingung $m\equiv 1 \bmod 3$

b) $m-\mu=2(m-2\mu+1)+1,\quad \mu=\frac{m+3}{3}$

Mittleres Glied $\binom{\frac{2m-3}{3}}{\frac{m-3}{3}}=\binom{\frac{2m-3}{3}}{\frac{m}{3}}$

Bedingung $m\equiv 0 \bmod 3$

c) $m-\mu=2(m-2\mu+1)-1,\quad \mu=\frac{m+1}{3}$

Mittleres Glied $\binom{\frac{2m-1}{3}}{\frac{m+1}{3}}=\binom{\frac{2m-1}{3}}{\frac{m-2}{3}}$

Bedingung $m\equiv 2 \bmod 3$

Um alle drei Fälle in einen einzigen zusammenzufassen, sei

$$m \equiv \varepsilon \bmod 3, \quad \varepsilon < 3$$

dann ist das mittlere Glied

$$\binom{\frac{2m+\varepsilon-3}{3}}{\frac{m-\varepsilon}{3}}$$

Die einfachste Gestalt der vorliegenden Identität ist daher:

$$1-\tfrac{1}{3}\binom{2}{1}\binom{\frac{m+1}{2}}{2}+\tfrac{1}{5}\binom{4}{2}\binom{\frac{m+3}{2}}{4}-\tfrac{1}{7}\binom{6}{3}\binom{\frac{m+5}{2}}{6}\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{\frac{m-\varepsilon}{6}}\frac{3}{m+3-\varepsilon}\binom{\frac{m-\varepsilon}{3}}{\frac{m-\varepsilon}{6}}\binom{\frac{2m+\varepsilon-3}{3}}{\frac{m-\varepsilon}{3}}\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{\frac{m-3}{2}}\frac{1}{m-2}\binom{m-3}{\frac{m-3}{2}}\binom{m-2}{1}$$

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\binom{m-1}{\frac{m-1}{2}}=\frac{1}{m} \qquad 30)$$

m ungerade $\equiv \varepsilon \bmod 3$

$$m=9,\quad \varepsilon=0,\quad 1-\tfrac{1}{3}\binom{2}{1}\binom{5}{2}+\tfrac{1}{5}\binom{4}{2}\binom{6}{2}-\tfrac{1}{7}\binom{6}{3}\binom{7}{1}$$

$$+\tfrac{1}{9}\binom{8}{4}=\tfrac{1}{9}$$

$$m=11,\quad \varepsilon=2,\quad 1-\tfrac{1}{3}\binom{2}{1}\binom{6}{2}+\tfrac{1}{5}\binom{4}{2}\binom{7}{3}$$

$$-\binom{7}{3}\binom{6}{3}\binom{8}{2}+\tfrac{1}{9}\binom{8}{4}\binom{9}{1}-\frac{1}{11}\binom{10}{5}=\frac{1}{11}$$

$$m=13,\quad \varepsilon=1,\quad 1-\tfrac{1}{3}\binom{2}{1}\binom{7}{2}+\tfrac{1}{5}\binom{4}{2}\binom{8}{4}-\tfrac{1}{7}\binom{6}{3}\binom{9}{3}$$

$$+\tfrac{1}{9}\binom{8}{4}\binom{10}{2}-\binom{1}{11}\binom{10}{5}\binom{11}{1}+\frac{1}{13}\binom{12}{6}=\frac{1}{13}$$

Wenn m eine Primzal ist, so folgt

$$\binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{m-1}{2}} \mod m \tag{31}$$

denn in 30) linker Hand ist das letzte das einzige $\frac{1}{m}$ als Factor enthaltende Glied.

Dieselbe Identität geht aus 20) hervor.

II. Reihen mit ungeradem Exponenten und Zeichenfolge und Reihen mit geradem Exponenten und Zeichenwechsel.

3. Transformation der Reihen T_{2n+1} und U_{2n}.

Die $2n$ und $(2n+1)$malige Differentiation von

$$\Psi = \cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi \ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \cos(m-1)\varphi$$

$$= \frac{1+(-1)^{\frac{m}{2}+1} \cos m\varphi}{2\cos\varphi}$$

$$= \frac{m^2}{2}\left[\frac{\cos\varphi}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!}\cos^3\varphi + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\cos^5\varphi \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1}{m!}\left[(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)\right]\cos\varphi^{m-1}\right] \tag{32}$$

einer für jedes φ und gerades m giltigen Formel, ergibt

$$D^{2n}\Psi_{\varphi=0} = (-1)^n U_{2n} = \frac{m^2}{2}\left[\frac{g_1}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!} g_3 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!} g_5 \ldots\right.$$

$$\left.\ldots (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1}{m!}((m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2))g_{m-1}\right]$$

$$D^{2n+1}\Psi_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = (-1)^{n+1} T_{2n+1}$$

$$-\frac{m^2}{2}\left[\frac{h_1}{2!}-\frac{m^2-2^2}{4!}h_3+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}h_5 \ldots\right.$$

$$\left.\ldots(-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{m!}(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2))h_{m-1}\right]$$

Beide Reihen brechen mit dem $\frac{m}{2}$ ten Gliede ab; die Coefficienten g und h können wieder mittelst der Formel

$$2^{r-1}\cos^r\varphi=\cos^r\varphi+\binom{r}{1}\cos(r-2)\varphi+\binom{r}{2}\cos(r-4)\varphi\ldots$$

$$\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\cos\varphi \qquad 32')$$

r ungerade

gefunden werden; es ist

$$g_r=D^{2n}\cos^r\varphi_{\varphi=0}=\frac{(-1)^n}{2^{r-1}}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}3^{2n}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\binom{r}{1}(r-2)^{2n}+r^{2n}\right]$$

$$h_r=D^{2n+1}\cos^r\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{r-1}}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}-\binom{r}{\frac{r-3}{2}}3^{2n+1}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{r+1}{2}}(r-2)^{2n+1}+(-1)^{\frac{r-1}{2}}r^{2n+1}\right]$$

somit

$$g_1=(-1)^n$$

$$g_3=\frac{(-1)^n}{2^2}\left(\binom{3}{1}+3^{2n}\right)$$

$$g_5=\frac{(-1)^n}{2^4}\left(\binom{5}{3}+\binom{5}{1}3^{2n}+5^{2n}\right)$$

$$g_7=\frac{(-1)^n}{2^6}\left(\binom{7}{5}+\binom{7}{3}3^{2n}+\binom{7}{1}5^{2n}+7^{2n}\right)$$

. . . .

$$h_1 = (-1)^{n+1}$$

$$h_3 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^2}\left(\binom{3}{1} - \binom{3}{0} 3^{2n+1}\right)$$

$$h_5 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^4}\left(\binom{5}{2} - \binom{5}{1} 3^{2n+1} + \binom{5}{0} 5^{2n+1}\right)$$

$$h_7 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^6}\left(\binom{7}{3} - \binom{7}{2} 3^{2n+1} + \binom{7}{1} 5^{2n+2} + \binom{7}{0} 7^{2n+1}\right)$$

. . . .

$$g_{m-1} = \frac{(-1)^n}{2^{m-2}}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}} + \binom{m-1}{\frac{m-4}{2}} 3^{2n} \ldots + \right.$$

$$\left. \ldots + \binom{m-1}{1}(m-3)^{2n} + (m-1)^{2n}\right)$$

$$h_{m-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{m-2}}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}} - \binom{m-1}{\frac{m-4}{2}} 3^{2n} \ldots + \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} (m-1)^{2n+1}\right) \quad \text{folglich}$$

$$U_{2n} = \frac{m^2}{2}\left[\frac{1}{2!} - \frac{(m^2-2^2)}{4!\ 2^2}\left(\binom{3}{1} + 3^{2n}\right)\right.$$

$$+ \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!\ 2^4}\left(\binom{5}{3} + \binom{5}{1} 3^{2n} + 5^{3n}\right)$$

$$- \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{8!\ 2^6} \times$$

$$\times \left(\binom{7}{5} + \binom{7}{3} 3^{2n} + \binom{7}{1} 5^{2n} + 7^{2n}\right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\ 2^{m-2}} \times$$

$$\times \left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}} + \binom{m-1}{\frac{m-4}{2}} 3^{2n} \ldots + \binom{m-1}{1}(m-3)^{2n}\right.$$

$$\left.\left. + (m-1)^{2n}\right)\right] \qquad 33)$$

$$m = 2k + 1$$

$$U_{2n+1} = \left[\frac{1}{2^2} - \frac{m^2-2^2}{4!\;2^2}\left(\binom{3}{1} - \binom{3}{0}\,3^{2n+1}\right)\right.$$

$$+ \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!\;2^4}\left(\binom{5}{2} - \binom{5}{1}\,3^{2n+1} + \binom{5}{0}\,5^{2n+1}\right)$$

$$- \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{8!\;2^6}\times$$

$$\times\left(\binom{7}{3} - \binom{7}{2}\,3^{2n+1} + \binom{7}{1}\,5^{2n+1} - \binom{7}{0}\,7^{2n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m+2}{2}}\,\frac{(m^2-2^2)\;\ldots\;(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\;2^{m-2}}\times$$

$$\times\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}} + \binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}\,3^{2n+1}\;\ldots\right.$$

$$\left.\left.\ldots(-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m-1}{1}(m-3)^{2n+1} + (-1)^{\frac{m-2}{2}}(m-1)^{2n+1}\right)\right] \qquad 34)$$

$$m = 2k+1$$

oder mit Berücksichtigung von

$$\left.\begin{aligned}
m\,\frac{m^2-2^2}{4!\;2^3} &= \frac{1}{4}\binom{\frac{m+2}{2}}{3}\\
m\,\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!\;2^5} &= \frac{1}{6}\binom{\frac{m+4}{2}}{5}\\
m\,\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{8!\;2^7} &= \frac{1}{8}\binom{\frac{m+6}{2}}{7}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
m\,\frac{(m^2-2^2)\;\ldots\;(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\;2^{m-1}} &= \frac{1}{m}\binom{m+1}{m-1} = \frac{1}{m}\binom{m+1}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad 35)$$

auch

$$U_{2n} = m\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{4}\binom{\frac{m+2}{2}}{3}\left(\binom{3}{1} + 3^{2n}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{6}\binom{\frac{m+4}{2}}{5}\left(\binom{5}{3}+\binom{5}{1}3^{2n}+5^{2n}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\binom{\frac{m+6}{2}}{7}\left(\binom{7}{5}+\binom{7}{3}3^{2n}+\binom{7}{1}5^{2n}+7^{2n}\right)\dots$$

$$\dots+(-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{m}\binom{m+1}{m-1}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}+\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}3^{2n}\dots\right.$$

$$\left.\dots+\binom{m-1}{1}(m-3)^{2n}+(m-1)^{2n}\right)\Big] \qquad 36)$$

$$m = 2k+1$$

$$T_{2n+1} = m\left[\frac{1}{2!}-\frac{1}{4}\binom{\frac{m+2}{2}}{3}\left(\binom{3}{1}-3^{2n+1}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{6}\binom{\frac{m+4}{2}}{5}\left(\binom{5}{3}-\binom{5}{1}3^{2n+1}+5^{2n+1}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\binom{\frac{m+6}{2}}{7}\left(\binom{7}{5}-\binom{7}{3}3^{2n+1}+\binom{7}{1}5^{2n+1}-7^{2n+1}\right)\dots$$

$$\dots+(-1)_{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{m}\binom{m+1}{m-1}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}-\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}3^{2n+1}\dots\right.$$

$$\left.\dots+(-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m-1}{1}(m-3)^{2n+1}+(-1)^{\frac{m}{2}+1}(m-1)^{2n+1}\right)\Big] \qquad 37)$$

$$m = 2k+1$$

4. Transformation der Reihen U_{2n} und T_{2n+1}.

Die wiederholte Integration der Gleichung 32) zwischen den Grenzen 0 und φ ergiebt

$$\int^{\varphi}\Psi\,d\varphi = \frac{\sin\varphi}{1}-\frac{\sin 3\varphi}{3}+\frac{\sin 5\varphi}{5}\dots+(-1)^{\frac{m-2}{2}}\frac{\sin(m-1)\varphi}{m-1}$$

$$\int_0^{\varphi}\overset{2}{\Psi}\,d\varphi = -\left[\frac{\cos\varphi}{1^2} - \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \frac{\cos 5\varphi}{5^2}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos(m-1)\varphi}{(m-1)^2}\right] + U_2$$

. . . .

$$\int_0^{\varphi}\overset{2n}{\Psi}\,d\varphi = (-1)^n\left[\frac{\cos\varphi}{1^{2n}} - \frac{\cos 3\varphi}{3^{2n}} + \frac{\cos 5\varphi}{5^{2n}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\cos(m-1)\varphi}{(m-1)^{2n}}\right] + U_2\frac{\varphi^{2n-2}}{(2n-2)!} - U_4\frac{\varphi^{2n-4}}{(2n-4)!}\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n U_{2n-2}\frac{\varphi^2}{2!} + (-1)^{n-1} U_{2n}$$

$$\int^{\varphi}\overset{2n+1}{\Psi}\,d\varphi = (-1)^n\left[\frac{\sin\varphi}{1^{2n+1}} - \frac{\sin 3\varphi}{3^{2n+1}} + \frac{\sin 5\varphi}{5^{2n+1}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{m-2}{2}} \frac{\sin(m-1)\varphi}{(m-1)^{2n+1}}\right] + U_2\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} - U_3\frac{\varphi^{2n-3}}{(2n-3)!}\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n U_{2n-1}\frac{\varphi^3}{3!} + (-1)^{n-1} U_{2n}\,\varphi$$

$$\int_0^{\varphi}\overset{2n}{\Psi}\,d\varphi_{\varphi=\pi} = \frac{U_2}{(2n-2)!}\pi^{2n-2} - \frac{U_4}{(2n-4)!}\pi^{2n-4}\ldots$$

$$\ldots + (-1)^n\frac{U_{2n-2}}{2!}\pi^2 + (-1)^{n-1}2\,U_{2n}\,, \tag{38}$$

$$\int_0^{\varphi}\overset{2n+1}{\Psi}\,d\varphi_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = (-1)^n T_{2n+1} + \frac{U_2}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$$

$$- \frac{U_4}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\ldots + (-1)^{n-1} U_{2n}\frac{\pi}{2} \tag{39}$$

und

$$\int_0^{\varphi} \overset{2n}{\Psi}\, d\varphi_{\varphi=\pi} = \frac{m^2}{2}\left[\frac{\gamma_1}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!}\gamma_3 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\gamma_5 \dots\right] \quad 40)$$

$$\left(\int_0^{\varphi} \overset{2n+1}{\Psi}\, d\varphi\right)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{m^2}{2}\left[\frac{\delta_1}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!}\delta_3 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\delta_5 \dots\right] \quad 41)$$

Die Grössen γ und δ bestimmen sich mittelst der Formel 32'); es ist

$$2^{r-1}\int_0^{\varphi} \cos^r\varphi\, d\varphi = \frac{\sin r\varphi}{r} + \binom{r}{1}\frac{\sin(r-2)\varphi}{r-2} \dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{\sin\varphi}{1}$$

$$2^{r-1}\int_0^{\varphi}\!\!\overset{2}{} \cos^r\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{\cos r\varphi}{r^2} + \binom{r}{1}\frac{\cos(r-2)\varphi}{(r-2)^2} \dots\right.$$

$$\left.\dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{\cos\varphi}{1^2}\right] + \frac{1}{r^2} + \frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^2} \dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}$$

$$2^{r-1}\int_0^{\varphi}\!\!\overset{3}{} \cos^r\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{\sin r\varphi}{r^3} + \binom{r}{1}\frac{\sin(r-2)\varphi}{(r-2)^3} \dots\right.$$

$$\left.\dots + \binom{r}{\frac{r-1}{r}}\frac{\sin\varphi}{1^3}\right] + \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^2} \dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\varphi$$

$$2^{r-1}\int_0^{\varphi}\!\!\overset{4}{} \cos^r\varphi\, d\varphi = \frac{\cos r\varphi}{r^4} + \binom{r}{1}\frac{\cos(r-2)\varphi}{(r-2)^4} \dots$$

$$\dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{\cos\varphi}{1^4} + \left[\frac{1}{r^2} + \frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^2} \dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^2}{2}$$

$$-\left[\frac{1}{r^4} + \frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^4} \dots + \binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]$$

. . . .

$$2^{r-1}\overset{2n}{\int_0^{\varphi}}\cos^r\varphi\,d\varphi = (-1)^n\left[\frac{\cos r\varphi}{r^{2n}} + \binom{r}{1}\frac{\cos(r-2)\varphi}{(r-2)^{2n}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{\cos\varphi}{1^{2n}}\right] + \left[\frac{1}{r^2}+\frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^2}\ldots\right]\frac{\varphi^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$-\left[\frac{1}{r^4}+\frac{\binom{r}{2}}{(r-2)^4}\ldots\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^{2n-3}}{(2a-4)!}$$

. . . .

$$+(-1)^n\left[\frac{1}{r^{2n-2}}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^{2n-2}}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^2}{2!}$$

$$+(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{r^{2n}}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^{2n-2}}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]$$

$$2^{r-1}\overset{2n+1}{\int_0^{\varphi}}\cos^r\varphi\,d\varphi = (-1)^n\left[\frac{\sin r\varphi}{r^{2n+1}}+\binom{r}{1}\frac{\sin(r-2)\varphi}{(r-2)^{2n+1}}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{\sin\varphi}{1^{2n+1}}\right]+\left[\frac{1}{r^2}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^2}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$-\left[\frac{1}{r^3}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^4}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^{2n-3}}{(2n-3)!}$$

. . . .

$$+(-1)^n\left[\frac{1}{r^{2n-2}}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^{2n-2}}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi^3}{3!}$$

$$+(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{r^{2n}}+\frac{\binom{r}{1}}{(r-2)^{2n}}\ldots+\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\right]\frac{\varphi}{1}$$

. . . .

$$2^{r-1}\gamma_r = \overset{2n}{\int_0^{\varphi}}\cos^r\varphi\,d\varphi_{\varphi=[\text{illegible}]}$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n}}\cdots+\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

$$+\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2}}\cdots+\frac{1}{r^{2}}\right]\frac{\pi^{2n-}}{(2n-2)!}$$

$$-\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{4}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{4}}\cdots+\frac{1}{r^{4}}\right]\frac{\pi^{2n-4}}{(2n-4)!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n-2}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n-2}}\right]\frac{\pi^{2}}{2!}$$

$$+(-1)^{n-1}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n}}\cdots+\frac{1}{r^{2n}}\right]$$

$$2^{r-1}\delta_r = \overset{2n+1}{\int_0^{\varphi}}\cos^r\varphi\,d\varphi \qquad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$= (-1)^{n}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n+1}}-\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n+1}}\right.$$

$$\left.+\binom{r}{\frac{r-5}{2}}\frac{1}{5^{2n+1}}\cdots+\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{r^{2n+1}}\right]$$

$$+\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2}}\cdots+\frac{1}{r^{2}}\right]\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$$

$$-\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{4}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{4}}\cdots+\frac{1}{r^{4}}\right]\frac{1}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3}\cdots$$

$$+(-1)^{n}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n-2}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n-2}}\cdots+\frac{1}{r^{2n-2}}\right]\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3}$$

$$+(-1)^{n+1}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n}}+\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\cdots+\frac{1}{r^{2n}}\right]\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Aus der Gegenüberstellung von 38) mit 40) und von 39) mit 41) gehen nun die folgenden Gleichungen hervor

$$\frac{U_2}{(2n-2)!}\pi^{2n-2} - \frac{U_4}{(2n-4)!}\pi^{2n-3} \dots$$

$$\dots + (-1)^n \frac{U_{2n-2}}{2!}\pi^2 + (-1)^{n-1} 2 U_{2n}$$

$$= \frac{m^2}{2}\left[\frac{\gamma_1}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!}\gamma_3 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\gamma_5 \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1}{m!}((m^2-2^2)\dots(m^2-\overline{m-2}^2))\gamma_{m-1}\right] \qquad 42)$$

$$(-1)^n T_{2n+1} + \frac{U_2}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} - \frac{U_4}{(2n-3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-3} \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} U_{2n} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{m^2}{2}\left[\frac{\delta_1}{2!} - \frac{m^2-2^2}{4!}\delta_3 + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}\delta_5 \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1}{m!}((m^2-2^2)\dots(m^2-\overline{m-2}^2))\delta_{m-1}\right] \qquad 43$$

Die nämlichen Schlüsse, welche zur Bestimmung von U_{2n+1}, T_{2n} und S_{2n} führten, gelten auch hier.

Die von π freien Glieder der einen Seiten von 42) und 43) sind denen der andern Seiten gleich.

Der von π freie Bestandteil von γ_r ist

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^{r-1}}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n}} + \binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{3n}} \dots + \frac{1}{r^{2n}}\right]$$

jener von

$$\gamma_1 \dots (-1)^{n-1}$$

$$\gamma_3 \dots \frac{(-1)^{n-1}}{2^2}\binom{3}{1}$$

$$\gamma_5 \dots \frac{(-1)^{n-1}}{2^4}\left[\binom{5}{2} + \binom{5}{1}\frac{1}{3^{2n}}\right]$$

$$\gamma_7 \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{2^6}\left[\binom{7}{3}+\binom{7}{2}\frac{1}{3^{2n}}+\binom{7}{1}\frac{1}{5^{2n}}\right]$$

. . . .

aus 42) folgt daher

$$\gamma_{m-1} \ldots \frac{(-1)^{n-1}}{2^{m-2}}\left[\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}\frac{1}{1^{2n}}+\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}\frac{1}{3^{2n}}\cdots+\frac{1}{(m-1)^{2n}}\right]$$

$$U_{2n}=\frac{m^2}{4}\left[\frac{1}{2!}-\frac{m^2-2^2}{4!\,2^2}\binom{3}{1}\right.$$

$$+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!\,2^4}\left(\binom{5}{2}+\frac{\binom{5}{1}}{3^{3n}}\right)$$

$$-\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{8!\,2^6}\left(\binom{7}{3}+\frac{\binom{7}{2}}{3^{2n}}+\frac{\binom{7}{1}}{5^{2n}}\right)\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\,2^{m-2}}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}}{3^{2n}}+\cdots+\frac{1}{(m-1)^{2n}}\right)\right] \qquad 44)$$

$$m=2k+1$$

Der von π freie Bestandteil von δ_r ist

$$\frac{(-1)^n}{2^{r-1}}\left[\binom{r}{\frac{r-1}{2}}\frac{1}{1^{2n+1}}-\binom{r}{\frac{r-3}{2}}\frac{1}{3^{2n+1}}+\binom{r}{\frac{r-5}{2}}\frac{1}{5^{2n+1}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{r^{2n+1}}\right]$$

jener von

$$\delta_1 \ldots (-1)^n$$

$$\delta_3 \ldots \frac{(-1)^n}{2^2}\binom{3}{1}$$

$$\delta_5 \ldots \frac{(-1)^n}{2^4}\left[\binom{5}{2}-\binom{5}{1}\frac{1}{3^{2n+1}}\right]$$

$$\delta_7 \ldots \frac{(-1)^n}{2^6}\left[\binom{7}{3}-\binom{7}{2}\frac{1}{3^{2n+1}}+\binom{7}{1}\frac{1}{5^{2n+1}}\right]$$

. . . .

$$\delta_{m-1} \ldots \frac{(-1)^n}{2^{m-2}}\left[\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}-\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}\frac{1}{3^{2n+1}}\ldots+\frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{(m-1)^{2n+1}}\right]$$

aus 43) folgt daher:

$$T_{2n+1}=\frac{m^2}{2}\left[\frac{1}{2!}-\frac{m^2-2^2}{4!\,2^2}\binom{3}{1}+\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!\,2^4}\left(\binom{5}{2}-\frac{\binom{5}{1}}{3^{2n+1}}\right)\right.$$

$$-\frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{8!\,2^6}\left(\binom{7}{3}-\frac{\binom{7}{2}}{3^{2n+1}}+\frac{\binom{7}{1}}{5^{2n+1}}\right)\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{(m^2-2^2)\ldots(m^2-\overline{m-2}^2)}{m!\,2^{m-2}}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}}{3^{2n}}\ldots+\frac{\binom{m-1}{\frac{m-6}{2}}}{5^{2n}}\ldots+\frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{(m-1)^{2n}}\right)\right] \qquad 45)$$

Die Relationen 35) gestatten noch folgende Schreibung

$$T_{2n}=\frac{m}{2}\left[\frac{m}{2.2!}-\frac{1}{4}\binom{\frac{m+2}{2}}{3}\binom{3}{1}+\frac{1}{6}\binom{\frac{m+4}{2}}{5}\left(\binom{5}{2}+\frac{\binom{5}{1}}{3^{2n}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{8}\binom{\frac{m+6}{2}}{7}\left(\binom{7}{3}+\frac{\binom{7}{2}}{3^{2n}}+\frac{\binom{7}{1}}{5^{2n}}\right)\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{m+2}{2}}\frac{1}{m}\binom{m+1}{m-1}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\binom{m-1}{m-4}}{3^{2n}}\ldots+\frac{1}{(m-1)^{2n}}\right)\right] \qquad 46)$$

$$T_{2n+1} = m\left[\frac{m}{2!} - \frac{1}{4}\binom{\frac{m+2}{2}}{3}\binom{3}{1} + \frac{1}{6}\binom{\frac{m+4}{2}}{5}\left(\binom{5}{2} - \frac{\binom{5}{1}}{3^{2n+1}}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{8}\binom{\frac{m+6}{2}}{7}\left(\binom{7}{3} - \frac{\binom{7}{2}}{3^{2n+1}} + \frac{\binom{7}{1}}{5^{2n+1}}\right) \ldots,$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{m+2}{2}} \frac{1}{m}\binom{m+1}{m-1}\left(\binom{m-1}{\frac{m-2}{2}}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\binom{m-1}{\frac{m-4}{2}}}{3^{2n+1}} + \frac{\binom{m-1}{\frac{m-6}{2}}}{5^{2n+1}} \ldots + \frac{(-1)^{\frac{m-2}{2}}}{(m-1)^{2n+1}}\right)\right] \qquad 47)$$

5. Transformation der Reihen V_{2n+1} und S_{2n+1}.

Die $2n+1$ malige Integration von

$$X \equiv \sin 2\varphi - \sin 4\varphi + 6\varphi \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \sin(m-1)\varphi =$$

$$\frac{\sin\varphi + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \sin m\varphi}{2\cos\varphi}$$

$$= \begin{cases} 2\dfrac{\cos\frac{m+1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin\dfrac{m-1}{2}\varphi, & m = 4g+1 \\[2ex] 2\dfrac{\cos\frac{m-1}{2}\varphi}{\cos\varphi}\sin\dfrac{m+1}{2}\varphi, & m = 4g+3 \end{cases}$$

$$= 2\sin(\mu-1)\varphi\left(1 - \frac{\mu^2-1^2}{2!}\sin^2\varphi + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{4!}\sin^4\varphi \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{(\mu^2-1^2)\ldots(\mu^2-\overline{\mu-2}^2)}{(\mu-1)!}\sin^{\mu-1}\varphi\right)$$

wo

$$\mu = \frac{m+1}{2}$$

wenn

$$m = 4g + 1$$

und

$$\mu = \frac{m-1}{2}$$

wenn

$$m = 4g + 3$$

ergibt

$$\int_0^{\varphi} X d\varphi = -\left[\frac{\cos 2\varphi}{2} - \frac{\cos 4\varphi}{4} + \frac{\cos 6\varphi}{6} \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{\cos(m-1)\varphi}{m-1}\right] + \tfrac{1}{2} V_1$$

$${}^{2}\!\int_0^{\varphi} X d\varphi = -\left[\frac{\sin 2\varphi}{2^2} - \frac{\sin 4\varphi}{4^2} + \frac{\sin 6\varphi}{6^2} \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{\sin(m-1)\varphi}{(m-1)^2}\right] + \tfrac{1}{2} V_1 \varphi$$

$${}^{3}\!\int_0^{\varphi} X d\varphi = +\left[\frac{\cos 2\varphi}{2^3} - \frac{\cos 4\varphi}{4^3} + \frac{\cos 6\varphi}{6^3} \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{\cos(m-1)\varphi}{(m-1)^3}\right] + \tfrac{1}{2} V_1 \frac{\varphi^2}{2} - \frac{V_3}{2^2}$$

. . . .

$${}^{2n+1}\!\int_0^{\varphi} X d\varphi = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\left[\frac{\cos 2\varphi}{1^{3n+1}} - \frac{\cos 4\varphi}{2^{\bar{5}n+1}} + \frac{\cos 6\varphi}{3^{2n+1}} \dots\right.$$

$$\left.\dots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{\cos(m-1)\varphi}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^{2n+1}}\right]$$

$$+ \frac{V_1}{2^1}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} - \frac{V_3}{2^3}\frac{\varphi^{2n-2}}{(2n-2)} \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{V_{2n-1}}{2^{2n-1}}\frac{\varphi^2}{2!} + (-1)^n \frac{V_{2n+1}}{2^{2n+1}}$$

und

$$2n+1 \int_0^{\varphi} X d\varphi_{\varphi=\pi} = \frac{V_1}{2}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!} - \frac{V_3}{2^3}\frac{\pi^{2n-2}}{(2n-2)!}\ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{V_{2n-1}}{2^{2n-1}}\frac{\pi^2}{2!} =$$

$$\eta_0 - \frac{\mu^2-1^2}{2!}\eta_2 + \frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{4!}\eta_4 - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{(\mu^2-1^2)\ldots(\mu^2-\overline{\mu-2}^2)}{(\mu-1)^2}\eta_{\mu-1} \tag{48}$$

Die η zu bestimmen, dient

$$(-1)^{\frac{r}{2}} 2^{r-1}\sin(\mu-1)\varphi\sin^r\varphi = \sin(\mu-1)\varphi\left[\cos r\varphi - \binom{r}{1}\cos(r-2)\varphi\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{\frac{r}{2}-1}\binom{r}{\frac{r}{2}-1}\cos 2\varphi + (-1)^{\frac{r}{2}}\tfrac{1}{2}\binom{r}{\frac{r}{2}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\sin(\mu+r-1)\varphi - \binom{r}{1}\sin(\mu+r-3)\varphi + \binom{r}{2}\sin(\mu+r-5)\ldots\right.$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{r}{\frac{r}{2}}\sin(\mu-1)\varphi\ldots$$

$$\left.\ldots - \binom{r}{1}\sin(\mu-r+1)\varphi + \sin(\mu-r-1)\varphi\right] \tag{49}$$

es ist dann

$$2n+1 \quad (-1)^{\frac{r}{2}} 2^r \int_0^{\varphi} \sin(\mu-1)\varphi\sin^r\varphi\, d\varphi =$$

$$(-1)^{n+1}\left[\frac{\cos(\mu+r-1)\varphi}{(\mu+r-1)^{2n+1}} - \binom{r}{1}\frac{\cos(\mu+r-3)\varphi}{(\mu+r-3)^{2n+1}}\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{\cos(\mu-r-1)\varphi}{(\mu-r-1)^{2n+1}}\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{\mu+r-1} - \binom{r}{1}\frac{1}{\mu+r-3}\ldots + \frac{1}{\mu-r-1}\right]\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

. . . .

$$+(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(\mu+r-1)^{2n-1}}-\binom{r}{1}\frac{1}{(\mu+r-3)^{2n-1}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{(\mu-r-1)^{2n-1}}\right]\frac{\varphi^2}{2!}$$

$$+(-1)^{n}\left[\frac{1}{(\mu+r-1)^{2n+1}}-\binom{r}{1}\frac{1}{(\mu+r-3)^{2n+1}}\cdots+\frac{1}{(m-r-1)^{2n+1}}\right]$$

Die Vergleichung der $\frac{\pi^2}{2!}$ enthaltenden Glieder in 48) ergiebt ξ_{2n-1}; der $\frac{\pi^2}{2!}$ enthaltende Bestandteil von

$${}^{2n+2}\eta_r=\left.\int_0^{\varphi}\sin(\mu-1)\varphi\sin^r\varphi\,d\varphi\right\}_{\varphi=\pi}\qquad\text{ist}$$

$$\frac{(-1)^{n+1+\frac{r}{2}}}{2^r}\left[\frac{1}{(\mu+r-1)^{2n-1}}-\binom{r}{1}\frac{1}{(\mu+r-3)^{2n-1}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\binom{r}{r-1}\frac{1}{(\mu-r+1)^{2n-1}}+\frac{1}{(\mu-r-1)^{2n-1}}\right]$$

daher jener von

$$\eta_0\cdots\frac{(-1)^{n+1}}{(\mu-1)^{2n-1}}$$

$$\eta_2\cdots\frac{(-1)^{n}}{2}\left[\frac{1}{(\mu+1)^{2n-1}}-\frac{\binom{2}{1}}{(\mu-1)^{2n-1}}+\frac{1}{(\mu-3)^{2n-1}}\right]$$

$$\eta_4\cdots\frac{(-1)^{n+1}}{2^4}\left[\frac{1}{(\mu+3)^{2n-1}}-\frac{\binom{4}{1}}{(\mu+1)^{2n-1}}+\frac{\binom{4}{2}}{(\mu-1)^{2n-1}}\right.$$

$$\left.-\frac{\binom{4}{3}}{(\mu-3)^{2n-1}}+\frac{1}{(\mu-5)^{2n-1}}\right]$$

. . . .

$$\eta_{\mu-1}\cdots\frac{(-1)^{n+2+\frac{\mu-1}{2}}}{2^{\mu-1}}\left[\frac{1}{(2\mu-2)^{2n-1}}-\frac{\binom{\mu-1}{1}}{(2\mu-4)^{2n-1}}\right.$$

$$\left.\cdots-\frac{\binom{\mu-1}{1}}{2^{2n-1}}\right]$$

um dieses Glied richtig zu erhalten, muss schon vor der Integration in 49) $r=\mu-1$ gesetzt werden. Schliesslich ist $n+1$ statt n geschrieben:

$$\frac{V_{2n+1}}{2^{2n+1}}=\frac{1}{(\mu-1)^{2n+1}}+\frac{\mu^2-1^2}{2^2 2!}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{(\mu+1)^{2n+1}}-\frac{\binom{2}{1}}{(\mu-1)^{2n+1}}+\frac{1}{(\mu-3)^{2n+1}}\right\}$$

$$+\frac{(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{2^4.4!}\left\{\frac{1}{(\mu+3)^{2n+1}}-\frac{\binom{4}{1}}{(\mu+1)^{2n+1}}+\frac{\binom{4}{2}}{(\mu-1)^{2n+1}}\right.$$

$$\left.-\frac{\binom{4}{1}}{(\mu-3)^{2n+1}}+\frac{1}{(\mu-5)^{2n+1}}\right\}\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\frac{(\mu^2-1^2)\ldots(\mu^2-\overline{\mu-2}^2)}{(\mu-1)^2}\times$$

$$\left\{\frac{1}{(2\mu-2)^{2n+1}}\cdots-\frac{\binom{\mu-1}{1}}{2^{2n+1}}\right\} \tag{50}$$

oder

$$\frac{V_{2n+1}}{2^{2n+1}}=\frac{1}{(\mu-1)^{2n+1}}+\left\{\begin{matrix}\frac{\mu+1}{2}\\2\end{matrix}\right\}\left\{\frac{1}{(\mu+1)^{2n+1}}-\frac{\binom{2}{1}}{(\mu-1)^{2n+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\mu-3)^{2n+1}}\right\}+\left\{\begin{matrix}\frac{\mu+3}{2}\\4\end{matrix}\right\}\left\{\frac{1}{(\mu+3)^{2n+1}}-\frac{\binom{4}{1}}{(\mu+1)^{2n+1}}+\frac{\binom{4}{2}}{(\mu-1)^{2n+1}}\right.$$

$$\left.-\frac{\binom{4}{1}}{(\mu-3)^{2n+1}}+\frac{1}{(\mu-5)^{2n+1}}\right\}\cdots+(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\binom{\mu-1}{\mu-1}\times$$

$$\left\{\frac{1}{(2\mu-2)^{2n+1}}-\frac{\binom{\mu-1}{1}}{(2\mu-4)^{2n+1}}\cdots-\frac{\binom{\mu-1}{1}}{2^{2n+1}}\right\}$$

$$\mu=j+\frac{1+(-1)^j}{2} \tag{51}$$

daher ungerade.

$$S_{2n+1}=2T_{2n+1}-V_{2n+1}$$

Brünn, August 1890.

X.

Ableitungen von Identitäten.

Von

Franz Rogel.

Lässt sich eine Function $f(x)$ in eine Reihe von der Form

$$ax^r + bx^{r+k} \; . \; . \; .$$

entwickeln, so verschwindet der $n$te Differentialquotient $D_x{}^n f(x)$ gleichzeitig mit x, wenn $n < r$ ist.

Dieser Umstand kann zur Ableitung von Identitäten und Discontinuitäts-Factoren benutzt werden.

Functionen der genannten Eigenschaft können aus elementaren Functionen am einfachsten auf folgende Arten gebildet werden.

a) Es wird das Argument y in

$$\varphi(y) = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \; . \; . \; .$$

durch die $r$te Potenz einer zweckmässig gewälten Function

$$y = [\psi(x)]^r = (ax + bx^2 \; . \; . \; .)^r$$

ersetzt.

b) Eine Function

$$\psi(x) = ax + bx^r + \; . \; . \; .$$

wird zur $r$ten Potenz erhoben.

In jedem Falle können nur solche Functionen in Betracht kommen, deren höhere Ableitungen sich independent darstellen lassen. Insbesonders wird die Kenntniss der Ableitungen der Potenzen von Functionen erfordert.

Die Auswal ist daher eine beschränkte, da nur die independenten Dartellungen der höheren Ableitungen von

$$x^m, \quad (e^{ax})^r, \quad (\sin ax)^r, \quad (\cos ax)^r, \quad [f(1+x))^r, \quad \left[\frac{f(x)}{(x-\alpha)\ldots(x-\lambda)}\right]^r$$

bekannt sind.

Es folgen nun Ableitungen bemerkenswerter Identitäten.

1.

Es sei

$$[(1+x)^{-m}-1]^r = ax^r + \ldots =$$

$$= (1+x)^{-mr} - \binom{r}{1}(1+x)^{-m(r-1)} + \ldots + (-1)^{r-1}(1+x)^{-m} + (-1)^r$$

dann ist

$$D^n(1+x)^{-k} = (-1)^n n! \binom{n+k}{n}(1+x)^{-k-n} \quad \text{und}$$

$$D^n(1+x)^{-k}_{x=0} = (-1)^n n! \binom{n+k}{n}$$

Es ist nun

$$D^n [(1+x)^{-m} -1]^r_0 = 0$$

wenn $n < r$ und nach leichter Reduction

$$\binom{n+mr}{n} - \binom{r}{1}\binom{n+m(r-1)}{n} + \binom{r}{2}\binom{n+m(r-2)}{n} - + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \binom{r}{r-2}\binom{n+2m}{n} + (-1)^{r+1}\binom{r}{r-1}\binom{n+m}{n} = 0$$

$$n < r \quad (1)$$

2.

Die Annahme von

$$e^x - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

ergiebt

$$D^n(e^x-1)^r_0 = D^n(e^{rx} - \binom{r}{1}e^{(r-1)x} + \ldots + (-1)^{r-1}e^x + (-1)^r) = 0 \quad n < r$$

somit

$$r^n - \binom{r}{1}(r-1)^n + \binom{r}{2}(r-2)^n - + \ldots + (-1)^r\binom{r}{r-2}2^n$$

$$+ (-1)^{r+1}\binom{r}{r-1}1^n = 0 \quad (2)$$

Dieses Resultat, welches der Verfasser auf anderem Wege bereits abgeleitet hat (s. „Ein Discontinuitätsfactor“, Archiv, 1890, pag. 334) hängt mit der Lehre von den Facultäten-Coefficienten eng zusammen.

Ist nämlich in dem linksseitigen Ausdrucke $n > r$, so ist derselbe von dem mit $r!$ multiplicirten Coefficienten $C_{n-r}{}^{-r}$ der Potenz μ^{-n} der Entwicklung von

$$\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-r-1)(\mu+r)} = C_0{}^{-r}\mu^{-r} + C_1{}^{-r}\mu^{-r-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{n-r}{}^{-r}\mu^{-n} + \ldots$$

nicht verschieden. Dem Falle $n < r$ entspräche ein Coefficient mit einem negativen unteren Zeiger, einer vor μ^{-r} stehenden Potenz angehörend. Das Nichtvorkommen einer solchen stimmt daher mit der Tatsache des Verschwindens des gefundenen Ausdruckes vollkommen überein.

3.

Die binomische Entwicklung

$$(y-1)^r = y^r - \binom{r}{1} y^{r-2} + \ldots + (-1)^r$$

zu Grunde legend, sei

$$y = e^{k \arcsin x}$$

so ist wieder

$$D^n(y-1)^r = 0, \quad n < r$$

Die höheren Ableitungen von Potenzen von y sind mit Zuhilfenahme der bekannten Entwicklung

$$y = e^{k \arcsin x} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

wo

$$A_{n+2} = \frac{k^2+n^2}{(n+1)(n+2)} A_n$$

daher

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = \frac{k}{1}$$

$$A_2 = \frac{k^2}{2!} \qquad A_3 = \frac{k}{3!}(k^2+1_2)$$

. . . .

$$A_{2\mu} = \frac{k^2}{(2\mu)!}(k^2+2^2)(k^2+4^2)\ldots(k^2+\overline{2\mu-2}^2)$$

$$A_{2\mu-1} = \frac{k}{(2\mu-1)!}(k^2+1^2)(k^2+3^2)\ldots(k^2+\overline{2\mu-3}^2)$$

leicht zu bilden. Die Fälle eines geraden und ungeraden n trennend ist

a) $D^{2\nu}(y^r) = (k^2r^2+\overline{2\nu-2}^2)(k^2r^2+\overline{2\nu-4}^2)\ldots(k^2r^2)$

demgemäss

$$(k^2r^2+\overline{2\nu-2}^2)(k^2r^2+\overline{2\nu-4}^2)\ldots k^2r^2$$
$$-\binom{r}{1}(k^2\overline{r-1}^2+\overline{2\nu-2}^2)(k^2\overline{r-1}^2+\overline{2\nu-4}^2)\ldots k^2\overline{r-1}^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\binom{r}{r-2}(k^2r^2+\overline{2\nu-2}^2)(k^22^2+\overline{2\nu-4}^2)\ldots k^2 2^2$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}(k^21^2+\overline{2\nu-2}^2)(k^21^2+\overline{2\nu-4}^2)\ldots k^21^2 = 0$$
$$n<r \quad (3$$

b) $D^{\overline{2\nu-1}}(y^r) = (k^2r^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^2r^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots(kr)$

somit

$$(k^2r^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^2r^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots k^2r^2$$
$$-\binom{r}{1}(k^2\overline{r-1}^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^2\overline{r-1}^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots k(r-1)$$
$$+\binom{r}{2}(k^2\overline{r-2}^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^2\overline{r-2}^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots k(r-2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\binom{r}{r-2}(k^22^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^22^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots(2k)$$
$$+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}(k^21^2+\overline{2\nu-3}^2)(k^21^2+\overline{2\nu-5}^2)\ldots(1k) \quad (3'$$

4.

Für $y = \sin x$ ist

$$D^n\sin^r x\}_0 = 0, \quad n<r$$

a) $r = 2m + \sin^{2m}x = 2^{-2m+1}(\frac{1}{2}\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m-1}\cos 2x + \ldots$

$\ldots + (-1)^m\binom{2m}{0}\cos 2mx)$ (m eine ganze pos. Zal)

daher, wenn n gerade,

$$\binom{2m}{0}\overline{2m}^n - \binom{2m}{1}\overline{2m-2}^n + - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1}2^n = 0$$

oder

$$\binom{2m}{0} m^n - \binom{2m}{1}\overline{m-1}^n + - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{m-1}1^n = 0$$

$$n < 2m \quad (4)$$

b) $r = 2m-1$ (m eine ganze pos. Zal)

$$\sin^{2m-1}x = 2^{-2m-2}\left(\binom{2m-1}{m-1}\sin x - \binom{2m-1}{m-2}\sin 3x \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{0}\sin(2m-1)x\right)$$

daher bei ungeradem n

$$\overline{2m-1}^n - \binom{2m-1}{0}\overline{2m-3}^n \ldots + (-1)^m\binom{2m-1}{m-2}3p$$

$$+ (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{m-1}1^n = 0 \quad n < 2m-1 \quad (4')$$

5.

Bekanntlich ist für reelle, sonst beliebige μ

$$\cos\mu u = 1 - \frac{\mu^2}{2!}\sin^2 u + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)}{4!}\sin^4 u - \ldots$$

daher, n gerade voraussetzend, mit Benutzung der bekannten Nullwerte von $D^n \sin^{2\lambda} u$:

$$\{D^n \cos\mu u\}_0 = \mu^n \cos\left(\mu u + n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n}{2}}\mu^n$$

und

$$\mu^n = \frac{\mu^2}{2!}\binom{2}{0}2^{n-1} + \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)2^{n-3}}{4!}\left(\binom{4}{0}2^n - \binom{4}{1}1^n\right)$$

$$+ \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)}{6!}2^{n-5}\left(\binom{6}{0}3^n - \binom{6}{1}2^n + \binom{6}{2}1^n\right)$$

$$+ \frac{\mu^2(\mu^2-2^2)(\mu^2-4^2)(\mu^2-6^2)}{8!}2^{n-7}\left(\binom{8}{0}4^n - \binom{8}{1}3^n + \binom{8}{2}2^n\right.$$

$$\left. - \binom{8}{3}1^n\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\mu^2(\mu^2-2^2)\ldots$$

$$\ldots (\mu^2 - \overline{n-2}^2) 2^1 \left(\binom{n}{0} \left(\frac{n}{2}\right)^n - \binom{n}{1} \left(\frac{n-2}{2}\right)^n + - \ldots \right)$$

(n gerade) (5)

6.

$$\sin \mu u = \frac{\mu}{1} \sin u - \frac{\mu(\mu^2 - 1^2)}{3!} \sin^3 u + \frac{\mu(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)}{5!} \sin^5 u - \ldots$$

Ein **ungerades** n vorausgesetzt ist

$$\{D^n \sin \mu u\}_0 = \mu^n \sin\left(\mu u + n\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mu^n \cos \mu u$$

und

$$\mu^n = \frac{\mu}{1!} 1^n - \frac{\mu}{3!} (\mu^2 - 1^2) 2^{-2} \left(3^n - \binom{3}{1} 1^n\right)$$

$$+ \frac{1}{5!} \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2) 2^{-4} \left(5^n - \binom{5}{1} 3^n + \binom{5}{2} 1^n\right)$$

$$- \frac{1}{7!} \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)(\mu^2 - 5^2) 2^{-6} \left(7^n - \binom{7}{1} 5^n + \binom{7}{2} 3^n\right.$$

$$\left. - \binom{7}{3} 1^n\right) + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \mu(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2) \ldots$$

$$\ldots (\mu^2 - \overline{n-2}^2) 2^{-n+1} \left(n^n - \binom{n}{1} (n-2)^n + \binom{n}{2} \overline{n-4}^n \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{\frac{n-3}{2}} 3^n + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} 1^n \right)$$

(n ungerade, μ beliebig (6)

7.

$$\frac{\sin \mu u}{\cos u} = \frac{\mu}{1} \sin u - \frac{\mu(\mu^2 - 2^2)}{3!} \sin^3 u + \frac{1}{5!} \mu(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2) \sin^5 u - + \ldots$$

Nun kann anch geschrieben werden

$$\frac{\sin \mu u}{\cos u} = \sin \mu u . \sec u$$

Ferner ist

$$\sec u = 1 + \frac{\tau_2}{2!} u^2 + \frac{\tau_4}{4!} u^4 + \ldots \quad \left(-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}\right)$$

daher

$$\{D^{2r} \sec u\}_0 = \tau_{2r}$$

und

$$\{D^{2r-1} \sec u\}_0 = 0$$

somit bei **ungeradem** n

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} D^n(\sin \mu u \,.\, \sec u)$$

$$= \mu^n - \binom{n}{2} \mu^{n-2} \tau_2 + \binom{n}{4} \mu^{n-4} \tau_4 - \ldots - \binom{n}{n-3} \mu^3 \tau_{n-3}$$

$$+ \binom{n}{n-1} \mu \tau_{n-1} = \mu \,.\, 1^n - \frac{1}{3!} \mu(\mu^2 - 2^2) 2^{-2} \left(3^n - \binom{3}{1} 1^n\right)$$

$$+ \frac{1}{5!} \mu(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2) 2^{-4} \left(5^n - \binom{5}{1} 3^n + \binom{5}{2} 1^n\right)$$

$$- \frac{1}{7!} \mu(\mu^2 - 2^2)(\mu^2 - 4^2)(\mu^2 - 6^2) 2^{-6} \left(7^n - \binom{7}{1} 5^n + \binom{7}{2} 3^n - \binom{7}{3} 1^n\right) \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n!} \mu(\mu^2 - 2^2) \ldots (\mu^2 - \overline{n-1}^2) 2^{-n+1} \Big(n^n$$

$$- \binom{n}{1} \overline{n-2}^n + \binom{n}{2} \overline{n-4}^n \ldots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} \binom{n}{\frac{n-3}{2}} 3^n$$

$$+ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{\frac{n-1}{2}} 1^n \Big) \tag{7}$$

Wenn μ eine **gerade** Zal $< n-2$ ist, so bricht der Ausdruck rechter Hand früher ab, was übrigens auch bei der Formel (5) stattfindet. In diesem Falle ist aber

$$(-1)^{\frac{\mu-2}{2}} \frac{1}{2} \frac{\sin \mu u}{\cos u} = \sin u - \sin 3u + \sin 5u \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{\mu-2}{2}} \sin(\mu - 1)u$$

daher bei ungeradem n

$$(-1)^{\frac{\mu-2}{2}} \frac{1}{2} \left\{D^n \frac{\sin \mu u}{\cos u}\right\}_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Big(1^n - 3^n + 5^n \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{\frac{\mu-2}{2}} (\mu - 1)^n\Big)$$

und durch Vergleich mit (7)

$$1^n-3^n+5^n-+\dots+(-1)^{\frac{\mu-2}{2}}(\mu-1)^n$$

$$=(-1)^{\frac{\mu-2}{2}}\left[\mu^n-\binom{n}{2}\mu^{n-2}\cdot\tau_2+\binom{n}{4}\mu^{n-4}\tau_4\dots\right.$$

$$\left.\dots-\mu^3\binom{n}{n-3}\tau_{n-3}+\binom{n}{n-1}\mu\,\tau_{n-1}\right]\quad (n \text{ ungerade}) \qquad (8)$$

Bemerkenswert ist die Aehnlichkeit dieser Formel mit der Daniel Bernoulli'schen für die Potenzreihe der ganzen Zalen, nur treten hier die Euler'schen Zalen oder Secantencoefficienten $\tau_2, \tau_4 \dots$ an die Stelle der Bernoulli'schen Zalen $B_1, B_3 \dots$ Die linksseitige alternirende Potenzreihe zählt $\frac{\mu}{2}$, die rechtsseitige endliche Reihe $\frac{n+1}{2}$ Glieder.

Ist $\mu > n+1$, so kann der rechtsseitige Ausdruck als Summe der Potenzreihe angesehen werden. In der Formel (7) liegt für dieselbe ein gleichwertiger die Euler'schen Zalen nicht enthaltender Ausdruck mit $\frac{n+1}{2}$ Gliedern vor.

Wenn jedoch $\mu < n+1$ ist, kann die Potenzreihe als Summen-Ausdruck für die rechtsseitige endliche Reihe gelten.

Insbesonders für $\mu = 2$ wird

$$2^n-\binom{n}{2}2^{n-2}\tau_2+\binom{n}{4}2^{n-4}\tau_4-+\dots-\binom{n}{n-3}2^3\tau_{n-3}$$

$$+\binom{n}{n-1}2^1\tau_{n-1}=1 \qquad (9)$$

und für $\mu = 4$

$$4^n-\binom{n}{2}4^{n-2}\tau_2+\binom{n}{4}4^{n-4}\tau_4-\dots-\binom{n}{n-3}4^3\tau_{n-3}$$

$$+\binom{n}{n-1}4\tau_{n-1}+1=3^n \quad (n \text{ ungerade}) \qquad (10)$$

Ist $\mu = \frac{n+1}{\nu}$ und ν eine ganze Zal, so ist

$$\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^n - \binom{n}{2}\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^{n-2}\tau_2 + \binom{n}{4}\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^{n-4}\tau_4 - \dots$$

$$\dots - \binom{n}{n-3}\left(\frac{n+1}{\nu}\right)^3 \tau_{n-3} + \binom{n}{n-1}\left(\frac{n+1}{\nu}\right)\tau_{n-1}$$

$$= \left(\frac{n+1}{\nu} - 1\right)^n - \left(\frac{n+1}{\nu} - 3\right)^n + - \dots + 5^n - 3^n + 1^n \qquad (11)$$

8.

$$\frac{\cos\mu u}{\cos u} = 1 - \frac{\mu^2 - 1^2}{2!}\sin^2 u + \frac{1}{4!}(\mu^2 - 1^2)(\mu^2 - 3^2)\sin^4 u - + \dots$$

Unter Voraussetzung eines **geraden** n ist dann

$$D^n \frac{\cos\mu u}{\cos u} = D^n(\cos\mu u \sec u)$$

daher

$$\mu^n - \binom{n}{2}\mu^{n-2}\tau_2 + \binom{n}{4}\mu^{n-4}\tau_4 - + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{n-2}\mu^2\tau_{n-2} + (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{n}\tau_n$$

$$= \frac{1}{2!}(\mu^2-1^2)\binom{2}{0}2^{n-1} + \frac{1}{4!}(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)2^{n-3}\left(\binom{4}{0}2^n - \binom{4}{1}1^n\right)$$

$$+ \frac{1}{6!}(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)(\mu^2-5^2)2^{n-5}\left(\binom{6}{0}3^n - \binom{6}{1}2^n + \binom{6}{2}1^n\right)$$

$$+ \frac{1}{8!}(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)(\mu^2-5^2)(\mu^2-7^2)2^{n-7}\times$$

$$\times\left(\binom{8}{0}4^n - \binom{8}{1}3^n + \binom{8}{2}2^n - \binom{8}{3}1^n\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}(\mu^2-1^2)(\mu^2-3^2)\dots(\mu^2-\overline{n-1}^2)\,2^1$$

$$\times\left(\binom{n}{0}\left(\frac{n}{2}\right)^n - \binom{n}{1}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n + \binom{n}{2}\left(\frac{n-4}{2}\right)^n - + \dots\right)\dots \qquad (12)$$

Es ist wieder

$$\frac{1}{2\cos u} + (-1)^{\frac{\mu}{2}-1}\frac{\cos\mu u}{2\cos u} = \cos u - \cos 3u + \cos 5u - + \dots$$

$$\dots + (-1)^{\frac{\mu}{2}-1}\cos(\mu-1)u$$

somit nach wiederholter Differentiation für $u=0$ und n und μ gerade:

$$1^n-3^n+5^n\ldots+(-1)^{\frac{\mu}{2}-1}(\mu-1)^n$$

$$=\tfrac{1}{2}\tau_n+(-1)^{\frac{\mu}{2}-1}\tfrac{1}{2}\Big[\mu^n-\binom{n}{2}\mu^{n-2}\tau_2+\binom{n}{4}\mu^{n-4}\tau_4-+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{n-2}\mu^2\tau_{n-2}+(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{n}\tau_n\Big] \qquad (13)$$

In dem Falle eines geraden $\frac{\mu+n}{2}$ enthält dieser Ausdruck kein von μ freies Glied. In Verbindung mit der Formel (12) entsteht für die Summe der Potenzreihe ein die Euler'schen Zalen nicht enthaltender Ausdruck.

9.

Wird nach a) in der hyperbolischen Function $\frac{2}{e^y+e^{-y}}$ y durch $\log(1+x)$ ersetzt, so entsteht

$$2\frac{1+x}{2+2x+x^2}=1-\frac{\tau_2}{2!}\overline{\log(1+x)}^2+\frac{\tau_4}{4!}\overline{\log(1+x)}^4\ \ldots$$

worin τ_2, τ_4 ... die Euler'schen Zalen bedeuten.

Es ist ferner

$$2\frac{1+x}{2+2x+x^2}=i\left(\frac{1+\alpha_2}{x-\alpha_2}-\frac{1+\alpha_1}{x-\alpha_1}\right)$$

$$\alpha_1=-1+i=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}i}$$

$$\alpha_2=-1-i=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

daher

$$D^n 2\frac{1+x}{2+2x+x^2}=(-1)^n i\,n!\left(\frac{1+\alpha_2}{(x-\alpha_2)^{n+1}}+\frac{1+\alpha_1}{(x-\alpha_1)^{n+1}}\right)$$

und für $x=0$

$$= -i\frac{n!}{2^{n+1}}\left(\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1} + 2\left(\alpha_1^n - \alpha_2^n\right)\right)$$

$$= 2^{-\frac{n+1}{2}}\left(\sin\frac{3}{4}(n+1)\pi + 2^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3}{4}n\pi\right)$$

andererseits ist allgemein

$$[\log(1+x)]^p = C_0^p x^p - \frac{C_1^{p+1}}{p+1}x^{p+1} + \frac{C_2^{p+2}}{(p+1)(p+2)}x^{p+2} + \ldots$$

somit

$$D^n[\log(1+x)]_0^p = (-1)^{n-p}\frac{C_{n-p}^n}{(p+1)\ldots(n-1)n}$$

mithin

$$\tau_2 C_{n-2}^n - \tau_4 C_{n-4}^n + \tau_6 C_{n-6}^n - + \ldots$$

$$\ldots = 2^{-\frac{n+1}{2}}\left[\sin\frac{3}{4}(n+1)\pi + 2^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3}{4}n\pi\right]$$

Der rechtsseitige Ausdruck ist

a) für $n = 4\nu$, $= -2^{-(2\nu+1)}$

b) „ $n = 4\nu+2$, $= +2^{-(2\nu+2)}[1+(-1)^{\nu+1}4]$

c) „ $n = 4\nu+1$, $= (-1)^\nu 2^{-(2\nu+1)}$

d) „ $n = 4\nu+3$, $= (-1)^\nu 2^{-2\nu+1}$

10.

Dieselbe Substitution in

$$\frac{y}{e^y-1} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{B_1}{2!}y^2 - \frac{B_2}{4!}y^4 + - \ldots$$

gemacht, liefert

$$\frac{\log(1+x)}{y} = 1 - \tfrac{1}{2}\log(1+x) + \frac{B_1}{2!}[\log(1+x)]^2 - \frac{B_2}{4!}[\log(1+x)]^4 + \ldots$$

Nun ist

$$\frac{\log(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\ldots$$

daher

$$D^n\left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]_0 = (-1)^n\frac{n!}{n+1}$$

folglich

$$B_1 C_{n-2}^n - B_2 C_{n-4}^n + B_3 C_{n-6}^n \ldots = \tfrac{1}{2}\frac{n-1}{n+1}(n-1)! \qquad (15)$$

Brünn, 8. Januar 1891.

XI.

Miscellen.

1.

Momentane Variation der Eckensumme bei Deformation des regelmässigen Tetraeders.

In dem Aufsatze (S. 102): „Relation der Flächenwinkel des Tetraeders“ — ist (S. 108) bewiesen, dass die Snmme der Cosinus der 6 Flächenwinkel für das regelmässige Tetraeder ein Maximum ist. Die beiläufige Folgerung daraus, dass die Summe der Flächenwinkel, mithin auch die Summe der 4 Ecken ein Minimum sei, ist unrichtig. In der Tat ist das Differential der letztern Summe stets null; die übrigen Bedingungen des Minimums hingegen sind nicht erfüllt. Hieraus ersieht man, dass sich das ganze System der möglichen Variationen in Bezirke teilt, in deren einigen jene Grösse ein Maximnm, in allen übrigen mit Ausschluss der Grenzen ein Minimum ist.

Um diese Bezirke zu bestimmen, gehen wir von den Flächenwinkeln $\varkappa$ des regelmässigen Tetraeders aus und geben ihnen die unendlich kleinen Incremente α, β, γ, δ, ε, ζ. Die Cosinus der veränderten Flächenwinkel sind a, b, c, d, e, f. Entwickelt man einen derselben bis auf 2. Ordnung, so kommt:

$$a = \tfrac{1}{3}(1 - 2\sqrt{2}\,.\,\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^2)$$

Ein Product von μ solchen ist daher

$$abc\ldots = 3^{-\mu}\{1 - 2\sqrt{2}(\alpha+\beta+\gamma+\ldots) - \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots) + 8(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\ldots)\}$$

Führt man diese Werte in die Relation der Cosinus der 6 Flächenwinkel (S. 103. Gl. (2)) ein und setzt

$$\sigma = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta \tag{19}$$

$$\tau = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2+\zeta^2$$

$$\pi = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\varepsilon+\alpha\zeta+\beta\gamma+\beta\delta+\beta\zeta+\gamma\delta+\gamma\varepsilon+\delta\varepsilon+\delta\zeta+\varepsilon\zeta$$

$$\varrho = \alpha\delta+\beta\varepsilon+\gamma\zeta$$

so kommt nach Multiplication mit $\frac{81}{16}$:

$$-4\sqrt{2}\,.\,\sigma + 3\tau + 4\pi = 0 \qquad (20)$$

Nun ist aber

$$\sigma^2 = \tau + 2(\pi + \varrho)$$

Eliminirt man π, so ergibt sich:

$$4\sqrt{2}\,\sigma = \tau - 4\varrho \qquad (21)$$

da zufolge Gl. (20) σ von 2. Ordnung ist, also σ^2 nicht in Rechnung kommt. Die Eckensumme ist

$$S = 12\varkappa + 2\sigma - 8R = (12\varkappa - 8R) + \frac{\tau - 4\varrho}{2\sqrt{2}}$$

für das regelmässige Tetraeder

$$S_0 = 12\varkappa - 8R$$

folglich ist S_0 ein Maximum für alle Variationen, wo $\tau - 4\varrho < 0$, ein Minimum, wo $\tau - 4\varrho > 0$ ist; keins von beiden kann es nur an der Grenze $\tau - 4\varrho = 0$ sein.

Die Bedingung des Maximums ist also

$$(\alpha^2 - 4\alpha\delta + \delta^2) + (\beta^2 - 4\beta\varepsilon + \varepsilon^2) + (\gamma^2 - 4\gamma\zeta + \zeta^2) < 0 \qquad (22)$$

Die Grössen sind in 1. Ordnung durch die Gleichung $\sigma = 0$ von einander abhängig. Eliminirt man ζ, so kann man die Bedingung (22) folgendermassen schreiben:

$$(\gamma + M)^2 + \frac{1}{12}(\varepsilon - L)^2 - K < 0 \qquad (23)$$

wo

$$K = (\alpha + \beta)(\delta + \beta) + \beta^2$$

$$L = \alpha + \delta + 5\beta; \quad M = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + \beta + \varepsilon)$$

gesetzt ist. Fügt man noch die Abkürzung

$$N = K - \frac{1}{12}(\varepsilon - L)^2$$

hinzu, so erhält man folgende Bedingungen des Maximums:

$$\text{I.}\quad K > 0; \qquad \text{II.}\quad L - 2\sqrt{3K} < \varepsilon < L + 2\sqrt{3K}$$

$$\text{III.}\quad -M - \sqrt{N} < \gamma < -M + \sqrt{N}$$

Ist eine derselben nicht erfüllt, so ist S_0 ein Minimum mit der einzigen Ausnahme:

$$N \geqq 0; \qquad \gamma = -M \pm \sqrt{N}$$

Hiernach kann man α und β willkürlich annehmen und findet dann nach einander δ, ε, γ begrenzt, endlich für ζ einen Wert, jedes von den vorhergehenden abhängig.

R. Hoppe.

2.

Quadrable Cylinderflächenstücke.

In Winter's Lehrbuch der Stereometrie ist unter die elementar messbaren Figuren auch das sogenannte Cylinderdreieck aufgenommen, d. i. ein Stück einer geraden Cylinderfläche begrenzt von 2 Ebenen, die sich in der Axe schneiden, und von denen die eine normal zur Axe ist, und einer Cylinderseite, die auf letzterer Ebene von der Schnittlinie einen Quadranten abschneidet.

Zunächst ist das so bestimmte Dreieck nur der einfachste Fall eines allgemeinern Flächenstücks, welches dieselbe Eigenschaft der Viviani'schen Figuren hat, dass es sich aus gegebenen Strecken mittelst Zirkel und Lineal in ein Quadrat verwandeln lässt: beide Ebenen können beliebig schräg und das Flächenstück kann durch beliebige Cylinderseiten begrenzt sein.

Wir wollen nun auch die Beschränkung auf Kreiscylinder fallen lassen und Classen von Cylinderflächen auf algebraischer Basis suchen, auf denen Viviani'sche Vierecke von 2 Ebenen und 2 Cylinderseiten begrenzt werden.

Die Schnittlinie beider Ebenen sei Axe der y, die z Axe habe die Richtung der Cylinderseite normal zu den y, die Gleichungen der Ebenen seien:

$$z = cx, \quad z = c_1 x$$

Bezeichnet dann s einen Bogen der Basis, so ist das genannte Viereck:

$$V = (c - c_1) \int x \, \partial s \tag{1}$$

Setzt man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \tag{2}$$

so wird

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) \tag{3}$$

also

$$y = \frac{1}{2}\int\left(u - \frac{1}{u}\right)\partial x; \qquad V = \frac{c - c_1}{2}\int\left(u + \frac{1}{u}\right)x\,\partial x \tag{4}$$

Sei $u = \left(\frac{x}{a}\right)^\mu$; dann kommt:

$$y = \frac{x}{2}\left\{\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{x}{a}\right)^\mu - \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{a}{x}\right)^\mu\right\} + \text{const} \tag{5}$$

$$V = \frac{c - c_1}{2}\left\{\frac{1}{2+\mu}\left(\frac{x}{a}\right)^\mu + \frac{1}{2-\mu}\left(\frac{a}{x}\right)^\mu\right\} x^2 + \text{const} \tag{6}$$

Von den Werten für μ sind zunächst $\mu = \pm 1$ und ± 2 ausgeschlossen, für welche bzhw. y oder V transcendent wird. Für irrationale μ werden beide transcendent. Damit V sich construiren lässt, darf auch ein rational gebrochenes μ im Nenner nur Factoren 2 haben. Setzt man $-\mu$ statt μ, so geht nur y in $-y$ über. Daher kommen nur Werte von der Form

$$\mu = m \,.\, 2^{-n}$$

für ganze positive m und $n \geqq 0$ mit Ausschluss von $\mu = 1$ und 2 in Betracht.

Da $z - z_1$ nur mit x verschwindet, so können dreieckige V nur für $\mu < 1$ existiren. Für $\mu > 1$ lässt sich V nur durch 2 Cylinderseiten begrenzen. Ist aber $1 < \mu < 2$, so erstreckt sich zwar V bei verschwindendem x in der y Richtung ins Unendliche, behält jedoch immer einen endlichen Inhalt, dessen Grenzwert als Inhalt eines Dreiecks von 2 unendlichen Seiten, die sich asymtotisch einander nähern, zu betrachten ist, während eine beliebige endliche Cylinderseite die dritte Dreiecksseite bildet.

Die 2 Constanten in den Ausdrücken von y und V sind im allgemeinen, d. h. im Fall des viereckigen V, durch Subtraction der 2 Werte als eliminirt zu denken, welche den zur Bestimmung der 2 Cylinderseiten gegebenen x entsprechen.

Ist $\mu < 1$, so bieten sich 3 feste Begrenzungen zur Auswahl dar, nämlich $x = 0$, $\partial y = 0$ und $y = 0$. Nimmt man $x = 0$ zur einer Grenze, so fallen die const in Gl. (5) (6) weg. Nach Gl. (2) wird $\partial y = 0$ für $u = 1$, d. i. $x = a$. Hier ist

$$y = -\frac{\mu a}{1-\mu^2}; \qquad V = \frac{\mu a^2}{4-\mu^2}(c - c_1)$$

Dies ist Minimum von y, weil y von 0 bis zu diesem negativen Werte abgenommen hat. Nach Gl. (5) wird zum zweitenmal $y = 0$ für

$$x = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{2\mu}} a$$

und gleichzeitig

$$V = \frac{c - c_1}{\sqrt{1-\mu^2}} \, \frac{2-\mu^2}{4-\mu^2} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}} a^2$$

Für $\mu > 1$ kann weder x noch y null werden. Nur $\partial y = 0$ bietet sich zur festen Begrenzung dar. Nimmt man dann den Basispunkt $x = a$ zum Nullpunkt der y und V, so wird

$$y = \frac{x}{2}\left\{\frac{1}{\mu+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} + \frac{1}{\mu-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{\mu}\right\} - \frac{\mu a}{\mu^2-1}$$

$$V = (c-c_1)\left[\frac{x^2}{2}\left\{\frac{1}{\mu+2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} - \frac{1}{\mu-2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\mu}\right\} + \frac{2a^2}{\mu^2-4}\right]$$

Die bisher betrachteten V bleiben quadrabel, wenn man die Ebenen parallel verschiebt. Ihre Gleichungen mögen werden:

$$z = c(x+h), \quad z = c_1(x+h)$$

Die y bleiben unverändert, die V gehen über in

$$V_h = (c-c_1)\int(x+h)\partial s = V + (c-c_1)hs$$

wo s immer gleichzeitig mit y construirt werden kann; denn man hat nach Gl. (3):

$$s = \tfrac{1}{2}\int\left(u+\frac{1}{u}\right)\partial x = \frac{x}{2}\left\{\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{x}{a}\right)^{\mu} + \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{a}{x}\right)^{\mu}\right\} + \text{const}$$

Ausser der Form (2) bieten sich leicht folgende 4 Specialfälle dar, für welche V quadrirt werden kann:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\frac{b+x}{a}}, \quad \frac{x+\frac{b}{a}-\frac{a}{4}}{\sqrt{ax+b}}, \quad \frac{x}{a}, \quad -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

R. Hoppe.

Einsendungen für das „Archiv der Mathematik und Physik" erbitten wir nur unter der Adresse des Herrn Prof. Dr. R. Hoppe in Berlin, S. Prinzenstrasse 69.

Leipzig. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Zehnter Teil. Drittes Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1891.

XII.

Dreiecksscharen, Parabelscharen und Kegelschnittbüschel, welche durch drei ähnliche Punktreihen oder durch drei projectivische Strahlenbüschel erzeugt werden.

Von

W. Stegemann in Prenzlau.

Die auf den Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten liegenden ähnlichen Punktreihen, deren Aehnlichkeitsverhältnisse den Verhältnissen der Dreiecksseiten gleich sind, sowie die durch diese Punktreihen erzeugten Dreiecke und Parabeln sind zuerst von Herrn Oberlehrer A. Artzt in Recklinghausen einer ausführlichen Betrachtung unterzogen worden in seiner Abhandlung „Untersuchungen über ähnliche Punktreihen auf den Seiten „eines Dreiecks und deren Mittelsenkrechten, sowie über con„gruente Strahlenbüschel aus den Ecken desselben. Programm „des Gymnasiums zu Recklinghausen, 1884". Bei diesen Untersuchungen spielten der Grebe'sche Punkt, der Brocard'sche Kreis, die Brocard'schen Dreiecke und Punkte eine wichtige Rolle. Herr Director Dr. Kiehl in Bromberg verallgemeinerte in seiner Abhandlung „Die durch drei ähnliche Punktreihen erzeugten Dreiecke und „Kegelschnitte. Programm des Realgymnasiums zu Bromberg, 1888" die über die ähnlichen Punktreihen auf den Mittelsenkrechten gewonnenen Resultate, indem er an die Stelle des Grebe'schen Punktes einen beliebigen anderen Punkt P setzte und der Lage dieses Punktes entsprechend die Aehnlichkeitsverhältnisse der Punktreihen änderte. Zu Parabelscharen gelangte er durch Drehung der Punktreihenträger; die letzteren aber blieben an die Bedingung gefesselt, dass sie durch die Seitenmitten gehen und diese als entsprechende Punkte

enthalten mussten. Die Beschränkung, welche hierin noch liegt veranlasste Herrn Dr. Kiehl, am Schlusse seiner Abhandlung au die Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen hinzuweisen; er sagt dass man die sich in vollkommen allgemeiner Lage befindenden Träger als das ursprünglich Gegebene auffassen und ein Dreieck dessen Seiten auf ihnen senkrecht stehen und durch drei homologe Punkte gehen, hinzufügen könne. Die so angedeutete Verallgemeinerung vollständig durchzuführen, ist das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen. Es wird sich dabei allerdings herausstellen, das dasjenige Dreieck, welches zu drei beliebig gegebenen Punktreihen in ähnlichen Beziehungen steht wie ein gegebenes Dreieck zu den Punktreihen auf seinen Mittelsenkrechten, im allgemeinen nicht ein solches ist, dessen Seiten auf den Punktreihenträgern senkrecht stehen — Die Untersuchung dreier projectivischen Strahlenbüschel ist nicht allgemein durchgeführt worden, sondern mit Benutzung der bei der Betrachtung ähnlicher Punktreihen gewonnenen Resultate nur für den Fall, dass der Punkt P mit dem Grebe'schen Punkte zusammenfällt.

Im Nachfolgenden schliessen wir uns der obengenannten Kiehlschen Abhandlung an, nehmen aber auch Bezug auf frühere, die neuere Geometrie des Dreiecks betreffende Untersuchungen. Zur Orientirung nach dieser Richtung hin können besonders empfohlen werden:

Lieber, Ueber die Gegenmittellinie und den Grebe'schen Punkt Der Brocard'sche Kreis. Programm des Friedrich-Wilhelm-Realgymnasiums zu Stettin, 1886, 1887, 1888.

Emmerich, Der Brocard'sche Winkel des Dreiecks. Programm des Realgymnasiums zu Mülheim a. d. Ruhr, 1889.

Vigarié, Premier inventaire de la géométrie du triangle. Association française, Congrès de Toulouse, 1887.

Auf sonstige Schriften wird später noch hingewiesen werden.

I. Aehnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und ihre Beziehungen zum Kreise HP.

(Fig. I.)

§ 1. Auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC seien drei ähnliche Punktreihen (A'), (B'), (C') gegeben, welche die Seitenmitten A_0, B_0, C_0 als sich entsprechende Punkte enthalten, im

übrigen aber ganz beliebig sind. Dann kann man drei beliebige auf den Seiten von ABC gelegene Punkte A', B', C' als ein zweites Tripel sich entsprechender Punkte ansehen, und die Punktreihen sind nun bestimmt dadurch, dass für alle Lagen von A', B', C' die Verhältnisse $A_0A' : B_0B' : C_0C'$ dieselben sein müssen. Hierbei kommt jedoch nicht nur der absolute Wert der Strecken, sondern auch ihre Richtung in Betracht. Wir nehmen die Richtungen A_0C, B_0A, C_0B als positiv, die entgegengesetzten Richtungen als negativ an.

§ 2. Wie die drei Punktreihen (A'), (B'), (C') auch bestimmt sein mögen, es giebt jederzeit einen Punkt P in der Ebene des Dreiecks, dessen Entfernungen p_a, p_b, p_c von den Seiten BC, CA, AB sich verhalten wie $A_0A' : B_0B' : C_0C'$. Hierbei ist auch für p_a, p_b, p_c die Richtung zu beachten; p_a soll als positiv gelten, wenn P auf derselben Seite von BC liegt wie das Dreieck ABC, als negativ, wenn P auf der entgegengesetzten Seite liegt. Entsprechendes gilt für die Vorzeichen von p_b und p_c.

§ 3. Ist H der Mittelpunkt des Umkreises von ABC, und fällt man von P aus auf die Mittelsenkrechten A_0H, B_0H, C_0H die Lote PA_1, PB_1, PC_1, so ist

$$A_0A_1 = p_a, \quad B_0B_1 = p_b, \quad C_0C_1 = p_c$$

also

$$\frac{A_0A'}{A_0A_1} = \frac{B_0B'}{B_0B_1} = \frac{C_0C'}{C_0C_1}$$

Nennt man den Wert dieser drei gleichen Quotienten ϱ, so ist ϱ ein veränderlicher Parameter, welcher jeden beliebigen positiven oder negativen Wert annehmen darf, und durch jeden Wert von ϱ wird ein Tripel sich entsprechender Punkte der drei Punktreihen (A'), (B'), (C') bestimmt. Die Dreiecke A_0A_1A', B_0B_1B', C_0C_1C' sind ähnlich, demnach werden die Seiten BC, CA, AB von A_1A', B_1B', C_1C' unter gleichen Winkeln geschnitten. Setzt man

$$\varrho = \cot\vartheta$$

so ist ϑ einer der beiden Winkel, welche bei A', B', C' entstehen. Welcher von beiden zu nehmen ist, giebt das Vorzeichen von ϱ an. Um den Winkel ϑ rein geometrisch zu bestimmen, soll als positive Drehung diejenige bezeichnet werden, durch welche der Schenkel CB des Winkels γ in die Lage CA gelangt; dann lässt sich ϑ definiren als der Winkel, um welchen sich Seite BC in positivem Sinne drehen muss, damit sie in die Lage $A'A_1$ komme. Haben die beiden Strecken A_0A_1 und A_0A' positive Richtung, so ist

$$\text{Wkl. } A_1A'B = \vartheta$$

§ 4. Da

$$\text{Wkl. } HA_1P = HB_1P = HC_1P = 90^0$$

so liegen die Punkte A_1, B_1, C_1 auf demjenigen Kreise, in dem HI ein Durchmesser ist. Daraus folgt, dass

$$\text{Wkl. } B_1A_1C_1 = B_1HC_1 = \alpha$$

ebenso

$$\text{Wkl. } C_1B_1A_1 = \beta \quad \text{und} \quad A_1C_1B_1 = \gamma$$

also Dreieck $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ABC ähnlich ist. Die Winke $B_1A_1C_1$ und B_1PC_1 sind Peripheriewinkel auf demselben Bogen B_1C_1 darum muss der Schenkel A_1C_1 des Winkels $B_1A_1C_1$, wenn er in di Lage A_1B_1 gelangen soll, eine Drehung machen, welche derjenige an Grösse und Richtung gleich ist, die erforderlich ist, um de Schenkel PC_1 des Winkels B_1PC_1 in die Lage PB_1 zu bringen. Nu ist $PC_1 \parallel AB$ und $PB_1 \parallel AC$; folglich ist die bezeichnete Drehung derjenigen, welche AC machen muss, um in die Lage AB zu kommen, an Grösse gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt Hieraus ergiebt sich, dass die beiden ähnlichen Dreiecke $A_1B_1C_1$ und ABC gegenwendig sind.

§ 5. Schneiden sich $B'B_1$ und $C'C_1$ in O, so ist Wkl. $B'OC'$ entweder gleich oder supplementär dem Winkel α; darum liegt O auf dem Kreise $AB'C'$. Nun ist Winkel B_1OC_1 entweder derselbe Winkel wie $B'OC'$ oder sein Nebenwinkel, ausserdem

$$\text{Wkl. } B_1A_1C_1 = \alpha$$

daher liegt O auch auf dem Kreise $A_1B_1C_1$ oder HP, und Punkt O ist also der eine Schnittpunkt der Kreise $AB'C'$ und HP. Entsprechendes lässt sich von denjenigen Punkten nachweisen, in denen sich $C'C_1$ und $A'A_1$ sowie $A'A_1$ und $B'B_1$ schneiden, und daraus folgt, dass diese letzteren Schnittpunkte mit O zusammenfallen. Es ergiebt sich also der Satz:

> „Die drei Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ und die drei Geraden $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ schneiden sich in einem einzigen Punkte O, welcher auf dem Kreise HP liegt".

§ 6. Jedes Tripel sich entsprechender Punkte A', B', C' ist durch einen gewissen Wert von

$$\varrho = \cot \vartheta$$

bestimmt, und jedem Tripel entspricht nach dem Vorigen ein Punkt O des Kreises HP; daher ist durch jeden Wert von ϱ auch ein Punkt des Kreises HP bestimmt. Ist

$$\varrho = 0, \quad \text{also} \quad \vartheta = 90^0$$

so fallen $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ mit den Mittelrechten des Dreiecks ABC und O mit H zusammen; ist

$$\varrho = \pm\infty, \quad \text{also} \quad \vartheta = 0^0 \quad \text{oder} \quad 180^0$$

so werden $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ den Seiten BC, CA, AB parallel, und O fällt mit P zusammen. Es ist jederzeit

$$\text{Wkl. } OPH = OA_1H = A'A_1A_0 = 90^0 - \vartheta$$

also

$$\text{Wkl. } OHP = \vartheta \quad \text{und} \quad \frac{OH}{OP} = \varrho$$

Nimmt ϱ alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ an, so durchläuft Punkt O den ganzen Kreis HP, und zwar von P aus in der Richtung $A_1B_1C_1$. Dem in dieser Richtung genommenen Bogen PO gehört Wkl. ϑ als Peripheriewinkel zu.

§ 7. Im Punkte O wird, wie gezeigt wurde, der Kreis HP von den drei Kreisen $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ geschnitten. Es sollen jetzt die zweiten Schnittpunkte dieser letzteren Kreise mit dem Kreise HP bestimmt werden. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die beiden Kreise $AB'C'$ und AB_0C_0. Schneiden sich diese ausser in A noch in A_2, so ist, weil $AB'A_2C'$ und $AB_0A_2C_0$ Sehnenvierecke sind,

$$\text{Wkl. } A_2B'B_0 = A_2C'C_0 \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } A_2B_0B' = A_2C_0C'$$

folglich ist

$$\triangle A_2B_0B' \text{ ähnl. } A_2C_0C'$$

und die Entfernungen des Punktes A_2 von den Seiten CA und AB verhalten sich wie

$$B_0B' : C_0C' = p_b : p_c$$

A_2 ist also der zweite Schnittpunkt der Geraden AP mit dem Kreise AB_0C_0. Da in diesem letzteren Kreise AH ein Durchmesser ist, so ist

$$\text{Wkl. } HA_2A = HA_2P = 90^0$$

folglich liegt A_2 auch auf dem Kreise HP. Der zweite Schnittpunkt A_2 des Kreises $AB'C'$ mit dem Kreise HP liegt also auf der Geraden AP. Hiernach ist A_2 ein fester Punkt des Kreises HP, durch welchen sämtliche Kreise $AB'C'$ gehen. Entsprechendes findet man für die zweiten Schnittpunkte B_2 und C_2 der Kreise $BC'A'$ und $CA'B'$ mit dem Kreise HP. Also:

„Sämtliche Kreise $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ bilden drei Kreis-„büschel. Die Büschelpunkte sind je eine Ecke des Drei-

„ecks ABC und derjenige Punkt, in welchem die von der „selben Ecke aus nach P gezogene Transversale den Krei[s] „HP zum zweiten Male schneidet".

§. 8. Die bisherigen Untersuchungen nahmen ihren Ausgangspunkt von den beliebigen Punktreihen (A'), (B'), (C'); nach ihne[n] wurde Punkt P und alles Uebrige bestimmt. Man kann aber ebens[o] wol Punkt P zuerst wählen und danach die Punktreihen (A'), (B'), (C') sowie alles Uebrige bestimmen. Man erkennt daraus, das[s] Punkt P ein ganz beliebiger Punkt ist und daher als identisch mi[t] dem Punkte P in der obengenannten Kiehl'schen Abhandlung (Progr. 1888) angesehen werden kann. Dann sind auch Kreis HP und Dreieck $A_1B_1C_1$ dieselben wie dort, und die Punkte A_2, B_2, C_2 entsprechen den dort durch F_a, F_b, F_c bezeichneten. Dreieck $A_1B_1C_1$ ist von Herrn Dr. Kiehl „erstes Brocard'sches Dreieck des Punktes P" genannt worden, weil es mit diesem identisch ist, wenn als Punkt P der Grebe'sche Punkt K genommen wird. Aus demselben Grunde kann man Dreieck $A_2B_2C_2$ als „zweites Brocard'sches Dreieck des Punktes P" bezeichnen; denn dieses Dreieck entspricht dem zweiten Brocard'schen Dreieck nicht nur darin, dass seine Eckpunkte auf den Ecklinien AP, BP, CP und au[f] dem Kreise HP liegen, sondern, wie Herr Dr. Kiehl gezeigt hat, auch darin, dass es mit $A_1B_1C_1$ perspectivisch liegt, und dass das Projectionscentrum für beide Dreiecke derjenige Punkt von $A_1B_1C_1$ ist, welcher dem Winkelgegenpunkte von P im Dreieck ABC homolog ist.

§ 9. Herr Brocard hat in seiner Abhandlung „Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle. Association française, Congrès d'Alger, 1881" noch auf ein drittes Dreieck $A_3B_3C_3$ aufmerksam gemacht, welches ebenso wie das erste mit seinem zweiten Dreieck perspectivisch liegt. Der Eckpunkt A_3 dieses Dreiecks ist von demjenigen Punkte, in welchem die von A ausgehende Mittellinie den Umkreis von ABC trifft, der Spiegelpunkt in Bezug auf Seite BC. Die Mittellinie AA_0 ist die Winkelgegenlinie von AK; das allgemeine dem dritten Brocard'schen Dreieck entsprechende Dreieck $A_3B_3C_3$ erhält man daher, wenn man zu AP, BP, CP die Winkelgegenlinien construirt und zu den Schnittpunkten dieser Winkelgegenlinien mit dem Umkreis von ABC die Spiegelpunkte in Bezug auf die entsprechenden Dreiecksseiten nimmt.

Schneiden nun die Winkelgegenlinien von AP, BP, CP den Umkreis von ABC in X, Y, Z (Fig. II.), und wird derselbe Kreis von AP in X' getroffen, so ist $XX' \parallel BC$ und A_3X senkr. auf BC; folglich, weil hiernach

$$\text{Wkl. } X'XA_3 = 90^0$$

und ausserdem

$$A_0A_3 = A_0X = A_0X'$$

ist, $X'A_0A_3$ eine Gerade und A_0 die Mitte von $X'A_3$. Punkt A_0 ist aber auch die Mitte von BC; daher ist AA_0 Mittellinie für die beiden Dreiecke ABC und AA_3X', und diese Dreiecke haben also den Schwerpunkt E gemeinsam. In § 7. wurde nachgewiesen, dass A_2 auf AP (oder AX') liegt, und dass HA_2 senkr. auf $AP(AX')$ ist; folglich ist A_2 die Mitte von AX' und A_2A_3 eine zweite Mittellinie im Dreieck AA_3X'. Danach geht also A_2A_3 durch E, und es verhält sich

$$EA_2 : EA_3 = 1 : 2$$

In gleicher Weise findet man, dass auch B_2B_3 und C_2C_3 durch E gehen, und dass die Verhältnisse bestehen

$$EB_2 : EB_3 = EC_2 : EC_3 = 1 : 2$$

Die hier gewonnenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

„Das zweite und das dritte Brocard'sche Dreieck des „Punktes P sind einander gleichwendig ähnlich; die Seiten „des letztern sind doppelt so lang als die Seiten des er„steren. Beide Dreiecke liegen perspectivisch; das Pro„jectionscentrum ist der Schwerpunkt E des Dreiecks „ABC".

Da Dreieck $A_2B_2C_2$ zu $A_1B_2C_1$ dieselbe Lage hat wie Dreieck XYZ zu ABC (§ 8.), so sind auch die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und XYZ, ebenso $A_3B_3C_3$ und XYZ ähnlich; Dreieck XYZ ist jedoch zu den andern beiden gegenwendig, weil auch $A_1B_1C_1$ und ABC gegenwendig sind.

II. Aehnliche Punktreihen auf den Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ und die durch dieselben bestimmten Dreiecksscharen.

(Fig. III.)

Wir nehmen jetzt einen beliebigen Punkt O des Kreises HP als fest an; dann ist auch

$$\text{Wkl. } OHP = \vartheta$$

ein bestimmter Winkel, und die dem Punkte O zugehörigen sich entsprechenden Punkte A', B', C' sind feste Punkte. Auf der unbegrenzten Geraden PO sei V ein veränderlicher Punkt, und von V

aus ziehe man nach BC die Gerade $VV_a \parallel A'O$, nach CA die Gerade $VV_b \parallel B'O$, nach AB die Gerade $VV_c \parallel C'O$. Wird sodann $A'O$ von PV_a in A_v, $B'O$ von PV_b in B_v, $C'O$ von PV_c in C_v geschnitten, so ist $\triangle A'V_aA_v$ ähnl. A_1PA_v; folglich

$$A'A_v : A'A_1 = A_vV_a : V_aP$$

Ebenso ist $\triangle V_aPV$ ähnl. A_vPO; folglich

$$A_vV_a : V_aP = OV : PV$$

mithin verhält sich

$$A'A_v : A'A_1 = OV : PV$$

Ebenso findet man:

$$B'B_v : B'B_1 = OV : PV, \qquad C'C_v : C'C_1 = OV : PV$$

also

$$A'A_v : A'A_1 = B'B_v : B'B_1 = C'C_v : C'C_1$$

Nun verhält sich

$$A'A_1 : B'B_1 : C'C_1 = A_0A_1 : B_0B_1 : C_0C_1 = p_a : p_b \; p_c$$

folglich auch

$$A'A_v : B'B_v : C'C_v = p_a : p_b : p_c$$

Hiernach bilden die Punkte A_v, B_v, C_v, wenn V die Gerade PO durchläuft, drei ähnliche Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v), deren Träger die Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ sind, und deren Aehnlichkeitsverhältnisse dieselben sind wie die der Punktreihen (A'), (B'), (C').

§ 11. Je drei sich entsprechende Punkte bilden ein Dreieck $A_vB_vC_v$, und so erhält man eine Dreiecksschar, in welcher jedes Dreieck einer bestimmten Lage des Punktes V auf der Geraden PO entspricht. Fällt V mit P zusammen, so geht das zugehörige Dreieck in die unendlich entfernte Gerade über; ist V der unendlich entfernte Punkt der Geraden PO, so ist $A_1B_1C_1$ das entsprechende Dreieck. Dies beides ist für den speciellen Fall, dass die Träger der ähnlichen Punktreihen die Mittelsenkrechten von ABC sind, dass also Punkt O mit H zusammenfällt und PO zum Durchmesser des Umkreises wird, schon von Herrn Dr. Kiehl angegeben worden. Fällt V mit O zusammen, so ist $A'B'C'$ das zugehörige Dreieck.

§ 12. Die Fälle, dass Punkt V auf dem Kreise ABC liegt, erfordern besondere Beachtung. Hier sind folgende beide Hilfssätze zu benutzen:

1. Ist T irgend ein Punkt des Umkreises von ABC, so liegen bekanntlich die Fusspunkte der von T aus auf die Seiten des Drei-

ecks ABC gefällten Lote in einer Geraden, der Simsonlinie des Punktes T. Zieht man nun von T aus nach den Seiten von ABC drei andere Geraden, welche mit den erwähnten Loten den beliebigen Winkel φ bilden, so liegen auch die Fusspunkte dieser Linien auf einer Geraden, welche mit der Simsonlinie des Punktes T den Winkel φ bildet. (Zu beweisen durch die entsprechenden ähnlichen Dreiecke.)

2. Ist T' ein zweiter Punkt des Umkreises, und zieht man von T und T' aus nach den Seiten von ABC parallele Geraden, welche die Seiten unter gleichen Winkeln schneiden, so bilden die beiden erhaltenen Fusspunktsgeraden einen Winkel, welcher dem zum Bogen TT' gehörigen Peripheriewinkel an Grösse gleichkommt, aber im entgegengesetzten Drehungssinne zu nehmen ist. (Zu beweisen durch die entstehenden Sehnenvierecke.)

§ 13. Es seien nun T und T' (Fig. IV.) die Schnittpunkte der Geraden PO mit dem Kreise ABC, und zwar liege T mit P auf derselben Seite von O. Fällt Punkt V mit T zusammen, und construirt man die zugehörigen Punkte V_a, V_b, V_c, so liegen diese, da die Seiten von ABC von den Geraden TV_a, TV_b, TV_c unter demselben Winkel (ϑ) geschnitten werden, nach Hilfssatz 1. in einer Geraden, welche mit der Simsonlinie des Punktes T den Winkel $90^0-\vartheta$ bildet. Da Dreieck $A_vB_vC_v$ in jedem Falle dem Dreieck $V_aV_bV_c$ ähnlich ist und sich in Aehnlichkeitslage mit ihm befindet, so liegen die dem Punkte T entsprechenden drei Punkte A_t, B_t, C_t auch in einer Geraden: diese ist der Geraden $V_aV_bV_c$ parallel und bildet also mit der Simsonlinie von T ebenfalls den Winkel $90^0-\vartheta$. Entsprechend ergiebt sich, dass, wenn V mit T' zusammenfällt, die zugehörigen Punkte A_t', B_t', C_t' in einer Geraden liegen, welche mit der Simsonlinie des Punktes T' denselben Winkel $90^0-\vartheta$ bildet. Nach Hilfssatz 2. schneiden sich die Simsonlinien der Punkte T und T', also auch die Geraden $A_tB_tC_t$ und $A_t'B_t'C_t'$ unter einem Winkel, der dem zum Bogen TT' gehörigen Peripheriewinkel oder, was dasselbe ist, dem Winkel OHT oder OHT' gleich ist.

§ 14. Die beiden Geraden $A_tB_tC_t$ und $A_t'B_t'C_t'$, in welche Dreieck $A_vB_vC_v$ ausartet, wenn V mit T oder T' zusammenfällt, und welche also die Punktreihenträger in drei entsprechenden Punkten schneiden, sind nur dann reell, wenn die Punkte T und T' reell sind, d. h. wenn die Gerade PO den Kreis ABC schneidet. Dies ist immer der Fall, wenn Punkt P innerhalb des Kreises ABC liegt. Befindet sich Punkt P ausserhalb dieses Kreises, so muss, wenn PO den Kreis schneiden soll, doch noch O innerhalb desselben liegen, oder, was dasselbe ist, es muss

$$-\frac{HT}{HP} < \cos\vartheta < \frac{HT}{HP}$$

sein. Ist O einer der Schnittpunkte der Kreise ABC und HP, d. h. ist

$$\cos\vartheta = \pm\frac{HT}{HP}$$

so fallen T und T' mit O zusammen. Daraus folgt nach § 11., dass dann sowol die Punkte A_t, B_t, C_t als auch A_t', B_t', C_t' mit den Punkten A', B', C' zusammenfallen, und dass daher diese letzteren drei Punkte in einer Geraden liegen. Sind die Punkte P und O beide ausserhalb des Kreises ABC gelegen, so werden die beiden Geraden $A_tB_tC_t$ und $A_t'B_t'C_t'$ imaginär. Fällt O mit H zusammen, so sind die Geraden $A_tB_tC_t$ und $A_t'B_t'C_t'$ jederzeit reell und schneiden sich unter rechten Winkeln.

§ 15. Es soll jetzt untersucht werden, ob die Dreiecke der Schar $(A_vB_vC_v)$, wie in dem erwähnten speciellen Falle (Kiehl, Progr. 1888), auch in dem hier behandelten allgemeineren Falle einen gemeinsamen Teilpunkt haben. Zu diesem Zwecke sei folgender allgemeine Satz vorausgeschickt:

Wenn in einem Dreieck ABC, welches durch den beliebigen Punkt Q in die Teildreiecke BQC, CQA, AQB zerlegt wird, Seite BC fest bleibt, Punkt A aber um die beliebige Strecke AA' verschoben wird, und wenn Punkt Q' derjenige Punkt ist, welcher Dreieck $A'BC$ in demselben Verhältniss teilt wie Q das Dreieck ABC, so $QQ' \parallel AA'$ und es verhält sich QQ' zu AA' wie die Entfernung des Punktes Q zu der des Punktes A von BC.

Beweis (Fig. V): Die Entfernungen der Punkte A und Q von BC seien h und q; AQ treffe BC in A_1; dann verhält sich:

$$\triangle CQA : AQB = CA_1 : A_1B$$

Nach Vorautsetzung muss daher auch die Gleichung bestehen

$$\triangle CQ'A' : A'Q'B = CA_1 : A_1B_1$$

d. h. $A'Q'$ geht ebenfalls durch Punkt A_1. Nun hat man nach Voraussetzung weiter

$$\triangle BQC : BAC = BQ'C : BA'C$$

also auch

$$QA_1 : AA_1 = Q'A_1 : A'A_1, \quad \text{d. h.} \quad QQ' \parallel AA'$$

ausserdem verhält sich

$$QQ' : AA' = QA_1 : AA_1 = q : h$$

was zu beweisen war.

§ 16. Wir wenden uns jetzt wieder der zu untersuchenden Dreiecksschar zu und betrachten ein beliebiges Dreieck $A_v B_v C_v$ derselben (Fig. III.) Es ist leicht ersichtlich, dass die Dreiecke $A_0 A' A_v$, $B_0 B' B_v$, $C_0 C' C_v$ ähnlich sind, und dass sich ihre homologen Seiten wie $p_a : p_b : p_c$ verhalten; daher bilden die Geraden $A_0 A_v$, $B_0 B_v$, $C_0 C_v$ ein den Dreiecken ABC und $A_0 B_0 C_0$ gleichwendiges ähnliches Dreieck, und die Strecken $A_0 A_v$, $B_0 B_v$, $C_0 C_v$ stehen im Verhältniss $p_a : p_b : p_c$ Es sei nun Q ein Punkt, welcher Dreieck $A_0 B_0 C_0$ in beliebigem Verhältniss teilt; seine Entfernungen von $B_0 C_0$, $C_0 A_0$, $A_0 B_0$ seien x, y, z. Hält man jetzt im Dreieck $A_0 B_0 C_0$ die Punkte B_0 und C_0 fest, verschiebt aber A_0 bis A_v, so muss auch, wenn das Teilverhältniss ungeändert bleiben soll, Punkt Q eine andere Lage Q_a annehmen, welche nach dem vorausgeschickten Satze dadurch bestimmt ist, dass

$$QQ_a \parallel A_0 A_v \quad \text{und gleich} \quad \frac{x}{\frac{1}{2} h_a} \cdot A_0 A_v$$

sein muss. Fällt man jetzt in dem neu erhaltenen Dreieck $A_v B_0 C_0$ von Q_a und von B_0 aus Lote auf $C_0 A_v$, so verhalten sich diese, weil das Teilverhältniss nicht geändert worden ist, wie $y : \frac{1}{2} h_b$; darum wird, wenn man jetzt die Punkte A_v und C_0 festhält, während B_0 sich nach B_v bewegt, der Punkt Q aus der Lage Q_a in die Lage Q_b kommen, wobei wieder

$$Q_a Q_b \parallel B_0 B_v \quad \text{und gleich} \quad \frac{y}{\frac{1}{2} h_b} \cdot B_0 B_v$$

sein muss. Ebenso wird, wenn zuletzt sich noch C_0 nach C_v bewegt, Punkt Q in die Lage Q_c kommen, wobei

$$Q_b Q_c \parallel C_0 C_v \quad \text{und gleich} \quad \frac{z}{\frac{1}{2} h_c} \cdot C_0 C_v$$

ist. Soll nun Punkt Q gemeinsamer Teilpunkt der Dreiecke $A_0 B_0 C_0$ und $A_v B_v C_v$ sein, so muss Q_c mit Q zusammenfallen; dies tritt aber, weil

$$\text{Wkl. } QQ_a Q_b = \gamma \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } Q_a Q_b Q_c = \alpha$$

ist, dann ein, wenn

$$QQ_a : Q_a Q_b : Q_b Q_c = a : b : c$$

oder

$$\frac{x}{h_a} \cdot A_0 A_v : \frac{y}{h_b} \cdot B_0 B_v : \frac{z}{h_c} \cdot C_0 C_v = a : b : c$$

ist. Hieraus erhält man, weil

$$\frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = a : b : c$$

und

$$A_0A_v : B_0B_v : C_0C_v = p_a : p_b : p_c \quad \text{ist,}$$

$$x : y : z = \frac{1}{p_a} : \frac{1}{p_b} : \frac{1}{p_c}$$

Diese Gleichung zeigt, dass es für die Dreiecke der Schar $(A_vB_vC_v)$ einen gemeinsamen Teilpunkt Q giebt, und dass dieser Punkt als Punkt des Dreiecks $A_0B_0C_0$ dem Winkelgegenpunkte von P im Dreick ABC homolog ist. Danach ist er identisch mit dem Punkte Q des Herrn Dr. Kiehl. Es war übrigens von vorn herein klar, dass, falls ein gemeinsamer Teilpunkt vorhanden sein sollte, dieser kein anderer sein konnte als der im speciellen Falle gefundene. Er ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, welche Dreiecke der Schar darstellen, ausserdem auch der Schnittpunkt von A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (§ 8.).

§ 17. Punkt O und die von ihm abhängigen Punkte wurden bisher als fest angesehen. Da jedoch die Lage von O auf dem Kreise HP ganz beliebig war, so kann man O den genannten Kreis durchlaufen lassen; dann durchlaufen auch die Punkte T und T' den ganzen Kreis ABC, und man erhält sowol eine unendliche Anzahl von Dreiecksscharen $(A_vB_vC_v)$ als auch eine unendliche Anzahl von Paren gerader Linien, welche Dreiecke dieser Scharen darstellen und sich in Q schneiden. Die Punkte A_v, B_v, C_v umfassen jetzt alle Punkte der Ebene; sie sollen fortan zugeordnete Punkte genannt werden. Nimmt man einen derselben, z. B. A_v, beliebig an, so sind die beiden ihm zugeordneten Punkte B_v und C_v bestimmt durch die Bedingung, dass die Dreiecke $A_0A_1A_v$, $B_0B_1B_v$, $C_0C_1C_v$ gleichwendig ähnlich sein müssen. Ferner ist jede durch Q gehende Gerade eine solche, welche ein Tripel zugeordneter Punkte enthält. Man hat daher den Satz:

> „Alle Dreiecke, welche durch ein Tripel zugeordneter „Punkte A_v, B_v, C_v der Ebene bestimmt sind, haben einen „gemeinsamen Teilpunkt Q, welcher dieselben so teilt wie „der Winkelgegenpunkt von P das Dreieck ABC. Diejenigen dieser Dreiecke, welche in gerade Linien entarten, „bilden ein Strahlenbüschel mit dem Punkte Q als Mittel„punkt".

Da die Dreiecke A_2B_0B' und A_2C_0C' gleichwendig ähnlich sind, so fallen in A_2 die Punkte B_v und C_v zusammen; A_2 ist also ein Doppelpunkt. Auch die Punkte B_2 und C_2 sind Doppelpunkte. Auf dieser Eigenschaft der Punkte A_2, B_2, C_2 beruht die später hervortretende besondere Bedeutung derselben.

§ 18. Die Geraden $A_t B_t C_t$ und $A_t' B_t' C_t'$ (Fig. IV.) entsprechen sich gegenseitig, und es liegt daher die Vermutung nahe, dass das zuletzt erwähnte Strahlenbüschel ein involutorisches sei. Um zu erkennen, ob dies der Fall ist, nehmen wir P als einen ausserhalb des Kreises ABC liegenden Punkt an. Dann wird dieser Kreis von dem Kreise HP in zwei Punkten O_1 und O_2 geschnitten. Fällt O mit O_1 zusammen, so gilt dies auch von T und T', und die Punkte A', B', C' liegen in einer Geraden $A_1'B_1'C_1'$, in welcher sich die beiden Geraden $A_t B_t C_t$ und $A_t' B_t' C_t'$ vereinigen (§ 14.). Eine zweite Doppelgerade $A_2'B_2'C_2'$ von derselben Bedeutung ergiebt sich, wenn O, T und T' mit O_2 zusammenfallen. Die beiden Geraden $A_1'B_1'C_1'$ und $A_2'B_2'C_2'$ schneiden sich in Q, und zwar, wie man durch Anwendung der beiden Sätze in § 12. findet, unter dem Winkel

$$O_1HP = O_2HP = \vartheta$$

Bewegt sich O auf dem Kreise HP so, dass Wkl. ϑ um

$$\text{Wkl. } O_1PO = \delta$$

zunimmt, so bewegen sich die Punkte T und T' auf dem Kreise ABC nach entegengesetzten Richtungen hin um die Bogen O_1T und O_1T'. Erinnert man sich der Construction der Geraden $A_t B_t C_t$ (§ 10.) und beachtet man jene beiden Hilfssätze, so ergiebt sich wegen der Zunahme des Winkels ϑ um δ und wegen der Bewegung des Punktes T auf dem Bogen O_1T in negativer Richtung

$$\text{Wkl. } (A_1'B_1'C_1',\ A_t B_t C_t) = \delta + O_1T'T$$

ähnlich, und mit Rücksicht darauf, dass sich T' auf dem Bogen O_1T' in positiver Richtung bewegt, erhält man

$$\text{Wkl. } (A_1'B_1'C_1',\ A_t'B_t'C_t') = \delta - O_1TT'$$

Nun ist aber

$$\text{Wkl. } O_1TT' - O_1T'T = \delta$$

daher

$$\text{Wkl. } (A_1'B_1'C_1',\ A_t B_t C_t) = O_1TT'$$
$$\text{Wkl. } (A_1'B_1'C_1',\ A_t'B_t'C_t') = -O_1T'T$$

In gleicher Weise ergiebt sich

$$\text{Wkl. } (A_2'B_2'C_2',\ A_t B_t C_t) = 180^0 - O_2TT'$$
$$\text{Wkl. } (A_2'B_2'C_2',\ A_t'B_t'C_t') = O_2T'T$$

Die Punkte T, T' bilden bekanntlich eine Involution auf dem Kreise ABC mit den Doppelpunkten O_1 und O_2; folglich bilden die Punkte O_1, O_2, T, T' ein harmonisches Punktsystem, und es ist

$$\frac{\sin O_1TT'}{\sin O_1T'T} = -\frac{\sin(180^0 - Q_2TT')}{\sin O_2T'T}$$

mithin ist auch

$$\frac{\sin(A_1'B_1'C_1',\ A_t\ B_t\ C_t)}{\sin(A_1'B_1'C_1',\ A_t'B_t'C_t')} = -\frac{\sin(A_2'B_2'C_2',\ A_t\ B_t\ C_t)}{\sin(A_2'B_2'C_2',\ A_t'\ B_t'C_t')}$$

und die Geraden $A_1'B_1'C_1'$, $A_2'B_2'C_2'$, $A_tB_tC_t$, $A_t'B_t'C_t'$ bilden ein harmonisches Büschel. Dadurch bestätigt es sich, dass das Strahlenbüschel (Q) involutorisch ist.

Dies gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass P ausserhalb des Kreises ABC liegt. Die Punkte T und T' bilden indessen auch dann ein Involutionssystem auf diesem Kreise, wenn P innerhalb desselben liegt, und die Doppelpunkte imaginär werden; daher ist auch in diesem Falle das Strahlenbüschel (Q) involutorisch.

$A_1'B_1'C_1'$ und $A_2'B_2'C_2'$ sind die Doppelstrahlen des Büschels. Dieselben sind reell und verschieden, wenn P ausserhalb des Kreises ABC liegt; sie fallen in die unendlich entfernte Gerade zusammen, wenn P ein Punkt des Kreises ist; sie sind imaginär, wenn P ein innerer Punkt ist. Bemerkenswert ist noch, dass im zweiten Falle der eine Strahl jedes Pares mit den beiden Doppelstrahlen in der unendlich entfernten Geraden zusammenfällt; die zweiten Strahlen aller Pare sind dann unter sich parallel und gehen durch den unendlich entfernten Punkt Q; ihre Richtung halbirt die Winkel (BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1). Dies ergiebt sich leicht, wenn man beachtet, dass die Dreiecke $A_2B_2C_2$ und ABC ähnlich sind und sich in Aehnlichkeitslage befinden, und dass P ihr Aehnlichkeitspunkt ist.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

> „Das Strahlenbüschel (Q), welches durch die zu Geraden „entarteten Dreiecke $A_vB_vC_v$ gebildet wird, ist involuto- „risch. Seine Doppelstrahlen sind diejenigen beiden Ge- „raden, welche die Seiten des Dreiecks ABC in zugeord- „neten Punkten treffen. Das Büschel ist hyperbolisch, „parabolisch oder elliptisch, je nachdem Punkt P ausser- „halb des Umkreises von ABC, auf diesem Kreise oder „innerhalb desselben liegt".

§ 19. Wir nehmen jetzt wieder Punkt O und die ihm entsprechenden Punktreihenträger $A'O$, $B'O$, $C'O$ als fest an (Fig. III.). Zieht man von A aus nach B_vC_v die Gerade AL, so dass

$$\text{Wkl. } (B_vC_v,\ AL) = \vartheta$$

ist, so wird auch $V_b V_c$ von AL unter dem Winkel ϑ geschnitten. Dann ist:

$$\text{Wkl. } LAC = V_c V_b V$$

weil die Schenkel beider Winkel sich unter gleichen Winkeln schneiden; ferner

$$\text{Wkl. } V_b V_c V = V_c A V$$

weil $A V_b V_c V$ ein Sehnenviereck ist; folglich

$$\text{Wkl. } LAC = V_c A V$$

d. h. AL ist Winkelgegenlinie von AV. Die von B und C aus gezogenen, der Geraden AL entsprechenden Geraden sind ebenfalls die Winkelgegenlinien von BV und CV. Also:

„Diejenigen von A, B, C ausgehenden Geraden, welche „mit den Seiten des Dreiecks $A_v B_v C_v$ den Winkel ϑ bilden, „schneiden sich in dem Winkelgegenpunkte von V“.

§ 20. Durchläuft V die Gerade PO, so beschreibt sein Winkelgegenpunkt einen Kegelschnitt V', welcher bekanntlich durch die Punkte A, B, C geht und eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse ist, je nachdem PO den Kreis ABC schneidet, berührt oder gar nicht trifft. Da dem unendlich entfernten Punkte der Geraden PO das Dreieck $A_1B_1C_1$ entspricht (§ 11.), so werden diejenigen von A, B, C ausgehenden Geraden, welche die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ unter dem Winkel ϑ schneiden, in dem Winkelgegenpunkte des erwähnten unendlich entfernten Punktes, d. h. in einem Punkte des Kreises ABC, zusammentreffen. Ist N dieser Punkt, so ist

$$\text{Wkl. } (BN,\ C_1A_1) = (BA,\ C_1O) = \vartheta$$

folglich

$$\text{Wkl. } NBA = A_1C_1O = A_1B_1O$$

mithin hat N in Bezug auf Dreieck ABC dieselbe Lage wie O in Bezug auf Dreieck $A_1B_1C_1$.

§ 21. Durchläuft Punkt O den Kreis HP, so erhält man eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten V'. Dieselben bilden ein Büschel durch die vier Punkte A, B, C und P', den Winkelgegenpunkt von P. Die Hyperbeln dieses Büschels stehen zu dem Strahlenbüschel (Q) in der Beziehung, dass die Asymptoten je einer Hyperbel parallel sind je einem Pare zugeordneter Strahlen. Dies soll jetzt nachgewiesen werden, und zugleich soll diejenige Hyperbel des Büschels (V') bestimmt werden, welche einem beliebigen Strahlenpare des Büschels (Q) entspricht.

Zu diesem Zwecke nehmen wir P (Fig. IV.) als ausserhalb des Kreises ABC liegend an und ziehen die Gerade PH, welche den genannten Kreis in T_1 und T_1' schneidet (T_1 mit P auf derselben Seite von H). Für den Fall, dass O mit H, also T mit T_1 und T' mit T_1' zusammenfällt, ist von Kiehl bewiesen worden, dass die Gerade $A_t B_t C_t$ derjenigen Asymptote der in diesem Falle gleichseitigen Hyperbel V' parallel ist, welche durch den (unendlich entfernten) Winkelgegenpunkt von T_1' geht. Nimmt nun O eine andere Lage an, so dass sich der Winkel ϑ um den Winkel

$$HPO = \delta$$

vergrössert, so verändert sich die Richtung von $A_t B_t C_t$ wegen der Zunahme des Winkels ϑ, und weil T den Kreisbogen $T_1 T$ in negativem Sinne durchläuft, um Wkl. $\delta + T_1 T' T$ in positivem Sinne. Dieser Winkel gehört als Peripheriewinkel dem Bogen $T_1' T'$ zu. Soll $A_t B_t C_t$ in ihrer neuen Lage wieder einer Asymptote parallel sein, so wird diese Asymptote durch den Winkelgegenpunkt desjenigen Punktes gehen müssen, welchen man erhält, wenn man T_1' in negativem Sinne den Bogen

$$T_1' T_2' = T_1' T'$$

durchlaufen lässt. Der Punkt T_2' ist also der Spiegelpunkt von T' in Bezug auf HP. Durch ähnliche Betrachtungen ergiebt sich, dass die Gerade $A_t' B_t' C_t'$ derjenigen Asymptote parallel ist, welche durch den Winkelgegenpunkt von T_2 geht, wenn T_2 den Spiegelpunkt des Punktes T in Bezug auf HP bezeichnet. Da nun die Punkte P, T_2, T_2' auf einer Geraden liegen, so gehören die erwähnten Asymptoten einer und derselben Hyperbel des Büschels (V') an. Liegt P innerhalb des Kreises ABC, so wird die Bewegungsrichtung des Punktes T_1 die entgegengesetzte; liegt P auf dem genannten Kreise, so fällt T_1 mit P zusammen; in beiden Fällen bleibt jedoch im übrigen der Beweis unverändert. Man hat also den Satz:

„Je zwei zugeordnete Strahlen des Büschels (Q) sind „den Asymptoten einer Hyperbel des Büschels (V') parallel, „und zwar den Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche „die Winkelgegenpunktcurve der Geraden ist, welche zu „PO in Bezug auf PH symmetrisch liegt“.

III. Parabeln und Parabelscharen, welche durch ähnliche Punktreihen auf den Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ bestimmt werden.

(Fig. IV.)

§ 22 Sind $A'O$, $B'O$, $C'O$ drei bestimmte zugeordnete Punktreihenträger, so hüllen die Verbindungslinien je zweier der Punkte

A_v, B_v, C_v eine Parabel ein, und man erhält auf diese Weise die drei Parabeln (bc), (ca), (ab). Jede Seite des veränderlichen Dreiecks $A_vB_vC_v$ ist Tangente für eine dieser Parabeln. Darum sind die der Dreiecksschar $(A_vB_vC_v)$ zugehörigen Geraden $A_tB_tC_t$ und $A_t'B_t'C_t'$ gemeinsame Tangenten für alle drei Parabeln. Sind die genannten Geraden imaginär, so sind auch keine reellen gemeinsamen Tangenten vorhanden. Wie oben angegeben wurde, ist dies der Fall, wenn sowol P als O ausserhalb des Kreises ABC liegen. Die gemeinsamen Tangenten bilden ein Par zugeordneter Strahlen des Büschels Q; ihre Lage ist daher nach den Erörterungen der vorigen Paragraphen bekannt.

§ 23. Beschreibt O den Kreis HP, so werden die drei Parabeln zu Parabelscharen. Für jede Parabel der Schar (bc) sind die Dreiecke B_1C_1O und $B'C'O$ Tangentendreiecke; die diesen Dreiecken umgeschriebenen Kreise schneiden sich aber in A_2, folglich ist A_2 der gemeinsame Brennpunkt sämtlicher Parabeln der Schar (bc). Entsprechend sind B_2 und C_2 die Brennpunkte für die Parabeln der Scharen (ca) und (ab). Das veränderliche Dreieck QA_tA_t' ist Tangentendreieck sowol für die Parabeln der Schar (ca) als auch für die der Schar (ab); der um dasselbe beschriebene Kreis geht daher durch die Brennpunkte B_2 und C_2. Dieser Kreis ist aber ein fester Kreis, da er durch die drei festen Punkte Q, B_2, C_2 geht; er ist mithin der Ort für die Punkte B_t und B_t' und der Kreis QA_2B_2 der Ort für C_t und C_t'.

§ 24. Die Gerade B_1C_1 ist gemeinsame Tangente für alle Parabeln der Schar (bc); darum bilden die Leitlinien derselben ein Strahlenbüschel durch den Spiegelpunkt A_3' des Punktes A_2 in Bezug auf B_1C_1. Die Achsenrichtung und der Parameter lassen sich für jede Parabel der Schar leicht ermitteln. Die Richtung der Tangente B_vC_v nähert sich immer mehr der Achse der betreffenden Parabel, je weiter sich B_v und C_v von O entfernen; das Verhältniss $OB_v : OC_v$ nähert sich aber dann der Grenze $p_b : p_c$. Deshalb ist, wenn die Parabelachse die Geraden OB' und OC' in F und G trifft,

$$OF : OG = p_b : p_c$$

Da nun die Winkel A_2OB_1 und A_2OC_1 unverändert bleiben, wenn O den Kreis HP durchläuft, so ist auch der Winkel, welchen A_2O mit der Parabelachse bildet, nämlich der Winkel FA_2O constant, und A_2O ist für alle Parabeln der Schar eine homologe Strecke. Daraus folgt, dass die Parabel (bc) das Maximum ihrer Dimension erreicht, wenn O mit dem zweiten Endpunkt O_a des von A_2 ausgehenden Durchmessers des Kreises HP zusammenfällt. Andrerseits

tritt das Maximum auch ein, wenn die Leitlinie senkrecht auf A_2A_3' steht, wenn also A_2A_3' die Parabelachse und B_1C_1 die Scheiteltangente ist. Hieraus ergiebt sich, dass der constante Winkel FA_2O, welchen die Parabelachse mit A_2O bildet, gleich dem Winkel $O_aA_2A_3'$ oder, was dasselbe ist, gleich demjenigen Winkel ist, welchen die Tangente im Punkte A_2 mit B_1C_1 bildet. Der Parameter irgend einer Parabel (bc) ist gleich $A_2A_3'.\sin OO_aA_2$. Die Parabel artet in eine Gerade aus, wenn O mit A_2 zusammenfällt; diese Gerade ist parallel B_1C_1. Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten für die Parabeln (bc), (ca), (ab) sind in diesem Falle die Gerade A_1A_2 und diejenige durch Q gehende Gerade, welche parallel B_1C_1 ist.

Entsprechendes ergiebt sich bei der Betrachtung der Parabelscharen (ca) und (ab).

§ 25. Die drei Punkte, durch welche die Leitlinien aller Parabeln der drei Scharen gehen, bilden ein Dreieck $A_3'B_3'C_3'$, welches zu $A_1B_1C_1$ dieselbe Lage hat wie das dritte Brocard'sche Dreieck des Punktes P zu ABC, und welches daher dem Dreieck $A_2B_2C_2$ gegenwendig ähnlich ist (§ 9.). Die Leitlinien bilden congruente Strahlenbüschel durch A_3', B_3', C_3', mithin bestimmt jedes Tripel sich entsprechender Leitlinien ein dem Dreieck $A_3'B_3'C_3'$ umgeschriebenes Dreieck von bestimmter Gestalt. Zur Schar aller dieser Dreiecke gehört als Nulldreieck der Punkt Q; denn wenn O mit H zusammenfällt, so stehen die gemeinschaftlichen Parabeltangenten auf einander senkrecht, und durch ihren Schnittpunkt Q gehen die drei Leitlinien. Letztere gehen aber in diesem Falle auch durch A_0, B_0, C_0 (Kiehl, Progr. § 8). Daraus folgt:

„Die Punkte A_3', B_3', C_3' liegen auf den Geraden A_0Q, „B_0Q, C_0Q“.

Weil ferner diese letzteren drei Geraden, als Ecklinien des Dreiecks $A_0B_0C_0$ betrachtet, zu AP', BP', CP' im Dreieck ABC homolog sind, so hat man noch den Satz:

„Die Winkel aller durch die Leitlinien gebildeten Drei-„ecke sind gleich den Winkeln, unter welchen sich die „durch den Winkelgegenpunkt von P gezogenen Ecklinien „AP', BP', CP' schneiden“.

§ 26. Die Achsen aller Parabeln der drei Scharen bestimmen eine Schar von Dreiecken, welche dem Dreieck $A_2B_2C_2$ umgeschrieben und den durch die Leitlinien gebildeten Dreiecken gleichwendig ähnlich sind. Auch diese Schar von Dreiecken hat ein Nulldreieck. Um dasselbe zu bestimmen, sei daran erinnert, dass die Dreiecke

$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3'B_3'C_3'$ so zu einander liegen wie die Dreiecke ABC, XYZ, $A_3B_3C_3$ (§ 9., Fig. II.). Nun hat der Punkt Q zu $A_0B_0C_0$ dieselbe Lage wie P' zu ABC; darum ist QEP' eine gerade Linie und

$$EP' = 2EQ$$

Es folgt hieraus mit Rücksicht auf den in § 9. bewiesenen Satz, dass P' derjenige Punkt im Dreieck $A_3B_3C_3$ ist, der dem Punkte Q in $A_2B_2C_2$ homolog ist. Der Punkt P' ist aber auch als Punkt des Dreiecks XYZ dem Punkte Q in $A_2B_2C_2$ homolog; demnach ist P' der den beiden Dreiecken $A_3B_3C_3$ und XYZ gemeinsame Punkt. Ebenso ist auch Q der gemeinsame Punkt für die beiden Dreiecke $A_3'B_3'C_3'$ und $A_2B_2C_2$. Wären nun diese beiden Dreiecke gleichwendig, so müsste Punkt Q das Nulldreieck der durch die Parabelachsen gebildeten Dreiecksschar sein. Da sie jedoch gegenwendig sind, so ergiebt sich als das gesuchte Nulldreieck der Zwillingspunkt Q' von Q in Bezug auf Dreieck $A_2B_2C_2$ (Artzt, Progr. des Gymn. zu Recklinghausen 1886). Um Q' zu construiren, bestimme man die Spiegelpunkte Q_a, Q_b, Q_c von Q in Bezug auf B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2; dann schneiden sich die drei Kreise $B_2C_2Q_a$, $C_2A_2Q_b$, $A_2B_2Q_c$ in Q'.

IV. Parabeln und Parabelscharen, welche durch ähnliche Punktreihen auf beliebigen zugeordneten Geraden bestimmt werden.

§ 27. In den bisherigen Untersuchungen wurden als Punktreihenträger für die Reihen (A_v), (B_v), (C_v) immer nur die Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ gewählt, welche die Punkte A_1, B_1, C_1 als sich entsprechende Punkte enthalten. Im Folgenden sollen nun andere Geraden Punktreihenträger sein, dabei jedoch das Aehnlichkeitsverhältniss der Punktreihen nicht geändert werden.

Lässt man den Punkt A_v die beliebige Gerade G_a durchlaufen, so bewegen sich die Punkte B_v, C_v ebenfalls auf zwei Geraden G_b und G_c; G_a, G_b, G_c sind dann ein Tripel zugeordneter Geraden. Hat man noch ein zweites Tripel zugeordneter Geraden G_a', G_b', G_c', so sind die drei Schnittpunkte von G_a und G_a', G_b und G_b', G_c und G_c' zugeordnete Punkte, und ausserdem ist

$$\text{Wkl. } (G_a, G_a') = (G_b, G_b') = (G_c, G_c')$$

Beides folgt mit Leichtigkeit aus der Definition der zugeordneten Punkte (§ 17.). Da die Dreiecksseiten BC, CA, AB zugeordnete Geraden sind, so werden sie von beliebigen anderen zugeordneten Geraden G_a, G_b, G_c in zugeordneten Punkten A', B', C' unter gleichen Winkeln geschnitten; auch die Winkel $(A'O, G_a)$, $(B'O, G_b)$,

($C'O$, G_c) sind gleich. Man kann daher die Geraden G_a, G_b, G_c erhalten durch Drehung von $A'O$, $B'O$, $C'O$ in gleichem Sinne und gleichem Betrage, wobei A', B', C' die Drehungspunkte sind. Nimmt man nun G_a, G_b, G_c als Träger für die Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v), so berühren wie früher (§ 22.) die Seiten des veränderlichen Dreiecks $A_vB_vC_v$ je eine Parabel. Für den speciellen Fall, dass die Punktreihenträger durch die Seitenmitten A_0, B_0, C_0 gehen, ist von Kiehl bewiesen worden, dass A_2, B_2, C_2 die Brennpunkte der erhaltenen drei Parabeln sind. Der dort gegebene Beweis bleibt aber unverändert auch in dem allgemeinen Falle anwendbar, und man hat daher den Satz:

„Drei ähnliche Punktreihen, welche in dem Aehnlich-„keitsverhältniss $p_a : p_b : p_c$ stehen, und deren Träger drei „beliebige zugeordnete Geraden sind, bestimmen drei Pa-„rabeln, deren Brennpunkte die Ecken des zweiten Bro-„card'schen Dreiecks des Punktes P sind".

§ 28. Um die Frage, ob für dieses Parabeltripel gemeinsame Tangenten vorhanden sind, zu erörtern, wenden wir uns noch einmal den Kreisen QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 (§ 23., Fig. IV.) zu. Der Kreis QB_2C_2 bildet mit Punkt A_1 und Seite BC eine Figur, welche derjenigen ähnlich ist, die der Kreis ABC mit dem Punkte P und seiner Polare bildet. Dies ist von Kiehl bewiesen worden. Um jedoch noch einen neuen Beweis dafür zu geben, nehmen wir P als ausserhalb des Kreises ABC liegend an. Sind die Geraden OA_1, OB_1, OC_1 Träger der Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v), so sind A_t und A_t' die Schnittpunkte von OA_1 und dem Kreise QB_2C_2; ferner sind QA_t und QA_t' die gemeinsamen Tangenten des zugehörigen Parabeltripels. Der Winkel, welchen diese letzteren bilden, ist Peripheriewinkel auf dem Bogen A_tA_t'; andererseits ist aber dieser Winkel gleich dem Winkel HT oder, was dasselbe ist, gleich dem im Kreise ABC auf dem Bogen TT' stehenden Peripheriewinkel (§ 13.); folglich sind die Bogen A_tA_t' und TT' ähnlich. Da dies für alle Lagen von OA_1 und PO gilt, so hat Punkt A_1 in Bezug auf Kreis QB_2C_2 dieselbe Lage wie P in Bezug auf Kreis ABC. Wenn OA_1 den Kreis QB_2C_2 berührt, so fallen die gemeinsamen Tangenten in eine zusammen; wir wissen aber schon, dass dann auch die Punkte A_t und A_t' zusammenfallen (§ 14.); mithin liegen die Berührungspunkte der von A_1 aus an den Kreis QB_2C_2 gelegenen Tangenten auf BC. Danach ist BC die Polare von A_1 in Bezug auf den Kreis QB_2C_2, und die Punkte A_1, A_t, A' und A_t' sind harmonische Punkte. Liegt P innerhalb des Kreises ABC, so liegt nach Vorstehendem A_1 inner-

halb des Kreises QB_2C_2, und es lassen sich von A_1 aus keine Tangenten an den letzteren Kreis legen; die harmonischen Beziehungen bleiben jedoch ungestört.

§ 29. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass auch die Figuren, welche durch Kreis QC_2A_2, Punkt B_1 und Seite CA sowie durch Kreis QA_2B_2, Punkt C_1 und Seite AB gebildet werden, derjenigen Figur ähnlich sind, welche der Kreis ABC mit Punkt P und seiner Polare bildet. Es folgt hieraus, dass die Strecken A_0A_1, B_0B_1, C_0C_2 homolog sind in Bezug auf die Kreise QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2, und dass sich daher die Radien dieser Kreise wie $A_0A_1 : B_0B_1 : C_0C_1$, d. h. wie $p_a : p_b : p_c$ verhalten. Weil ferner A_0, B_0, C_0 und A_1, B_1, C_1 zwei Tripel zugeordneter Punkte sind, so sind die drei Kreise zugeordnete Kreise, und drei beliebige zugeordnete Geraden sind für sie homologe Geraden. Daher werden auch diese drei Kreise durch zugeordnete Geraden gleichzeitig geschnitten oder berührt oder gar nicht getroffen, und die Durchschnitts- oder Berührungspunkte sind zugeordnete Punkte.

§ 30. Da jede durch Q gezogene Gerade ein Tripel zugeordneter Punkte enthält, und weil die Oerter für die in einer Geraden liegenden zugeordneten Punkte die drei hier betrachteten zugeordneten Kreise sind, so können diese Kreise keine anderen zugeordneten Punkte enthalten als solche, die auf einer durch Q gehenden Geraden liegen. Werden also die drei Kreise durch die drei zugeordneten Geraden G_a, G_b, G_c geschnitten, so liegen jederzeit die sechs Schnittpunkte auf zwei Geraden, welche sich in Q schneiden; diese beiden Geraden sind die gemeinsamen Tangenten für dasjenige Parabeltripel, welches man erhält, wenn man G_a, G_b, G_c zu Trägern der Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v) nimmt. Die Frage betreffend die gemeinsamen Tangenten irgend eines der hier betrachteten Parabeltripel lässt sich mit Rücksicht hierauf folgendermassen beantworten:

> „Für diejenigen drei Parabeln, welche durch die ähn-„lichen Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v), deren Träger drei „beliebige zugeordnete Geraden sind, bestimmt werden, „sind zwei reelle und verschiedene gemeinsame Tangenten „vorhanden, wenn die Punktreihenträger die drei Kreise „QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 schneiden; beide gemeinsame Tan-„genten fallen zusammen, wenn die Punktreihenträger die „genannten Kreise berühren; sie sind imaginär, wenn die „Punktreihenträger die Kreise gar nicht treffen“.

§ 31. Bestimmt man für irgend eine feste Lage des Punktes O die zugehörigen Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$, lässt diese Geraden um die Punkte A', B', C' als Drehungspunkte eine Drehung um 0^0 bis 180^0 machen und nimmt dieselben in jeder Lage als Träger der Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v), so erhält man wie in § 23. statt eines Parabeltripels drei Parabelscharen (bc), (ca), (ab). Diese stimmen mit den oben betrachteten Scharen darin überein, dass sie dieselben gemeinsamen Brennpunkte haben; die festen Tangenten für die Parabeln jeder Schar sind jetzt aber die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$. Für welche Parabeltripel der drei Scharen gemeinsame Tangenten vorhanden sind, und welche Lage dieselben haben, ergiebt sich nach dem vorigen Paragraphen durch sehr einfache Constructionen.

§ 32. Jeder Lage des Punktes O entsprechen drei solcher Parabelscharen wie die vorerwähnten. Lässt man nun noch O den Kreis HP durchlaufen, so ergiebt sich eine unendliche Anzahl solcher Scharentripel, und jedes für das gegebene Aehnlichkeitsverhältniss der Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v) mögliche Parabeltripel gehört einem dieser Scharentripel an. Obwol es nun hiernach keine anderen als die bis jetzt der Betrachtung unterzogenen Parabeltripel mehr giebt, so kann man doch noch neue Parabelscharen bilden, indem man nämlich als Drehungspunkte auf den Punktreihenträgern statt der Punkte A', B', C' beliebige andere Punkte wählt. Man erhält drei Parabelscharen, welche dadurch bestimmt sind, dass A_2, B_2, C_2 die Brennpunkte und die Seiten des Dreiecks der Drehungspunkte feste Tangenten für die Parabeln je einer Schar sind. Wählt man als Drehungspunkte drei auf den Kreisen QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 liegende zugeordnete Punkte, welche nach § 30. einer durch Q gehenden Geraden angehören, so ist diese letztere gemeinsame Tangente für sämtliche Parabeltripel der drei Scharen.

§ 33. Es ist in § 21. bewiesen worden, dass, wenn $A'O$, $B'O$, $C'O$ die Punktreihenträger sind, die Geraden $A_tB_tC_t$ parallel sind den Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche die Winkelgegenpunktcurve der Geraden PT_2T_2' ist, und zwar ist $A_tB_tC_t$ derjenigen Asymptote parallel, deren unendlich entfernter Punkt der Winkelgegenpunkt von T_2' ist. Es seien nun drei beliebige zugeordnete Geraden G_a, G_b, G_c die Träger der Punktreihen, und G_a möge den den Kreis QB_2C_2 in A_g und A_g' schneiden (Fig. VI.). Dann ist Wkl. A_tQA_g der zum Bogen A_tA_g gehörige Peripheriewinkel. Soll nun QA_g ebenfalls einer Hyperbelasymptote parallel sein, so muss diese durch den unendlich entfernten Winkelgegenpunkt desjenigen Punktes T_g' gehen, der auf dem Kreise ABC so liegt, dass Bogen $T_2'T_g'$ dem in entgegengesetzter Richtung genommenen Bogen A_tA_g

ähnlich ist. Ebenso ist QA_g' einer Hyperbelasymptote parallel, wenn die letztere durch den Winkelgegenpunkt desjenigen Punktes T_g geht, welcher auf dem Kreise ABC den Bogen T_2T_g so bestimmt, dass er dem Bogen $A_t'A_g'$ ähnlich ist und nach entgegengesetzter Richtung liegt. Durch die beiden erwähnten unendlich entfernten Winkelgegenpunkte gehen die Asymptoten derjenigen Hyperbel, welche die Winkelgegenpunktcurve der Geraden T_gT_g' ist. Um die Lage dieser Geraden zu erkennen, beachte man, dass nicht nur die Bogen $T_2'T_g'$ und T_2T_g den Bogen A_tA_g und $A_t'A_g'$ ähnlich sind und entgegengesetzt liegen, sondern, dass dasselbe auch vom Bogen $T_2'T_2$ in Bezug auf Bogen A_tA_t' gilt. Es folgt daraus nämlich, dass auch der Bogen $T_g'T_g$ dem Bogen A_gA_g' ähnlich ist. Ferner sind noch die Vierecke $T_gT_2T_g'T_2'$ und $A_g'A_t'A_gA_t$ ähnlich in gegenwendiger Lage. Da nun T_2T_2' symmetrisch liegt in Bezug auf HP zu TT', und da diese letztere Gerade im Kreise ABC homolog ist der Geraden $A_t'A_t$ im Kreise QB_2C_2, so ist auch T_gT_g' oder G_2 symmetrisch in Bezug auf HP zu derjenigen Geraden G_1, welche im Kreise ABC der Geraden G_a im Kreise QB_2C_2 entspricht.

§ 34. Die Punkte T_g und T_g' sind reell und verschieden, wenn G_a den Kreis QB_2C_2 schneidet; sie fallen zusammen, wenn G_a diesen Kreis berührt, und sie sind imaginär, wenn G_a den Kreis gar nicht trifft. In dem letzteren Falle werden auch die Geraden QA_g und QA_g' und ebenso die Asymptoten, denen diese Geraden parallel sind, imaginär; doch bleibt die Gerade G_2 reell, und ihre Winkelgegenpunktcurve ist eine Ellipse. Mit Rücksicht darauf, dass die Geraden QA_g und QA_g' die gemeinsamen Tangenten für irgend eins der hier betrachteten Parabeltripel sind, lassen sich die gewonnenen Resultate so zusammenfassen:

> „Die reellen oder imaginären gemeinsamen Tangenten „eines durch die ähnlichen Punktreihen A_v, B_v, C_v auf den „beliebigen zugeordneten Geraden G_a, G_b, G_c bestimmten „Parabeltripels sind parallel den reellen oder imaginären „Asymptoten desjenigen Kegelschnittes, welcher die Winkel-„gegenpunktcurve einer gewissen Geraden G_2 ist. Diese „Gerade G_2 ist in Bezug auf HP symmetrisch zu der-„jenigen Geraden G_1, welche mit dem Kreise ABC und „Punkt P eine Figur bildet, die den aus den Punktreihen-„trägern, den Kreisen QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 und den „Punkten A_1, B_1, C_1 gebildeten Figuren ähnlich ist“.

§ 35. Werden $A'O$, $B'O$, $C'O$ von G_a, G_b, G_c in den zugeordneten Punkten A_v', B_v', C_v' geschnitten, und dreht man die Punkt-

reihenträger um diese letzteren drei Punkte in gleichem Sinne und gleichem Betrage, so dreht sich die Gerade G_1 um denjenigen Punkt P_2, welcher im Kreise ABC den Punkten A_v', B_v', C_v' als Punkten der Kreise QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 entspricht, und die Gerade G_2 dreht sich um den Spiegelpunkt P_2 von P_1 in Bezug auf HP. Die Kegelschnitte, deren Asymptoten die gemeinsamen Tangenten der einzelnen Tripel der erhaltenen Parabelscharen parallel sind, bilden dann ein Büschel durch die Punkte A, B, C und den Winkelgegenpunkt P_2' von P_2.

In dem in den Paragraphen 23. bis 26. behandelten Falle waren A_1, B_1, C_1 die Drehungspunkte, und P_2 fiel mit P zusammen; sind A', B', C' die Drehungspunkte, so liegt P_2 auf der Polare von P in Bezug auf Kreis ABC; sind A_0, B_0, C_0 die Drehungspunkte, so ist P_2 der Durchschnittspunkt von HP und der Polare von P. Liegen die Drehungspunkte A_v', B_v', C_v' innerhalb der Kreise QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2, so liegt Punkt P_2 innerhalb des Kreises ABC, und das Kegelschnittbüschel durch die Punkte A, B, C, P_2' besteht aus lauter Hyperbeln. Liegen die Drehungspunkt auf den genannten zugeordneten Kreisen, so liegt P_2 auf dem Kreise ABC, und das erwähnte Büschel besteht aus Hyperbeln und einer Parabel. Sind endlich für jene drei Kreise die Drehungspunkte äussere Punkte, so ist auch für Kreis ABC der Punkt P_2 ein äusserer Punkt; das Büschel besteht dann aus Hyperbeln, Ellipsen und zwei Parabeln.

Das von den Paren gemeinsamer Tangenten gebildete Strahlenbüschel durch Q ist jederzeit ein involutorisches und ist durch die Lage des Punktes P_2 vollständig bestimmt.

V. Aehnliche Punktreihen auf beliebigen Geraden; Bestimmung des zugehörigen Dreiecks ABC.

§ 36. Die Punktreihen (A'), (B'), (C'), welche unseren Untersuchungen als Ausgangspunkt dienten, waren zwar ganz beliebig, doch waren sie noch durch die Bedingung verknüpft, dass die Mitten A_0, B_0, C_0 der Seiten des Dreiecks ABC sich entsprechen sollten. Die gewonnenen Resultate gestatten nun, auch diese Bedingung fallen zu lassen und ausserdem das Dreieck ABC als nicht gegeben anzusehen. Es wird dann darauf ankommen, für irgend welche drei gegebene ähnliche Punktreihen dasjenige Dreieck zu finden, in Bezug auf welches die Träger der Punktreihen zugeordnete Geaaden sind.

Sind (A_v), (B_v), (C_v) drei beliebige Punktreihen, deren Aehnlichkeitsverhältniss $p_a : p_b : p_c$ ist, und deren Träger das Dreieck

$A''B''C''$ bilden (Fig. VII.), so kann man diese Reihen nicht als identisch mit den Reihen (A'), (B'), (C') betrachten, weil die erwähnte, diese letzteren Reihen verknüpfende Bedingung nicht mehr besteht; wol aber kann man jene ersten Reihen als solche ansehen, welche auf zugeordneten Geraden in Bezug auf das noch zu bestimmende Dreieck ABC liegen. Von diesem Dreieck ABC weiss man im voraus, dass es dem Dreieck $A''B''C''$ ähnlich ist, weil seine Seiten von zugeordneten Geraden unter gleichen Winkeln geschnitten werden.

Aus den zugeordneten Geraden $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ erhält man durch Drehung um die beliebigen zugeordneten Punkte A_v', B_v', C_v' in gleichem Sinne und gleichem Betrage ein anderes Tripel zugeordneter Geraden. Man kann nun die Drehung so bestimmen, dass diese drei letzteren Geraden durch einen Punkt O' gehen, welcher als der gemeinsame Schnittpunkt der Kreise $A''B_v'C_v'$, $B''C_v'A_v'$, $C''A_v'B_v'$ leicht construirbar ist. Auf gleiche Weise kann man durch Drehung um drei andere zugeordnete Punkte A_v'', B_v'', C_v'' drei zugeordnete Geraden erhalten, welche durch einen zweiten Punkt O'' gehen. Schneiden sich dann $A_v'O'$ und $A_v''O''$ in A_1, $B_v'O'$ und $B_v''O''$ in B_1, $C_v'O'$ und $C_v''O''$ in C_1, so sind die Winkel $O'A_1O''$, $O'B_1O''$, $O'C_1O''$ entweder gleich oder supplementär; mithin liegen die Punkte A_1, B_1, C_1, O', O'' auf einem Kreise. Ferner ist auch Winkel $B_1O'C_1$ entweder gleich oder supplementär den Winkeln $C_1A_1B_1$ und $C''A''B''$; folglich ist

$$\text{Wkl. } C_1A_1B_1 = C''A''B'' = \alpha$$

Ebenso ist

$$\text{Wkl. } A_1B_1C_1 = \beta \quad \text{und} \quad \text{Wkl. } B_1C_1A_1 = \gamma$$

also

$$\text{Dreieck } A_1B_1C_1 \backsim A''B''C'' \backsim ABC$$

Die Dreiecke $A_1A_v'A_v''$, $B_1B_v'B_v''$, $C_1C_v'C_v''$ sind ähnlich wegen der Gleichheit der Winkel; folglich verhält sich

$$A_1A_v' : B_1B_v' : C_1C_v' = A_v'A_v'' : B_v'B_v'' : C_v'C_v'' = p_a : p_c : p_c$$

Sind nun A_v''', B_v''', C_v''' wiederum drei zugeordnete Punkte, und verbindet man A_v''' mit A_1, B_v''' mit B_1, C_v''' mit C_1, so verhält sich

$$A_1A_v' : B_1B_v' : C_1C_v' = A_v'A_v''' : B_v'B_v''' : C_v'C_v''' = p_a : p_b : p_c$$

ausserdem ist

$$\text{Wkl. } A_1A_v'A_v''' = B_1B_v'B_v''' = C_1C_v'C_v'''$$

folglich

$$\triangle\, A_1A_v'A_v''' \text{ ähnl. } B_1B_v'B_v''' \text{ ähnl. } C_1C_v'C_v'''$$

und die Geraden $A_v'''A_1$, $B_v'''B_1$, $C_v'''C_1$ schneiden die Seiten des Dreiecks $A''B''C''$ unter gleichen Winkeln, sind also zugeordnete Geraden. Treffen sich nun $A_v'''A_1$ und $B_v'''B_1$ in O''', so ist Wkl. $A_1O'''B_1$ entweder gleich oder supplementär dem Winkel γ; mithin liegt O''' auf dem Kreise $A_1B_1C_1$. Da dasselbe von dem Durchschnittspunkt von $A_v'''A_1$ und $C_v'''C_1$ gilt, so muss dieser letztere Durchschnittspunkt mit O''' zusammenfallen. Hiernach schneiden sich alle zugeordnete Geraden, welche durch die Punkte A_1, B_1, C_1 gehen, in einem Punkte, welcher auf dem Kreise $A_1B_1C_1$ liegt, und man erkennt daraus, dass Dreieck $A_1B_1C_1$ das zu ABC gehörige erste Brocard'sche Dreieck des Punktes P ist, dass also auch Kreis $A_1B_1C_1$ mit dem Kreise HP identisch ist.

§ 37. Nachdem dies festgestellt ist, kann man nun den Punkt Q construiren, dessen Entfernungen von den Seiten des Dreiecks $A_1B_1O_1$ sich wie $\frac{1}{p_a} : \frac{1}{p_b} : \frac{1}{p_c}$ verhalten; ferner ergeben sich die Punkte A_2, B_2, C_2 als Schnittpunkte von QA_1, QB_1, QC_1 mit dem Kreise $A_1B_1C_1$, auch die Kreise QB_2C_2, QC_2A_2, QA_2B_2 sind bestimmt. Es lassen sich also ohne Rücksicht auf Dreieck ABC für die drei durch die ähnlichen Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v) erzeugten Parabeln schon die Brennpunkte sowie die etwa vorhandenen gemeinsamen Tangenten construiren.

§ 38. Um nun noch Dreieck ABC zu bestimmen, construire man zunächst die Punkte A_3', B_3' C_3' (Fig. VIII.). Dann liegen die Punkte A_0, B_0, C_0 auf den Geraden QA_3', QB_3', QC_3' (§ 25.), und zwar, weil Punkt Q die Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_0B_0C_0$ in gleichem Verhältniss teilt, so, dass

$$QA_0 : QB_0 : QC_0 = QA_1 : QB_1 : QC_1$$

ist. Trägt man daher auf QA_3' die Strecke

$$QA_0' = QA_1$$

ab, ebenso auf QB_3' die Strecke

$$QB_0' = QB_1$$

und auf QC_3' die Strecke

$$QC_0' = QC_1$$

so ist Dreieck $A_0'B_0'C_0'$ dem Dreieck $A_0B_0C_0$ ähnlich und mit ihm in Aehnlichkeitslage. Die von A_1, B_1, C_1 aus zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks $A_0'B_0'C_0'$ gezogenen Senkrechten sind daher die

Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC und schneiden sich auf dem Kreise $A_1B_1C_1$ im Punkte H, dem Mittelpunkt des Kreises ABC. Dadurch ist auch P bestimmt. Nun liegt A auf der Geraden A_2P, ferner auch auf der Geraden, welche mit HB_1 den Winkel β bildet. Die letztere Gerade erhält man, wenn man durch A_1 zu B_1C_1 eine Parallele zieht, welche den Kreis HP in A_1'' schneidet, und H mit A_1'' verbindet. Punkt A ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden A_2P und HA_1''. Entsprechend erhält man B und C. Man kann auch zuerst die Punkte A_0, B_0, C_0 bestimmen; A_0 ist nämlich der Durchschnittspunkt der durch A_1 zu $B_0'C_0'$ gezogenen Senkrechten und der Geraden QA_3', und entsprechend ergeben sich B_0 und C_0.

§ 39. Wenn das Aehnlichkeitsverhältniss der Punktreihen $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ ist, so können Dreieck $A_1B_1C_1$ und der Kreis HP in einen Punkt ausarten, und dies entspricht dem Zusammenfallen des Punktes P mit H. Die Constructionen der §§ 37. und 38. sind dann unausführbar; Dreieck ABC wird unbestimmt und kann jedes Dreieck sein, welches dem Dreieck der Punktreihenträger ähnlich ist und mit ihm den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises gemein hat. Es können jedoch auch bei dem angegebenen Aehnlichkeitsverhältniss die Constructionen des § 36. ein wirkliches Dreieck $A_1B_1C_1$ ergeben. Dann sind noch die Constructionen des § 37., nicht aber die des § 38. möglich. Der Punkt Q ist dann nämlich der Höhenschnittpunkt von $A_1B_1C_1$, und daher fallen die Punkte A_3', B_3', C_3' mit Q zusammen. Die Seiten des Dreiecks ABC liegen in diesem Falle in unendlicher Entfernung; im Endlichen aber giebt es kein Dreiek, für welches die gegebenen Punktreihenträger zugeordnete Geraden sind.

Schneiden sich die Punktreihenträger in einem Punkte, so ist dieser ein Punkt O des Kreises HP. Die Constructionen des § 36. sind dann unausführbar. Man construire deshalb zunächst die Punkte A_2, B_2, C_2, welche die zweiten Durchschnittspunkte der Kreise $B_v'OC_v'$ und $B_v''OC_v''$, $C_v'OA_v'$ und $C_v''OA_v''$, $A_v'OB_v'$ und $A_v''OB_v''$ sind. Durch die Punkte A_2, B_2, C_2 ist Kreis HP bestimmt; ferner ist auch die Lage der Punkte A_1, B_1, C_1, Q bekannt, weil die Gestalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ durch die Winkel, welche die Punktreihenträger bilden, gegeben ist, und weil man auch das Verhältniss kennt, nach welchem Dreieck $A_1B_1C_1$ durch den Schnittpunkt Q von A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 geteilt wird. Dreieck ABC findet man sodann nach § 38. Ist O ein sich selbst entsprechender Punkt für zwei der gegebenen Punktreihen, so fällt einer der Doppelpunkte A_2, B_2, C_2 mit O zusammen. Entspricht O sich selbst in allen drei Punktreihen, so

giebt es kein Dreieck ABC, für welches die Träger zugeordnete Geraden sind.

Sind von den Trägern der gegebenen Punktreihen zwei, oder sind alle drei parallel, so giebt es ebenfalls kein zugehöriges Dreieck ABC.

VI. Der besondere Fall, in welchem P der Grebe'sche Punkt ist. (Fig. IX.)

§ 40. Unter den besonderen Fällen ist vor allen anderen der von Bedeutung, dass P mit dem Grebe'schen Punkt K zusammenfällt, weil dann A, B, C zugeordnete Punkte sind. Diesem Falle gehören auch die beiden von Herrn Artzt in seinem Programm von 1884 untersuchten Parabeltripel an; man erhält dieselben nämlich, wenn die zu Punktreihenträgern gewälten zugeordneten Geraden die Seiten des Dreieck ABC oder die zugehörigen Mittelsenkrechten sind. Den Punkten C und B der Reihe (A') entsprechen jetzt die Punkte A und C der Reihe (B') sowie die Punkte B und A der Reihe (C'); der Kreis HP wird zum Brocard'schen Kreise, Dreieck $A_1B_1C_1$ zum ersten Brocard'schen Dreieck und Punkt Q zum gemeinsamen Schwerpunkt E aller durch ein Tripel zugeordneter Punkte bestimmten Dreiecke.

Jeder Punkt O des Kreises HP entspricht nach § 6. einem bestimmten Werte von c; in unserm besonderen Falle lässt sich jedoch c durch einen anderen, für das Folgende bequemeren veränderlichen Parameter λ ersetzen, welcher durch die Gleichungen

$$\frac{A'C}{BA'} = \frac{B'A}{CB'} = \frac{C'B}{AC'} = \lambda$$

worin die Bezeichnung der Strecken zugleich die Richtung andeutet, in welcher sie zu nehmen sind, definirt ist. Für ein positives λ liegt dann A' zwischen B und C; für

$$\lambda = 0$$

fällt A' mit C, für

$$\lambda = \pm\infty$$

mit B zusammen; für

$$\lambda = 1$$

ist A' die Mitte von BC, für

$$\lambda = -1$$

aber der unendlich entfernte Punkt der Geraden BC; für

$$0 > \lambda > -1$$

liegt A' auf der Verlängerung von BC über C hinaus, für

$$-1 > \lambda > -\infty$$

auf der Verlängerung über B hinaus; den Werten λ und $-\lambda$ entsprechen zwei Punkte A', welche in Bezug auf B uno C conjugirt harmonisch sind, den Werten λ und $\frac{1}{\lambda}$ zwei zu B und C symmetrisch liegende Punkte. Entsprechendes gilt für die Lage von B' und C'.

Bezeichnet man den irgend einem Werte von λ entsprechenden Punkt des Brocard'schen Kreises mit O_λ, so ist O_1 der Mittelpunkt H des Kreises ABC, O_{-1} der Grebe'sche Punkt; O_0 ist der erste und O_∞ der zweite Brocard'sche Punkt; die Punkte O_λ und $O_{\frac{1}{\lambda}}$ liegen symmetrisch zu HK, die Punkte O_λ und $O_{-\lambda}$ liegen auf einer durch D' (Pol der Geraden $O_0 O_\infty$ in Bezug auf den Brocard'schen Kreis) gehenden Geraden. Sämtliche Punktepare O_λ und $O_{-\lambda}$ bilden ein Involutionssystem auf dem Brocard'schen Kreise mit den Doppelpunkten O_0 und O_∞.

Die Beziehung, welche zwischen c (oder $\cot\vartheta$) und λ besteht, ergiebt sich auf folgende Weise. Es ist

$$\lambda = \frac{A'C}{BA'} = \frac{A_0C - A_0A'}{BA_0 + A_0A'} = \frac{\frac{1}{2}a - A_0A_1\cot\vartheta}{\frac{1}{2}a + A_0A_1\cot\vartheta} = \frac{\frac{a}{2A_0A_1} - \cot\vartheta}{\frac{a}{2A_0A_1} + \cot\vartheta}$$

Nun ist $\frac{a}{2A_0A_1}$ derjenige Wert von $\cot\vartheta$, welcher dem Werte

$$\lambda = 0$$

entspricht; bezeichnet man diesen Wert mit $\cot\vartheta_0$, so ist

$$\lambda = \frac{\cot\vartheta_0 - \cot\vartheta}{\cot\vartheta_0 + \cos\vartheta} \quad \text{und} \quad \cot\vartheta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cot\vartheta_0$$

und weil ϑ_0 der Brocard'sche Winkel des Dreiecks ABC ist,

$$\cot\vartheta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

worin Δ den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bezeichnet.

Für

$$\lambda = 1$$

ergiebt sich hieraus:

$$\cot\vartheta_1 = 0, \quad \text{also} \quad \vartheta_1 = 90^0$$

ähnlich findet man:

$$\vartheta_{-1} = 0^0 \quad \text{oder} \quad 180^0$$

$$\vartheta_\infty = 180^0 - \vartheta_0, \quad \vartheta_\lambda + \vartheta_{\frac{1}{\lambda}} = 180^0$$

$$\cot\vartheta_\lambda . \cot\vartheta_{-\lambda} = \cot^2\vartheta$$

§ 41. Für jedes Parabeltripel der durch ähnliche Punktreihen auf den Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ erzeugten Scharen von Parabeln sind, weil K immer ein innerhalb des Dreiecks ABC gelegener Punkt ist, zwei reelle gemeinsame Tangenten vorhanden (§ 14.), welche durch den Schwerpunkt E des Dreiecks ABC gehen; die Richtung derselben wird bestimmt durch die Asymptoten je eines Kegelschnitts des Büschels $(ABCE)$, das aus lauter Hyperbeln besteht und als gleichseitige Hyperbel die Kiepert'sche Hyperbel, welche bekanntlich die Winkelgegenpunktcurve der Geraden HK ist, enthält. Die drei Punkte A_3', B_3', C_3', durch welche die Leitlinien der Parabeln gehen, liegen auf den Mittellinien von ABC; die von den Leitlinien und von den Parabelachsen gebildeten Dreiecke sind dem aus den Schwerlinien von ABC gebildeten Dreiecke ähnlich.

§ 42. Wenn die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC die Träger der Punktreihen (A_v), (B_v), (C_v) sind, so schneiden sich die Geraden AA_v, BB_v, CC_v in einem Punkte, dessen Ort die Kiepert'sche Hyperbel ist (Artzt, Progr. 1884). Dies regt dazu an, die Lage der Schnittpunkte der genannten drei Geraden zu untersuchen, wenn drei beliebige Geraden $A'O$, $B'O$, $C'O$ die Punktreihenträger sind. Bei allgemeiner Lage des Punktes P würden diese Untersuchungen zu verwickelten Rechnungen führen; in unserm speciellen Falle sind diese Rechnungen jedoch leichter ausführbar und ergeben interessante Resultate.

Zunächst ist sofort ersichtlich, dass die Oerter für die Schnittpunkte je zweier der drei Geraden AA_v, BB_v, CC_v drei Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) sind; dies folgt aus der Projectivität der drei Büschel $A(A_v)$, $B(B_v)$, $C(C_v)$. Ferner erkennt man, weil die sich entsprechenden Strahlen AA', BB', CC' sich nur dann in einem Punkte schneiden, wenn A', B', C' die Seitenmitten sind, dass auch nur in diesem Falle ein Zusammenfallen der Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) eintreten kann. Endlich lässt sich noch daraus, dass die sich entsprechenden Strahlen AA_1, BB_1, CC_1 durch den Punkt D (Projectionscentrum der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$) gehen, schliessen, dass sich die drei Kegelschnitte in diesem Punkte schneiden.

§ 43. Wir untersuchen zunächst den Kegelschnitt (BC) und stellen zu diesem Zwecke die Gleichung desselben auf. Setzt man

$$B'B_v = k.CB'$$

so sind die Entfernungen des Punktes B_v von BC und AB

$$CB'(\sin\gamma - k\sin[\gamma+\vartheta]) \quad \text{und} \quad CB'(\lambda\sin\alpha + k\sin[\alpha-\vartheta])$$

Die Gleichung von BB_v in trimetrischen Coordinaten ist also

$$x_1(\lambda\sin\alpha + k\sin[\alpha-\vartheta]) - x_3(\sin\gamma - k\sin[\gamma+\vartheta]) = 0$$

ebenso findet man als Gleichung von CC_v

$$x_1(\sin\alpha - k\sin[\alpha+\vartheta]) - x_2(\lambda\sin\beta + k\sin[\beta-\vartheta]) = 0$$

Die gesuchte Gleichung des Kegelschnittes (BC) ergiebt sich durch Elimination von k aus diesen beiden Gleichungen. Man erhält zunächst

$$\begin{aligned}
&x_1{}^2\sin^2\alpha([1+\lambda]\cot\vartheta - [1-\lambda)\cot\alpha) \\
&- x_2x_3\sin\beta\sin\gamma([1+\lambda]\cot\vartheta - \cot\beta + \lambda\cot\gamma) \\
&+ x_3x_1\sin\gamma\sin\alpha(\cot\gamma - \cot\alpha) \\
&+ \lambda x_1x_2\sin\alpha\sin\beta(\cot\alpha - \cot\beta) = 0
\end{aligned}$$

und wenn man jetzt die Winkelfunctionen durch a, b, c, Δ ausdrückt,

$$\text{(I)} \quad (1-\lambda)a^4x_1{}^2 - bc(b^2 - \lambda c^2)x_2x_3 - ca(c^2 - a^2)x_3x_1 - \lambda ab(a^2 - b^2)x_1x_2 = 0$$

Dies ist die Gleichung des Kegelschnitts (BC). Sie bestätigt, dass derselbe durch die beiden Punkte B und C und durch den Punkt D geht, dessen Coordinaten $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3}$ sind. Nehmen wir λ als veränderlich an, so stellt die Gleichung (I) ein Kegelschnittbüschel durch die Punkte B, C, D und einen vierten Punkt D_a dar, welcher letztere noch zu bestimmen ist. Zu diesem Zwecke setze man in (I) einmal

$$\lambda = \lambda_1, \quad \text{sodann} \quad \lambda = \lambda_2$$

subtrahire die zuletzt erhaltene Gleichung von der ersteren und dividire durch $\lambda_1 - \lambda_2$; die sich nun ergebende Gleichung verbinde man mit (I), und man erhält

$$\frac{x_3}{x_1} = -a\,\frac{a^4 - 2a^2c^2 + b^2c^2 \pm (a^4 - b^2c^2)}{2c^3(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = + a \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^2c^2 \pm (a^4 - b^2c^2)}{2b^3(a^2 - b^2)}$$

Nimmt man von den Doppelvorzeichen das obere, so ergiebt sich

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}$$

und dies bezieht sich auf Punkt D. Nimmt man das untere Vorzeichen, so findet man

$$x_1 : x_2 : x_3 = bc(c^2 - a^2)(a^2 - b^2) : ca(c^2 - a^2)^2 : ab(a^2 - b^2)^2$$

und hiernach ist Punkt D_a bestimmt. Die Gleichung der Geraden AD_a ist

$$b(a^2 - b^2)^2 x_2 - c(c^2 - a^2)^2 x_3 = 0$$

AD_a geht also durch den Punkt, der die Coordinaten

$$x_1 = bc(b^2 - c^2)^2, \quad x_2 = ca(c^2 - a^2)^2, \quad x_3 = ab(a^2 - b^2)^2$$

hat, d. h. durch den Mittelpunkt der Kiepert'schen Hyperbel. Da nun A ein Punkt der Kiepert'schen Hyperbel, und diese eine Hyperbel des Büschels $(BCDD_a)$ ist, so ist D_a der zweite Endpunkt des von A ausgehenden Durchmessers der Kiepert'schen Hyperbel.

Für die Kegelschnitte (CA), (AB) ergiebt sich Entsprechendes, und die gewonnenen Resultate lassen sich daher so zusammenfassen:

„Bei jedem beliebigen Werte von λ liegen die Schnitt„punkte je zweier der drei Geraden AA_v, BB_v, CC_v auf „einem Kegelschnitte. Jeder der dadurch entstandenen „drei Kegelschnitte geht durch die Endpunkte einer Seite „des Dreiecks ABC, durch den zweiten Endpunkt des„jenigen Durchmessers der Kiepert'schen Hyperbel, der „von dem jener Dreiecksseite gegenüberliegenden Eck„punkte ausgeht, und durch das Projectionscentrum D des „gegebenen Dreiecks und seines ersten Brocard'schen „Dreiecks. Bei veränderlichem λ werden die drei Kegel„schnitte zu Kegelschnittbüscheln durch die angegebenen „vier Punkte; diesen drei Büscheln gehört als sich selbst „entsprechender Kegelschnitt die Kiepert'sche Hyperbel „an".

§ 44. Schreibt man in Gleichung (I), welche den Kegelschnitt (BC) darstellt, $\frac{1}{x_1}$ für x_1, $\frac{1}{x_2}$ für x_2, $\frac{1}{x_3}$ für x_3, so erhält man die Gleichung der Winkelgegenpunktscurve des genannten Kegelschnittes; nämlich:

$$\text{(II)} \quad bc(b^2 - \lambda c^2)x_1^2 - (1-\lambda)a^4 x_2 x_3 + \lambda ab(a^2 - b^2)x_3 x_1 + ca(c^2 - a^2)x_1 x_2 = 0$$

Diese Gleichung stellt ebenfalls einen Kegelschnitt dar. Man kann aus derselben in Verbindung mit der Gleichung

$$a x_2 x_3 + b x_3 x_1 + c x_1 x_2 = 0$$

welche den Umkreis von ABC darstellt, das Product $x_2 x_3$ eliminiren; dann erhält man:

$$x_1 [bc(b^2 - \lambda c^2)x_1 + ca(c^2 - \lambda a^2)x_2 + ab(a^2 - \lambda b^2)x_3] = 0$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Kegelschnitt (II) mit dem Kreise ABC die beiden Sehnen

$$x_1 = 0$$

d. h. Seite BC, und

$$\text{III)} \quad bc(b^2 - \lambda c^2)x_1 + ca(c^2 - \lambda a^2)x_2 + ab(a^2 - \lambda b^2)x_3 = 0$$

gemein hat. Zur Abkürzung bezeichnen wir die letztere Sehne durch U_λ und ihre Schnittpunkte mit dem Kreise ABC durch U' und U''. Da die Gleichung von U_λ eine symmetrische Form hat, so ist diese Gerade auch gemeinsame Sehne des Kreises ABC und der Winkelgegenpunktscurven der Kegelschnitte (CA) und (AB); die Winkelgegenpunktscurven der Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) schneiden also den Umkreis des Dreiecks ABC ausser in den Endpunkten je einer Seite noch in den Punkten U' und U''. Es folgt hieraus, dass die Richtungen, nach welchen hin die unendlich entfernten Punkte der Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) liegen, d. h. die Richtungen der Asymptoten, für alle drei Kegelschnitte dieselben sind, nämlich diejenigen Richtungen, nach welchen hin die unendlich entfernten Winkelgegenpunkte der Punkte U' und U'' liegen. Man construirt diese Richtungen, indem man durch U' und U'' zu irgend einer Seite des Dreiecks ABC Parallelen zieht und diejenigen Punkte, in welchen diese Parallelen den Umkreis von ABC zum zweiten Male schneiden, mit dem jener Dreiecksseite gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet. Die drei Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) bilden, weil nach Vorstehendem ihre Asymptoten parallel sind, ein Tripel ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte. Sie sind Hyperbeln, wenn die Punkte U' und U'' reell und verschieden sind, Parabeln, wenn diese Punkte zusammenfallen, Ellipsen, wenn dieselben imaginär sind. Die Richtung der Achsen findet man, wenn die Asymptoten reell sind, durch Halbirung der beiden Winkel, welche die Richtungen der Asymptoten bilden. Unabhängig von den Asymptoten, also auch, wenn diese imaginär sind, findet man die Richtungen der Achsen dadurch, dass man im Kreise ABC denjenigen Durchmesser $W'W''$

zieht, welcher zu $U\lambda$ senkrecht ist, und dann die beiden Richtungen bestimmt, nach welchen hin die Winkelgegenpunkte von W' und W'' liegen.

§ 45. Die Gleichung (III) kann man auch schreiben

$$b^3 cx_1 + c^3 ax_2 + a^3 bx_3 - \lambda (bc^3 x_1 + ca^3 x_2 + ab^3 x_3) = 0$$

sie stellt also bei veränderlichem λ ein Strahlenbüschel dar, dessen Fundamentalstrahlen U_0 und U_∞ die Gleichungen haben:

$$b^3 cx_1 + c^3 ax_2 + a^3 bx_3 = 0, \quad bc^3 x_1 + ca^3 x_2 + ab^3 x_3 = 0$$

Das Centrum U dieses Strahlenbüschels hat die Coordinaten

$$x_1 = a(b^2c^2 - a^4), \quad x_2 = b(c^2a^2 - b^4), \quad x_3 = c(a^2b^2 - c^4)$$

oder

$$x_1 = \sin(\alpha - 2\vartheta_0), \quad x_2 = \sin(\beta - 2\vartheta_0), \quad x_3 = \sin(\gamma - 2\vartheta_0)$$

Hiernach kann der Punkt U construirt werden; er liegt auf der Geraden HK, weil diese Gerade derjenige Strahl des Büschels (U) ist, welcher dem Werte

$$\lambda = 1$$

entspricht; er liegt ferner ausserhalb des Kreises ABC, und zwar mit K auf derselben Seite von H.

Bestimmt man nach bekannter Formel aus den Gleichungen der Geraden HK und $U\lambda$ den Winkel, welchen sie bilden, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\operatorname{tg}(HK, U\lambda) = -\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta} = -\cot\vartheta$$

Der Winkel $(HK, U\lambda)$ ist also das Complement von ϑ, muss jedoch negativ genommen werden. Da nun auch Wkl. HKO das Complement des Winkels ϑ ist, so wird HK von KO und $U\lambda$ unter gleichen Winkeln geschnitten, die aber auf verschiedenen Seiten von HK liegen. Für die beiden Fundamentalstrahlen des Büschels (U) folgt hieraus unmittelbar, dass sie den Verbindungslinien des Grebe'schen Punktes mit den Brocard'schen Punkten parallel sind, und zwar der Art, dass $U_0 \parallel KO_\infty$ und $U_\infty \parallel KO_0$ ist.

§ 46. Die in § 34. erwähnten Geraden G_1 und G_2 sind in unserm besonderen Falle die Geraden KO und die zu dieser in Bezug auf HK symmetrisch gelegene Gerade. Mit Rücksicht auf den vorigen Paragraphen folgt daraus, dass $U\lambda$ und G_2 parallel sind. Der zu $U\lambda$ senkrechte Durchmesser $W'W''$ des Kreises ABC steht

daher auch senkrecht auf G_2, und so wie die unendlich entfernten Winkelgegenpunkte von W' und W'' die Richtungen der Achsen der Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) bestimmen, bestimmen sie auch die Richtungen der Achsen desjenigen Kegelschnittes, welcher die Winkelgegenpunktcurve der Geraden G_2 ist. Dieser letztere Kegelschnitt ist aber nach nach § 34. derjenige, dessen Asymptoten den gemeinsamen Tangenten des zugehörigen Parabeltripels parallel sind; seine Achsen haben daher dieselbe Richtung wie die Halbirungslinien der von diesen gemeinsamen Tangenten gebildeten Winkel. Daraus schliesst man:

„Die Achsen der Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) sind „den Halbirungslinien der Winkel parallel, welche von den „beiden gemeinsamen Tangenten der Parabeln (bc), (ca), „(ab) gebildet werden".

§ 47. Jeder der drei Kegelschnitte (BC), (CA), (AB) wird für drei bestimmte Werte von λ zu einem Linienpar. Für den Kegelschnitt (BC) tritt dies ein, wenn B' auf BD oder C' auf CD liegt, oder wenn die Büschel $B(B_v)$ und $C(C_v)$ die Gerade BC als gemeinschaftlichen Strahl enthalten. Im ersten Falle ist

$$\lambda = \frac{a^2}{c^2}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (I) erhält man

$$(a^3x_1 - c^3x_3)\left[a(c^2 - a^2)x_1 - b(a^2 - b^2)x_2\right] = 0$$

der Kegelschnitt artet also in das Linienpar

$$a^3x_1 - c^3x_3 = 0$$

und

$$a(c^2 - a^2)x_1 - b(a^2 - b^2)x_2 = 0$$

d. h. in die beiden Geraden BD und CD_a (§ 43.) aus. Im zweiten Falle ist

$$\lambda = \frac{b^2}{a^2}$$

und man findet wie vorhin, dass der Kegelschnitt in das Linienpar CD und BD_a ausartet. Der letzte Fall tritt ein, wenn BC von $B'O$ und $C'O$ in zugeordneten Punkten getroffen wird. Aus ähnlichen Dreiecken findet man, dass dann

$$\lambda = \frac{b^2}{c^2}$$

ist, und also A' auf AK liegt. Durch Einsetzen des Wertes von λ erhält man aus (I)

$$x_1 \left[a^3(b^2-c^2)x_1 + b^3(a^2-b^2)x_2 + c^3(c^2-a^2)x_3 \right] = 0$$

und man erkennt hieraus, dass in diesem Falle der Kegelschnitt (BC) in das Linienpar

$$x_1 = 0$$

und

$$a^3(b^2-c^2)x_1 + b^3(a^2-b^2)x_2 + c^3(c^2-a^2)x_3 = 0$$

d. h. in die beiden Geraden BC und DD_a ausartet.

Entsprechende Resultate ergeben sich für die Kegelschnitte (CA) und (AB).

XIII.

Ueber die geometrische Darstellbarkeit imaginärer Punkte im Raume.

Von

P. Molenbroek.

Am Leibniztage des Jahres 1882 ist von der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften die nachfolgende Preisfrage gestellt:

> „Es soll der Begriff der einem geometrischen Gebilde „angehörigen Elemente dergestalt erweitert werden, dass „an die Stelle der im Sinne der analytischen Geometrie „einem Gebilde associirten imaginären Punkte, Geraden, „Ebenen wirklich existirende Elemente treten, und dass „dann die gedachten Sätze, insbesondere die auf die Anzahl der gemeinschaftlichen Elemente mehrerer Gebilde „sich beziehenden, unbedingte Geltung gewinnen und „geometrisch bewiesen werden können".

Diese Preisfrage wurde im Jahre 1884 erneut und die darauf eingereichte Arbeit, von Herrn Kötter verfasst, errang den Preis.

Wie die Akademie verlangte, hat Hr. Kötter bei der Beantwortung auf die von von Staudt in seinen „Beiträgen zur Geometrie der Lage" aufgestellten Principien sich gestützt. Von Staudt betrachtet zwei conjugirt imaginäre Punkte als Doppelpunkte einer elliptischen Involution, welche durch zwei reelle auf einer reellen Geraden in einer festgesetzten Aufeinanderfolge liegenden Punktepaare bestimmt wird. Hr. Kötter hat nun diese Definition

bei Involutionen höherer Ordnung weiter geführt und es ist ihm gelungen eine sehr befriedigende Theorie der algebraischen Curven darauf zu bauen.

Wenn auch in dieser Weise dem Begriffe der imaginären Punkte eine geometrische Bedeutung gewissermaassen zukommt, so kann das Gebilde, welches unter dem Ausdruck eines imaginären Punktes zu verstehen sei, doch sinnlich nicht beobachtet werden.

Es will mir jedoch scheinen, dass dieser Mangel nur in der Beschränktheit der bisher üblich gewesenen geometrischen Anschauungen seinen Grund findet, wie ich im Nachfolgenden im Grundriss darzulegen hoffe.

Zu den hier mitgeteilten Ergebnissen wurde ich durch die von Hamilton aufgestellte Theorie der Quaternionen geführt. Es sei mir deshalb auch gestattet den Gedankenlauf, welchen ich bei der Beantwortung der in Rede stehenden Frage befolgte, im Lichte jener Theorie mitzuteilen.

1. Wenn unter α, β Vectoren verstanden werden, so hat Hamilton bekanntlich für Ausdrücke von der Form

$$\alpha+\beta, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha\beta, \quad \beta:\alpha$$

Definitionen aufgestellt, welche hier kurz wiederholt werden mögen:

1°. Trägt man von dem Endpunkte des Vectors

$$\alpha = OA$$

aus einen Vector

$$AB = \beta$$

ab, so ist unter $\alpha+\beta$ der Vector OB zu verstehen;

2°. $\alpha-\beta$ ist ein Vector, welcher, zu β addirt, α als Summe ergiebt;

3°. Die Gesamtheit der Operationen, welche erforderlich sind um den Vector α in den anderen Vector β überzuführen, — d. h. die Drehung der Vectoren in der Ebene der beiden Vectoren, bis derselbe in die Richtung des zweiten angelangt ist, verbunden mit der erforderlichen Verlängerung oder Verkürzung — wird mit dem Symbole $\beta:\alpha$ bezeichnet;

4°. $\alpha\beta$ ist das Product der beiden rechten Quaternionen, deren Indices den beiden Vectoren α, β gleich kommen.

Die erstere dieser Definitionen führt weiter zu dem Begriffe des Symbols $x\alpha$, wo x eine ganze arithmetische Zahl bedeutet. Auch

in dem Falle, wo der Grösse x ein gebrochener oder irrationaler oder auch ein negativer algebraischer Wert zukommt, hat Hamilton das Symbol $x\alpha$ gedeutet. Nur der Fall eines imaginären Wertes für x bleibt der Definition bedürftig, welche zwar von Hamilton versucht, jedoch nirgends mitgeteilt oder benutzt scheint. Dennoch erscheinen bei den Rechnungen mit Quaternionen naturgemäss Ausdrücke von der Form

$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

welchen Hamilton den Namen „Bivectoren" beigelegt hat, die jedoch bisher des geometrischen Sinnes entbehren.

Unser nächster Zweck sei somit, einen solchen geometrischen Sinn zu finden. Greifen wir dabei ein wenig zu andern schon von Hamilton festgesetzten Definitionen zurück.

2. Der geniale englische Mathematiker betrachtet den Begriff der Scalargrösse als unabhängig von demjenigen des Vectors und dem letzteren gewissermaassen vorangehend, somit als etwas bekanntes.

Ich glaube jedoch vorziehen zu müssen, die Theorie der Scalare zusammen mit derjenigen der Vectoren zu entwickeln. Diese Aufgabe zu vollziehen, würde hier zu weit führen. Ich werde deshalb nur dasjenige erwähnen, woraus die Theorie der imaginären Zahlen in unmittelbarem Zusammenhange hergeleitet werden kann.

3. Anstatt $\alpha + \alpha$ schreiben wir 2α, anstatt $\alpha + \alpha + \alpha$ in gleicher Weise 3α u. s. w. und nennen die so erhaltenen Symbole 2, 3, ... arithmetische ganze Zahlen. Eine willkürliche derselben wollen wir mit m bezeichnen; es erhellt sodann sofort, dass $m\alpha$ ein Vector ist, welcher die nämliche Richtung hat wie α.

Setzt man

$$m\alpha = \beta$$

so wird α der $m$te Teil des Vectors β genannt. Es ist nun auch der Vector $\frac{1}{m}\beta$ mit β gleichgerichtet, und man schreibt

$$\alpha = \beta : m \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{1}{m}\beta.$$

Unter $\frac{m}{n}\beta$, wo m, n zwei ganze arithmetische Zahlen bedeuten, sei verstanden:

$$m(\beta : n) \quad \text{oder} \quad m\left(\frac{1}{n}\beta\right)$$

Das Symbol $\frac{m}{n}$ nennen wir **einen arithmetischen Bruch** und stellen wir häufig durch ein einziges Symbol x dar.

Nennt man den Vector $\frac{m}{n}\beta$ noch γ, so ist einleuchtend, dass die beiden Vectoren β und γ die nämliche Richtung haben. Man pflegt weiter zu sagen, der Bruch $\frac{m}{n}$ sei das **Verhältniss der Längen** der Vectoren β und γ.

Im allgemeinen kann, wenn α, β zwei Vectoren derselben Richtung bedeuten, jede dieser Grössen mit Hülfe der anderen dargestellt werden z. B.

$$\beta = x\alpha$$

wo x eine arithmetische Zahl ist, welche das Verhältniss der Längen der Vectoren α, β bedeutet. Dieselbe zu ermitteln trage man α auf β so oft als möglich ab; auf den übrig bleibenden Vector wird $\frac{1}{10}\alpha$ so viele Male abgetragen, wie nur möglich, u. s. w. Es erscheint x durch dieses Verfahren in einer Gestalt, welche ein **Decimalbruch** genannt wird.

Anstatt $x(x\alpha)$ wird kürzer geschrieben $xx\alpha$ oder $x^2\alpha$. Es ist dies das Symbol eines Vectors, welcher mit α der Richtung nach zusammenfällt, so dass man setzen kann

$$x^2\alpha = y\alpha$$

Man pflegt zu sagen die so erhaltene Zahl y sei die **zweite Potenz** der Zahl x und umgekehrt x sei die **Quadratwurzel** aus y; in Zeichen

$$x = \sqrt{y}$$

Somit ist identisch

$$\sqrt{y}\sqrt{y}\alpha = y\alpha \tag{1}$$

Alle in dieser Weise erhaltenen Zahlen können nach dem Vorgehenden als Operatoren betrachtet werden, indem dieselben einem Vector vorgesetzt, dessen Länge ändern, während die Richtung des Vectors ungeändert bleibt.

4. Unter $-\alpha$ wird ein Vector verstanden, welcher dem Vector α an Grösse gleich, an Richtung jedoch entgegengesetzt ist.

Wenn mit x wieder eine arithmetische Zahl bezeichnet wird, so pflegt man anstatt $-(x\alpha)$ einfacher zu schreiben: $-x\alpha$. Man pflegt in diesem Falle zu sagen, das Symbol $-x$ operire an dem

Vector α und nennt das ganze Operationssymbol $-x$ **eine negative algebraische Zahl.**

Oefters wird dasselbe mit einem einzigen Symbol, wie y, bezeichnet.

Eine negative algebraische Zahl ist somit ein Operator, welcher die Länge des Vectors vergrössert oder verringert, und die Richtung desselben umkehrt. Die nachstehende Gleichung ist nach dem Vorgehenden eine identische:

$$(-x)\alpha = -(x\alpha)$$

Die zweimalige nach einander stattfindende Anwendung des Symbols $-x$ an einen Vector muss die Richtung des Vectors ungeändert lassen, eine Tatsache, welche durch die nachstehende Gleichung dargestellt wird

$$(-x)(-x)\alpha = (-x)^2\alpha = x^2\alpha$$

Wenn wieder $x^2\alpha$ durch $y\alpha$ ersetzt wird, so kann hiernach auch $-x$ als die Quadratwurzel der Zahl y betrachtet werden. Das Operationssymbol $\sqrt{y}$ ist somit ein zweideutiges.

Es drängt sich jetzt die Frage an uns auf, ob ein Operator möglich ist, dessen zweimalige Anwendung auf einen Vector die Richtung des Vectors umkehrt. Weil anstatt $-\alpha$ auch -1α geschrieben werden kann, so wollen wir für ein solches Operationssymbol analog dem Vorhergehenden die Bezeichnung $\sqrt{-1}$ wählen, weil sodann die Gleichung (1) auch bei dieser neuen Grösse gültig bleibt. Dieselbe lautet in diesem Falle

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\,\alpha = -1\alpha = -\alpha \qquad (2)$$

$\sqrt{-1}$ wird wieder die Quadratwurzel der Zahl -1 genannt. Es ist jedoch dieser Quadratwurzel der Namen **einer imaginären algebraischen Zahl** beigelegt.

5. Wenn man die Definition eines Quaternions beachtet, welchen wir im Art. 1. festsetzten, so wird klar sein, dass eine arithmetische Zahl und eine negative algebraische Zahl als Quaternionen betrachtet werden können. Die erstere dieser Zahlen nämlich ist ein Quaternion, dessen Drehungswinkel verschwindet, die zweite ein solcher, dessen Drehungswinkel dem Bogen π gleich kommt.

Die Ebene, in welcher der Quaternion -1 wirksam ist, bleibt unbestimmt. Jede durch den ursprünglichen Vector gehende Ebene kann als eine solche betrachtet werden, und keine einzige aller dieser

Ebenen hat irgend einen Vorzug über die anderen. Es sind alle die Ebenen zur Vermittlung der Drehung gleichberechtigt.

Am natürlichsten wäre daher die durch das Symbol -1 an dem Vector α vollzogene Operation folgendermaassen zu betrachten:

Man denke sich den Vector α in unzählige dem ursprünglichen Vector an Länge und Richtung gleiche Vectoren gespalten und je einen der so erhaltenen Vectoren in einer durch α gehenden Ebene um einen Winkel, dessen Bogen π beträgt, gedreht. Nach der Drehung in diesen verschiedenen Ebenen fallen die durch die Spaltung erhaltenen Vectoren wieder zusammen und vereinigen sich zum Vector $-\alpha$.

6. In analoger Weise wollen wir nunmehr auch die Wirkung der imaginären Zahl $\sqrt{-1}$ auf einen Vector α deuten.

Weil die zweimalige Anwendung dieses Symbols den Vector reversiren muss, so erhellt, dass, wenn man $\sqrt{-1}$ als Quaternion betrachten will, der Drehungswinkel desselben $\frac{\pi}{2}$ betragen muss. Die Ebene der Drehung bleibt aber wieder unbestimmt. Wenden wir daher wie zuvor das Spaltungsverfahren an, so ersehen wir, dass aus dem Vector α durch Anwendung des Symbols $\sqrt{-1}$ ein Strahlencomplex entsteht, nämlich die sämtlichen Radien eines Kreises, dessen Ebene in dem Anfangspunkte des Vectors α senkrecht zu demselben steht, während die Länge dieser Radien der Länge des Vectors α gleich kommt.

Sehen wir zu, ob wir durch diese Deutung der Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ auf den Vector α mit der Gleichung (2) im Einklange geblieben sind. Wenden wir dazu auf den Strahlencomplex oder vielmehr auf jeden der Strahlen des Complexes auf's neue die Operation $\sqrt{-1}$ an. Es sei in der Figur 1

$$OA = \alpha$$

OA_1 ein willkürlicher Strahl des erhaltenen Gebildes. Lässt man auf denselben den Operator $\sqrt{-1}$ wirken, so entsteht dadurch ein neues circulares Strahlengebilde in einer zu OA_1 in dem Punkte O senkrechten Ebene. Weil aber $OA_1 \perp OA$, so wird dieser aus OA_1 erhaltene Strahlencomplex auch den Vector OA und dessen negativen enthalten. Dasselbe wird aber von den sämtlichen zu den verschiedenen Radien OA_1 construirten circularen Strahlengebilden gelten.

Nun pflegt man bekanntlich in der Geometrie bei der Erzeugung der Curven durch die Bewegung einer Geraden einen Punkt als das Erzeugniss sämtlicher sich in demselben durchschneidenden Geraden zu betrachten. In analoger Weise muss deshalb der Vector OA und dessen negativer als das Erzeugniss sämtlicher zu den Radien OA_1 construirten circularen Strahlencomplexe betrachtet werden.

Die zweimalige Anwendung des Symbols $\sqrt{-1}$ ergibt somit nach unserer Deutung die Gleichung:

$$\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}\,\alpha = \alpha \quad \text{und} \quad = -\alpha \tag{3}$$

Diese Deutung erscheint daher mit der Gleichung (2) nicht im Widerspruche, und es erübrigt nur noch die Ursache der Zweideutigkeit der zweiten Seite der Gleichung (3) zu finden.

Lässt man in der angegebenen Weise das Symbol $\sqrt{-1}$ auf den Vector $-\alpha$ operiren, so ist leicht ersichtlich, dass das hiedurch erhaltene Strahlengebilde mit dem Gebilde $\sqrt{-1}\,\alpha$ identisch ist. Die nachherige Anwendung des Operators $\sqrt{-1}$ auf den Strahlencomplex $\sqrt{-1}\,\alpha$ muss somit ein Erzeugniss ergeben, welches auch das Gebilde

$$\sqrt{-1}\,\{\sqrt{-1}\,(-\alpha)\}$$

enthält, und dieses Letztere müsste nach der vorangestellten Definition des Symbols $\sqrt{-1}$ der Vector α sein.

7. Als eine weitere Definition wollen wir festsetzen, dass die Gleichungen

$$x(\sqrt{-1}\,\alpha) = x\sqrt{-1}\,\alpha = \sqrt{-1}\,(x\alpha) = \sqrt{-1}\,x\,\alpha \tag{4}$$

wo mit x eine willkürliche arithmetische oder negative Zahl bezeichnet wird, identische sind.

Es geht hieraus hervor, dass das Symbol $x\sqrt{-1}$ oder $\sqrt{-1}\,x$ auf einen Vector operirend, denselben zu einem circularen Strahlengebilde spaltet, dessen Ebene senkrecht zu α ist, während die Länge der Radien das x-fache der Länge des Vectors α beträgt.

Wir schlagen vor, einen derartigen circularen Strahlencomplex kurz einen Circularvector zu nennen. Die Längen der Radien wollen wir bisweilen als Tensor des Circularvectors bezeichnen.

8. Es ist nun leicht einen Ausdruck der Form

$$\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$$

zu deuten.

Zu diesem Zwecke sei die Figur 2 gezeichnet, in welcher die beiden Vectoren α, β durch OA, AB bzhw. dargestellt werden.

In dem Punkte A denken wir den Circularvector $\sqrt{-1}\,\beta$ construirt.

Unter $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ sei sodann verstanden der Complex der Strahlen, welche man erhält, wenn man zu OA einen jeden der Radien AP des Circularvectors addirt.

Dieses Strahlengebilde ist die Seitenfläche eines schiefen kreisförmigen Kegels, dessen Scheitel in O liegt, während seine Grundfläche von dem Circularvector gebildet wird.

Ich schlage für einen solchen konischen Strahlencomplex den Namen „konischer Vector“ vor. O können wir den Scheitel, α die Schwerlinie, β die Achse der Grundfläche des konischen Vectors nennen.

Weil $\sqrt{-1}\,\beta$ und $-\sqrt{-1}\,\beta$ nach den vorhergehenden Artikeln identische Gebilde sind, so ergibt sich, dass auch die beiden konischen Vectoren $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$, $\alpha - \sqrt{-1}\,\beta$ identisch sein müssen.

Wenn insbesondere

$$\beta = x\alpha$$

wo x eine arithmetische oder negative Zahl ist, so ist der konische Vector $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ oder $(1 + x\sqrt{-1})\,\alpha$ ein rechter, weil sodann die Ebene des Circularvectors $\sqrt{-1}\,x\alpha$ senkrecht zur Mittellinie α ist.

Schliesslich wollen wir noch die Summe und die Differenz zweier konischen Vectoren $\alpha + \sqrt{-1}.\ \alpha_1 + \sqrt{-1}\,\beta_1$ durch die nachstehende Gleichung definiren

$$(\alpha + \sqrt{-1}\beta) \pm (\alpha_1 + \sqrt{-1}\,\beta_1) = (\alpha \pm \alpha_1) + \sqrt{-1}\,(\beta \pm \beta_1) \tag{5}$$

9. Wir hätten auch einen ganz anderen Ausgangspunkt wählen können, um zu jener Deutung der Wirkung der imaginären Zahl $\sqrt{-1}$ auf einen Vector zu gelangen.

Bekanntlich stellt das System der Gleichungen

$$T\frac{\varrho - \alpha}{\beta} = 1, \qquad S\,\frac{\varrho - \alpha}{\beta} = 0 \tag{6}$$

einen Kreis dar, wenn ϱ ein variabler, α, β constante Vectoren sind.

Es ist dies nämlich der Durchschnitt einer Kugel mit dem Radius $T\beta$ um den Endpunkt des Vectors α als Mittelpunkt beschrieben mit einer in eben diesem Endpunkte senkrecht zu β angebrachten Ebene.

Der symbolischen Gleichung

$$T^2 = S^2 - V^2$$

zufolge, kann aus den Relationen (6) geschlossen werden

$$\left(V\frac{\varrho-\alpha}{\beta}\right)^2 = -1, \quad \text{somit} \quad \frac{\varrho-\alpha}{\beta} = \sqrt{-1} \tag{7}$$

oder

$$\varrho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta \tag{8}$$

In dieser Gleichung und der vorhergehenden bezieht sich ϱ auf jeden Punkt des Kreisumfanges. Aus der Gleichung (7) schliessen wir daher, dass auch das Symbol $\sqrt{-1}$ auf jeden Punkt des Kreises Rücksicht nimmt; wir geraten hiedurch zu derselben Deutung des Ausdrucks $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$, wie in den vorhergehenden Artikeln angegeben.

10. Die spaltende Wirkung des Symbols $\sqrt{-1}$ mag anfangs befremdend erscheinen, schon Hamilton hat etwas derartiges teilweise erkannt. In seinen „Elements“ findet sich nämlich der Satz, dass die Gleichung

$$\varrho = \sqrt{-1} \tag{9}$$

die Einheitskugel darstelle, indem der Vector eines jeden Punktes einer solchen Kugel dieser Gleichung genüge leistet. Denn die Quadrirung ergibt

$$\varrho^2 = -1 \quad \text{oder} \quad T\varrho = 1$$

11. Auf diese Weise kommen wir nun auch zu der schon von Hamilton ausgesprochenen Ansicht, es seien zwei verschiedene Symbole $\sqrt{-1}$ zu unterscheiden.

Es kann nämlich darunter ein einziger bestimmter rechter Versor verstanden werden und in diesem Falle kommt jenem Symbole wirklich ein Vectorcharakter zu. Dies findet z. B. statt, wenn wir die Gleichung (7) auf jeden Punkt des Kreisumfanges, durch das System der Gleichungen (6) dargestellt, getrennt anwenden. Unter dieser Voraussetzung ist denn auch, wie sich aus dem Begriffe unmittelbar ergibt,

$$S\sqrt{-1} = 0, \quad V.\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

Wenn jedoch unter $\sqrt{-1}$ die Gesamtheit der in allen verschiedenen Ebenen wirksam gedachten reehten Versoren verstanden wird, d. h. wenn die Gleichung (7) auf die Gesamtheit der Punkte des Kreises angewandt wird, so kommt dem Symbole $\sqrt{-1}$ Scalarcharakter zu, wie wir noch kurz begründen wollen.

Wir geraten dadurch zugleich zu einer strengen Theorie der Hamilton'schen Biquaternionen.

12. Die Gesamtheit der Operationen, durch welche ein Vector γ in einen konischen Vector $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ übergeführt wird, wollen wir mit

$$\frac{\alpha+\sqrt{-1}\,\beta}{\gamma} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{\gamma}+\sqrt{-1}\,\frac{\beta}{\gamma}$$

bezeichnen und einen konisch spaltenden Quaternion nennen.

Setzt man statt der Symbole $\alpha : \gamma$, $\beta : \gamma$ die anderen q, q', so ersehen wir hieraus, dass dieser neu eingeführte Quaternion mit dem von Hamilton gefundenen Biquaternion identisch ist.

Die wichtigen Grössen, welche mit den Zeichen K, S, V, T, U bezeichnet werden, bedürfen einer neuen Definition, weil die bei den gewöhnlichen Quaternionen geltenden in diesem Falle einen Sinn nicht mehr haben.

Auch die Summe, die Differenz und das Product zweier konisch spaltenden Quaternionen müssen auf's neue definirt werden.

Wir verwenden hiezu die nachstehenden Gleichungen:

$$(q+\sqrt{-1}\,q') \pm (q_1+\sqrt{-1}\,q_1') = q \pm q_1 + \sqrt{-1}(q' \pm q_1') \tag{10}$$

$$(q+\sqrt{-1}\,q')(q_1+\sqrt{-1}\,q_1') = qq_1 - q'q_1' + \sqrt{-1}(q'q_1 + qq_1') \tag{11}$$

Weiter setzen wir

$$K(q+\sqrt{-1}\,q') = Kq + \sqrt{-1}\,Kq' \tag{12}$$

$$S = \tfrac{1}{2}(1+K) \tag{13}$$

$$V = \tfrac{1}{2}(1-K) \tag{14}$$

Die Anwendung der Gleichung (10) bei den letzteren beiden Gleichungen ergibt sodann die weiteren

$$S(q+\sqrt{-1}\,q') = Sq + \sqrt{-1}\,Sq' \tag{15}$$

$$V(q+\sqrt{-1}\,q') = Vq + \sqrt{-1}\,Vq' \tag{16}$$

und hiedurch wird die Behauptung des vorigen Artikels bestätigt, dass dem Symbole $\sqrt{-1}$, wenn dasselbe als spaltender Coefficient auftritt, Scalarcharakter zukommt, weil in diesem Falle

$$S\sqrt{-1} = \sqrt{-1}, \quad V.\sqrt{-1} = 1 \text{ ist.}$$

Den Tensor weiter zu definiren, benutzen wir die Gleichungen

$$N(q+\sqrt{-1}\,q') = (q+\sqrt{-1}\,q')\,K(q+\sqrt{-1}\,q')$$

und

$$N(q+\sqrt{-1}\,q') = T(q+\sqrt{-1}\,q')^2 \tag{17}$$

welche in Verbindung mit (11) auch zur nachstehenden Anlass geben:

$$N(q+\sqrt{-1}\,q') = Nq - Nq' + 2\sqrt{-1}\,S.\,qKq' \tag{18}$$

Schliesslich sei noch gesetzt

$$U(q+\sqrt{-1}\,q') = \frac{q+\sqrt{-1}\,q'}{T(q+\sqrt{-1}\,q')} \tag{19}$$

Durch die hier benutzten Definitionen werden die Grundformeln der Rechnung mit gewöhnlichen Quaternionen aufrecht erhalten.

13. Man pflegt zu sagen, die Gleichung

$$\varrho = \alpha$$

stelle den Endpunkt des Vectors α dar. Wenn

$$\varrho = x\alpha \tag{20}$$

wo x irgend eine arithmetische oder negative Zahl ist, so sagt man in ähnlicher Weise, diese Gleichung stelle irgend einen Punkt des Vectors α oder dessen Verlängerungen nach beiden Seiten dar. Kürzer wird bekanntlich diese Aussage folgendermassen wiedergegeben:

Die Gleichung (20) stellt bei variablem x die nach beiden Seiten in's Unendliche sich erstreckende Gerade OA dar, wenn

$$\alpha = OA$$

Diese Ausdrucksart wollen wir nun dadurch verallgemeinern, dass wir sagen: für complexe Werte $x_1 + x_2\sqrt{-1}$ des Scalars x gibt die Gleichung (20) die imaginären Punkte der Geraden OA zu er-

kennen. Erteilen wir den Grössen x_1, x_2 specielle Werte, so erhalten wir einen einzigen imaginären Punkt. Der Ausdruck $\varrho=(x_1+x_2\sqrt{-1})\alpha$ gehört aber einem konischen Vector an. In Uebereinstimmung mit der obigen Ausdrucksweise ist es, wenn wir sagen: Ein imaginärer Punkt ist demnach die Gesamtheit der Punkte des Kreisumfanges, welcher die Grundfläche des konischen Vectors

$$(x_1+x_2\sqrt{-1})\alpha$$

bildet.

Wenden wir dieselbe Ausdrucksart auch bei der allgemeineren Gleichung einer Geraden

$$\varrho=\alpha+x\beta \tag{21}$$

an, so erhalten wir das wichtige Ergebniss: Einer Geraden im Raume gehören ausser der unendlichen Zahl reeller Punkte, welche durch reelle Werte der Grösse x in der Gleichung (21) dargestellt werden, noch eine unendliche Zahl imaginärer Punkte an, die mit den complexen Werten des Scalars x in (21) übereinstimmen.

„Als ein imaginärer Punkt einer Geraden ist sodann zu be-„trachten ein Kreis, dessen Ebene senkrecht zu jener Geraden steht, „und dessen Mittelpunkt in derselben enthalten ist; der Radius dieses „Kreises kann beliebig gewählt werden". Der imaginäre Punkt ist nämlich der Kreisumfang der Grundfläche des konischen Vectors

$$\alpha+(x_1+x_2\sqrt{-1})\beta$$

dessen Mittelpunkt den Vector $\alpha+x_1\beta$ hat, während der Radius $x_2T\beta$ beträgt. Wir wollen im weiteren diese Grössen auch den Mittelpunkt und den Radius des imaginären Punktes nennen. Siehe Art. 14. am Schlusse.

14. Ziehen wir nunmehr die imaginären Punkte einer Ebene

$$\varrho=x\alpha+y\beta+z\gamma \tag{22}$$

wenn

$$x+y+z=1 \tag{23}$$

in Betracht. Wenn x, y, z von der Form

$$x_1+x_2\sqrt{-1},\quad y_1+y_2\sqrt{-1},\quad z_1+z_2\sqrt{-1}$$

sein sollen, so muss der Gleichung (23) zufolge

$$x_1+y_1+z_1=1 \quad\text{und}\quad x_2+y_2+z_2=0 \tag{24}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus, dass die Mittelpunkte der imaginären Punkte der Ebene in derselben liegen müssen. Weil

$$x_1\alpha+y_1\beta+z_1\gamma+\sqrt{-1}(x_2\alpha+y_2\beta+z_2\gamma)$$

der Ausdruck für einen solchen imaginären Punkt ist, so ist die

Ebene desselben senkrecht zum Vector $x_2\alpha+y_2\beta+z_2\gamma$, welcher der zweiten der Gleichungen (24) zufolge in der durch die Endpunkte der Vectoren α, β, γ gelegten Ebene — d. h. in der gegebenen Ebene — enthalten ist.

Die Ebenen der sämtlichen imaginären Punkte enthalten daher die Normale zur gegebenen Ebene; der Radius dieser Punkte kann aber willkürlich gewählt werden.

„Als imaginäre Punkte einer Ebene sind somit zu betrachten, „Kreise mit beliebigem Radius um die Punkte der Ebene in den „verschiedenen zu derselben senkrecht stehenden Ebenen beschrieben".

15. Betrachten wir weiter die Vectorgleichung eines Kreises

$$\varrho = x\alpha+y\beta, \quad \text{wenn} \quad x^2+y^2 = a^2 \tag{25}$$

wo α, β zwei unter sich rechtwinklige Einheitslinien sind, während x, y variable Scalare, und a eine constante Scalargrösse sind.

Für reelle Werte von x, y ergibt die erste der Gleichungen (25) die reellen Punkte des Kreises, für complexe Werte wieder die imaginären Punkte. Es sei

$$x = x_1+x_2\sqrt{-1}, \quad y = y_1+y_2\sqrt{-1}$$

ein Wertsystem, welches der Gleichung

$$x^2+y^2 = a^2$$

Genüge leistet Dies erfordert, dass

$$x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2 = a^2, \quad x_1x_2+y_1y_2 = 0 \tag{26}$$

Der imaginäre Punkt

$$\varrho = x_1\alpha+y_1\beta+\sqrt{-1}\,(x_2\alpha+y_2\beta)$$

ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt den Vector $x_1\alpha+y_1\beta$ hat, während seine Ebene senkrecht zum Vector $x_2\alpha+y_2\beta$ ist. Diese beiden Vectoren sind aber nach der zweiten der Gleichungen (26) rechtwinklig zu einander. Die Ebene des imaginären Punktes muss somit den Mittelpunktsvector desselben enthalten, welcher letztere übrigens willkürlich in der Ebene des Kreises (25) gewählt werden kann.

Die erstere der Gleichungen (26) gibt weiter zu erkennen, dass

$$x_1^2+y_1^2 > a^2$$

dass somit der Mittelpunkt P des imaginären Punktes ausserhalb des Kreises liegen muss und weiter, dass die Länge des Radius des

imaginären Punktes der Länge der Tangente gleichkommt, welche man aus P an den gegebenen Kreis legen kann.

Wir sind daher zum nachstehenden Ergebniss angelangt:

„Ausser den reellen Punkten gehören einem Kreise eine unend-„liche Zahl imaginärer Punkte an. Es sind dieselben Kreise, deren „Mittelpunkte willkürlich in der Ebene des gegebenen Kreises, doch „ausserhalb des Umfanges der Curve gewählt werden können, deren „Ebenen den Mittelpunktsvector enthalten und senkrecht zur Ebene „des gegebenen Kreises stehen, während der Radius des imaginären „Punktes der Tangente gleichkommt, aus dessen Mittelpunkt an den „gegebenen Kreis gelegt".

Betrachtet man die Gleichung der Kugel

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{27}$$

so gerät man zu einem ähnlichen Satze.

„Die Mittelpunkte der imaginären Punkte einer Kugel liegen „willkürlich im Raume ausserhalb der Kugel verteilt. Die Ebenen „der imaginären Punkte enthalten die Mittelpunktsvectoren derselben, „und der Radius eines imaginären Punktes kommt der Länge der „Tangente gleich, aus dessen Mittelpunkt an die gegebene Kugel „gelegt".

Es folgt hieraus noch, dass die imaginären Punkte einer Kugel dieselbe rechtwinklig durchschneiden.

16. Als eine Anwendung dieser Begriffe nehmen wir die Bestimmung der Schnittpunkte einer Kugel

$$T\varrho = T\gamma \tag{28}$$

mit der Geraden

$$\varrho = \alpha + x\beta \tag{29}$$

Für diese Schnittpunkte ist

$$T(\alpha + x\beta) = T\gamma$$

oder

$$N\alpha + x^2 N\beta - 2x S\alpha\beta = N\gamma$$

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, können wir annehmen, β sei ein Einheitsvector; die vorige Gleichung vereinfacht sich dadurch zur nachstehenden

$$x^2 - 2x S\alpha\beta + N\alpha - N\gamma = 0 \tag{30}$$

aus welcher sich für x zwei Werte ergeben

$$x = S\alpha\beta \pm \sqrt{[(S\alpha\beta)^2 - N\alpha + N\gamma]} \tag{31}$$

Es sind somit der Kugel und der Geraden zwei Punkte gemeinsam, welche durch (29) in Verbindung mit (31) bestimmt werden. Diese Punkte sind reell, wenn die gegebenen Vectoren α, β, γ der Bedingung

$$(S\alpha\beta)^2 + N\gamma \geqq N\alpha$$

genüge leisten. Anstatt derselben kann geschrieben werden

$$N\gamma \geqq N\alpha\left(1 - \text{Cos}^2 \text{ Wkl. } \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

oder

$$T\gamma \geqq T\alpha \text{ Sin Wkl. } \frac{\alpha}{\beta}$$

Die beiden Schnittpunkte sind somit reell, so lange der Radius der Kugel nicht kleiner wird als das Lot aus dem Kugelmittelpunkte auf die gegebene Gerade gefällt. Wird dieser Bedingung nicht genügt, so erhalten wir zwei imaginäre gemeinsame Punkte

$$\varrho = \alpha + \beta S\alpha\beta \pm \sqrt{-1}\sqrt{N\alpha - N\gamma - (S\alpha\beta)^2}\,\beta \tag{32}$$

In der Tat lässt sich leicht nachweisen, dass diese imaginären Punkte nach dem in den beiden vorigen Artikeln Erörterten nicht nur der Geraden (29), sondern auch der Kugel (28) angehören.

Der Mittelpunktsvector dieses imaginären Punktes ist nämlich

$$\varrho_1 = \alpha + \beta S\alpha\beta$$

und die Ebene des Punktes ist senkrecht zum Vector β. Nun ist aber

$$S.\beta\varrho_1 = S(\beta\alpha + \beta^2 S\alpha\beta) = 0, \quad \text{weil} \quad \beta^2 = -1$$

somit ist ϱ_1 senkr. auf β; die Ebene des Punktes enthält daher den Mittelpunktsvector wie erforderlich war.

Es sei O der Kugelmittelpunkt,

$$OA = \alpha, \quad AB = \beta$$

so ist

$$\varrho_1 = \alpha + \beta T\alpha \text{Cos}\left(\pi - \text{Wkl. } \frac{\alpha}{\beta}\right) = \alpha + \beta T\alpha \text{ Cos Wkl. } OAB$$

Wird aus O ein Lot auf AB gefällt, dessen Fusspunkt B_1 ist, so ist

$$T.AB_1 = T\alpha \text{ Cos Wkl. } OAB$$

somit ist

$$\varrho_1 = \alpha + \beta T.AB_1 = OB_1$$

Die Mittelpunkte der beiden imaginären Schnittpunkte falle daher mit dem Fusspunkte des Lotes, aus dem Kugelmittelpunkt auf die gegebene Gerade gefällt, zusammen.

Das Quadrat des Radius des imaginären Punktes ist nach (29

$$N\alpha - N\gamma - (S\alpha\beta)^2$$

oder

$$N\alpha \operatorname{Sin}^2 \text{Wkl.} \frac{\alpha}{\beta} - N\gamma$$

Diese Grösse ist aber, wie leicht ersichtlich, dem Quadrat de Tangente gleich, welche aus dem Fusspunkte B_1 an die Kugel ge legt wird. Es ist dieses Resultat mit dem vorhergehenden Artike in Uebereinstimmung; die imaginären Punkte (31) gehören dahe der gegebenen Kugel an. Dass dieselben weiter auch der Gerade (29) angehören, folgt unmittelbar daraus, dass die Gleichung (32 aus (29) durch die Substitution in (31) ausgesprochen, entstanden ist

Wir wollen nun die Betrachtungen des vorigen Artikels weite verfolgen.

17. Die Lage der imaginären Punkte einer willkürlichen Oberfläche kann folgendermassen ermittelt werden.

Es seien α, β, γ drei zu je zwei unter sich rechtwinklige Einheitsvectoren, x, y, z drei Scalare. Die beliebige Oberfläche kann sodann durch das System der beiden Gleichungen

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma \tag{33}$$

$$f(x, y, z) = 0 \tag{34}$$

wo f ein Functionszeichen ist, dargestellt gedacht werden.

Setzen wir nun weiter voraus, die Werte

$$x = x_1 + x_2\sqrt{-1}, \quad y = y_1 + y_2\sqrt{-1}, \quad z = z_1 + z_2\sqrt{-1}$$

genügen der Relation (26), so erhalten wir hiedurch die beiden symbolischen Gleichungen

$$f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{1.2}\left(x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^4 + \ldots = 0 \tag{35}$$

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

$$- \frac{1}{1.2.3}\left(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^3 + \ldots = 0 \qquad (36)$$

wenn die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung für die Function f angenommen wird.

Betrachtet man den Mittelpunkt des Vectors, d. h. x_1, y_1, z_1 als willkürlich gegeben, so wird durch die Gleichungen (35) (36) eine Raumcurve dargestellt, welche die Eigenschaft besitzt, dass der Vector eines jeden Punktes derselben eine Normale zur Ebene des imaginären Punktes sein kann, während der Tensor dieses Vectors zugleich dem Radius des imaginären Punktes gleich kommt. Denken wir daher einen Kegel construirt, dessen Scheitel in den Anfangspunkt der Vectoren fällt, während die durch (35) (36) dargestellte Curve die Directrix ist, so werden die Abschnitte der Seitenlinien dieses Kegels zwischen dem Scheitel und der Directrix nach Richtung und Länge die zum gewählten Punkte x_1, y_1, z_1 zugehörigen imaginären Punkte bestimmen.

Ist die gegebene Oberfläche eine solche $n$ter Ordnung, so ist allgemein die Curve (35) (36) $n(n-1)$ter Ordnung, und es ist leicht die Gleichung des hiezu gehörigen Kegels aufzustellen.

18. Den einfacheren Fall, wo die beliebige Oberfläche eine solche zweiten Grades mit einem Mittelpunkte ist, wollen wir näher betrachten. Die Gleichung (34) sei für diesen Fall

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{00} = 0 \qquad (37)$$

Es gehen sodann die Gleichungen (35) (36) über in die nachstehenden

$$a_{11} x_2^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} z_2^2 = f(x_1, y_1, z_1) \qquad (38)$$

$$a_{11} x_1 x_2 + a_{22} y_1 y_2 + a_{33} z_1 z_2 = 0 \qquad (39)$$

Die zweite dieser Relationen spricht aus, dass der Punkt x_2, y_2, z_2 in der zur Richtung des nach dem Punkte x_1, y_1, z_1 gehenden Diameters conjugirten Diametralebene liegt.

Die Gleichung (38) ist diejenige einer Oberfläche zweiten Grades, welche denselben Mittelpunkt und dieselben Achsenrichtungen hat wie die gegebene Oberfläche; ausserdem ist sie aber der letzteren ähnlich, und das Aehnlichkeitsverhältniss beträgt

$$\sqrt{-\frac{f(x_1, y_1, z_1)}{a_{00}}}$$

Dieser Ausdruck ist aber bekanntlich dem Verhältnisse irgend einer aus dem Punkte x_1, y_1, z_1 an die Oberfläche gelegten Tangente zur Hälfte des dieser Tangente parallelen Durchmessers gleich; derselbe ist somit leicht zu construiren, und sei im weiteren mit $t:m$ bezeichnet.

Der Kegel des vorigen Artikels ist daher für diesen Fall in einen Diametralschnitt einer der gegebenen Oberfläche ähnlichen und parallel gedachten Oberfläche übergegangen und die Vectoren der Punkte dieses Diametralschnittes bestimmen die sämtlichen zur Oberfläche gehörigen imaginären Punkte, deren Mittelpunkt den Vector $x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma$ hat. Errichtet man das Lot zu der in Betracht kommenden Diametralebene, so ist dasselbe in den Ebenen aller jener imaginären Punkte enthalten.

Wir geraten daher zur nachstehenden Construction der imaginären Punkte:

Man wähle den Mittelpunkt eines derselben willkürlich z. B. in A, ziehe OA und construire die zu OA conjugirte Diametralebene. Für A werde weiter das Verhältniss $t:m$ bestimmt, und jeder Durchmesser jener Diametralebene in diesem Verhältnisse verlängert; jeder so erhaltene Vector ist senkrecht zur Ebene eines imaginären Punktes, dessen Radius der Länge dieses Vectors gleich kommt.

Die Wahl des Punktes A ist zwar willkürlich, jedoch meistens einer Bedingung unterworfen; nehmen wir als Beispiel das Ellipsoid, so sind in (37) a_{11}, a_{22}, a_{33} positiv, a_{00} negativ zu rechnen. Es ist deshalb nach (35)

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 > a_{11}x_2^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}z_2^2$$

somit muss der Punkt A ausserhalb des Ellipsoids liegen.

19. Um die zu einer Curve gehörenden imaginären Punkte zu finden, setzen wir

$$\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma \tag{40}$$

$$f(x,\ y,\ z) = 0, \quad \varphi(x,\ y,\ z) = 0 \tag{41}$$

und es seien

$$x = x_1 + x_2\sqrt{-1}, \quad y = y_1 + y_2\sqrt{-1}, \quad z = z_1 + z_2\sqrt{-1}$$

Werte, die diesen Gleichungen genügen. Es erfolgen hieraus ausser den Gleichungen (35) (36) noch zwei andere, welche aus jenen hervorgehen, wenn darin die Function f durch φ ersetzt wird.

Wir erhalten daher vier Gleichungen, denen die sechs Grössen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 Genüge leisten müssen. Indem zwischen den-

selben x_2, y_2, z_2 eliminirt werden, entsteht eine Gleichung in x_1, y_1, z_1. Es ist dies die Gleichung der Oberfläche, welche von den Mittelpunkten der der Curve angehörigen imaginären Punkte gebildet wird.

Einen Fall wollen wir näher betrachten, den nämlich, wo die gegebene Curve eine ebene ist. $\varphi(x, y, z)$ ist sodann linear, und die beiden aus dieser Function hergeleiteten Gleichungen werden

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \tag{42}$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0 \tag{43}$$

Die Oberfläche der Mittelpunkte der imaginären Punkte ist in diesem Falle die Ebene der Curve, wie die Gleichung (42) aussagt. Die Gleichung (43) aber spricht weiter aus, dass der Vector, zu welchem die Ebene eines imaginären Punktes senkrecht ist, parallel der Ebene der Curve ist.

Die sämtlichen Ebenen der imaginären Punkte sind daher senkrecht zur Ebene der gegebenen Curve. Aus den Gleichungen (35) (36) (43) findet man weiter die Länge des Radius des imaginären Punktes.

Nehmen wir specieller an, die Curve sei ein Kegelschnitt mit einem Mittelpunkte; wenn α senkr. auf β und diese beiden Vectoren Einheitslinien sind, so ist

$$f(x, y. z) = ax^2 + by^2 + c = 0, \quad \varphi(x, y, z) = z = 0$$

Die Gleichungen (35) (36) ergeben hiefür

$$ax_1^2 + by_1^2 + c = ax_2^2 + by_2^2 \tag{44}$$

$$ax_1x_2 + by_1y_2 = 0 \tag{45}$$

Wie in Art. 16. wird hieraus geschlossen, dass ein imaginärer Punkt des Kegelschnittes in nachstehender Weise construirt werden kann:

Man wähle den Mittelpunkt desselben willkürlich in A, ziehe OA und construire den zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser. Wenn man den letzteren in dem Verhältnisse verlängert, in welchem die Länge der aus A an den Kegelschnitt gehenden Tangente zur Hälfte des dieser Tangente parallelen Durchmessers steht, so ist ein Vector erhalten, welcher senkrecht zur Ebene des imaginären Punktes ist, während der Radius desselben Punktes der Länge jenes Vectors gleich kommt.

Auch hier können, wie bei den Oberflächen zweiten Grades mit einem Mittelpunkte nur die ausserhalb der Curve befindlichen Punkte als Mittelpunkte der imaginären Punkte dienen.

20. Aus den Gleichungen (35) (36), denen im allgemeinen die Grössen x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 Genüge leisten müssen, geht hervor, dass die complexen Werte

$$x_1 - x_2\sqrt{-1},\quad y_1 - y_2\sqrt{-1},\quad z_1 - z_2\sqrt{-1}$$

ebenfalls der Gleichung (33) genügen. Es kommen daher die imaginären Punkte stets parweise vor, während ein solches Par durch

$$\rho = x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma \pm \sqrt{-1}\,(x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma)$$

dargestellt wird. Dieselben sind aber identische Gebilde, wie wir vorher fanden. Jeder in den vorhergehenden Artikeln construirte einer Oberfläche angehörige Punkt muss somit stets doppelt in Rechnung gebracht werden.

21. Durch analytische Betrachtungen sind wir zur Erkennung des Begriffes der imaginären Punkte gekommen, und haben die Lage bei einigen Oberflächen erkannt.

Es wird nun aber auch möglich sein, bei rein geometrischen Betrachtungen unmittelbar durch Definition die imaginären Punkte einzuführen und dadurch dieselben auch weiter in dem Umkreise jener Betrachtungen beizubehalten.

Wir können z. B. eine gerade Linie definiren als die Figur, welche entsteht, wenn sämtliche reellen Punkte einer Ebene sich bewegen, während zwei beliebig gewählte Punkte fest gehalten werden. Die durch diese Drehung entstehenden imaginären Punkte müssen doppelt gezählt werden.

Für die anderen Curven und Oberflächen sind diese Definitionen allerdings nicht leicht auf einfache Weise aufzustellen; es is jedoch das Wesentliche derselben in den vorhergehenden Artikeln schon dargelegt.

Nachtrag.

Die im Vorhergehenden mitgeteilten Resultate wurden vom Verf. in einer Versammlung der mathematischen Gesellschaft in Amsterdam vorgetragen. Herr Prof. Korteweg hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, dass auch ohne die Zuhülfenahme der Theorie der Quaternionen eine der von mir vorgetragenen ähnliche Darstellung der imaginären Punkte erhalten werden könne. Bei der Bearbeitung stellte sich sogar heraus, dass dieser Weg zu derselben

Darstellung führt. Es sei mir gestattet, das von Prof. Korteweg angedeutete Princip hier anzuführen. Definiren wir die Distanz zweier imaginären Punkte mit den rechtwinkligen Coordinaten

$$x_1 + x_2\sqrt{-1},\quad y_1 + y_2\sqrt{-1},\quad z_1 + z_2\sqrt{-1}$$

$$x_1' + x_2'\sqrt{-1},\quad y_1' + y_2'\sqrt{-1},\quad z_1' + z_2'\sqrt{-1}$$

durch die Gleichung

$$d^2 = \{x_1 - x_1' + (x_1 - x_2')\sqrt{-1}\}^2 + \{y_1 - y_1' + (y_2 - y_2')\sqrt{-1}\}^2 + \{z_1 - z_1' + (z_2 - z_2')\sqrt{-1}\}^2$$

so sei weiter als Darstellung eines imaginären Punktes gewählt die Gesamtheit der reellen Punkte, deren Distanz vom imaginären Punkte der Null gleich kommt. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten eines solchen reellen Punktes, so ist demnach zu setzen

$$(\xi - x_1 - x_2\sqrt{-1})^2 + (\eta - y_1 - y_2\sqrt{-1})^2 + (\zeta - z_1 - z_2\sqrt{-1})^2 = 0$$

eine Gleichung, welche in die beiden nachstehenden sich spaltet

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2 + (\zeta - z_1)^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

$$x_2(\xi - x_1) + y_2(\eta - y_1) + z_2(\zeta - z_1) = 0$$

Die Punkte ξ, η, ζ erscheinen daher als der Durchschnitt einer Kugel um den Punkt x_1, y_1, z_1 als Mittelpunkt mit dem Radius

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

beschrieben mit einer durch eben denselben Punkt x_1, y_1, z_1 hindurchgehenden Ebene, welche senkrecht steht zur Geraden, die den Punkt x_2, y_2, z_2 mit dem Coordinatenanfangspunkt verbindet.

Der so erhaltene Kreis ist aber, wie man leicht nachweist, identisch mit der Grundfläche des Vectorkegels

$$\varrho = x_1\alpha + y_1\beta + z_1\gamma + \sqrt{-1}(x_2\alpha + y_2\beta + z_2\gamma)$$

wo α, β, γ drei in den Richtungen x, y, z angenommene Einheitsvectoren bedeuten.

In den letzten Monaten ist es mir auch gelungen, die oben begründete Theorie der Darstellung imaginärer Punkte zu vervollkommnen durch die Einführung eines neuen Begriffes, welcher gestattet zwei conjugirt imaginäre Punkte von einander verschieden darzustellen.

Es erscheint zu diesem Zwecke notwendig mit dem Begriff der durch $\sqrt{-1}$ hervorgerufenen Spaltung derjenige einer bestimmten Aufeinanderfolge der einzelnen durch die Spaltung entstandenen Strahlen zu verbinden. Am zweckmässigsten stellt sich die nachstehende Wahl heraus: Für den imaginären Punkt $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ sei gewählt der im Vorhergehenden eingeführte Kreis in einer solchen Richtung durchlaufen, dass dieselbe von dem Endpunkte des Vectors $\alpha + \beta$ aus gesehen mit einer bestimmt angenommenen Drehungsrichtung — z. B. mit derjenigen der Zeiger einer Uhr — übereinstimmt.

Nach dieser Annahme soll nun auch der imaginäre Punkt $\alpha - \sqrt{-1}\,\beta$ von dem Endpunkte des Vectors $\alpha - \beta$ aus betrachtet werden, wodurch erhellt, dass die beiden Kreise, welche zwei conjugirt imaginäre Punkte darstellen, in entgegengesetzter Richtung durchlaufen gedacht werden müssen.

In einer folgenden Arbeit hoffe ich weiteres hierüber mitzuteilen.

XIV.

Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können.

Von

V. Schlegel.

Im n-dimensionalen Raume lässt sich ein beliebiger Punkt x aus $(n+1)$ festen Punkten $(e_1, e_2, \ldots e_{n+1})$, welche ein Coordinatensystem bilden, mittelst der $(n+1)$ Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n+1}$ (Coordinaten) ableiten, d. h. seiner Lage nach genau bestimmen. Es bilden dann zunächst diese $n+2$ Punkte eine Gruppe, deren besondere Form durch die Verteilung der Vorzeichen $+$ und $-$ an die Grössen α definirt werden kann. Die absoluten Werte dieser Grössen kommen bei der rein topologisehen Frage nach der Anzahl und Beschaffenheit der wesentlich von einander verschiedenen Gruppen nicht in Betracht. — Aus der den Punkt x bestimmenden Gleichung kann auch jeder der Punkte e mittelst der noch übrigen $n+1$ Punkte bestimmt werden. Alle durch eine solche Transformation aus einander ableitbaren Gleichungen stellen natürlich dieselbe Gruppe dar. Wir sagen nun, dass zwei Gruppen von je $n+2$ Punkten im n-dimensionalen Raume dieselbe Form haben, wenn die Gleichungen, welche irgend einen ihrer Punkte aus den übrigen bestimmen, hinsichtlich der Anzahl der auf der rechten Seite vorkommenden positiven und negativen Vorzeichen übereinstimmen.

Im Folgenden wird zuerst die Beschaffenheit und Anzahl der aus $n+2$ Punkten im n-dimensionalen Raume gebildeten Gruppen untersucht werden. Diese Gruppen werden sodann als Specialfälle

gewisser Fundamentalgruppen dargestellt werden, von denen in jedem Raume nur eine einzige vorhanden ist. Endlich wird gezeigt werden, wie jede aus beliebig vielen Punkten in irgend welchem Raume gebildete Gruppe als specieller Fall einer solchen Fundamentalgruppe aufgefasst werden kann. Hiermit ist dann die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, welche in den Formen der Punktgruppen sich darbietet, auf gewisse, nur von der Anzahl der Punkte abhängige Grundtypen zurückgeführt.

Des bequemeren Verständnisses wegen werden der allgemeinen Untersuchung jedesmal die für die Gebiete der vier ersten Dimensionen geltenden Betrachtungen vorausgeschickt werden.

1. Gruppen von $(n+2)$ Punkten im n-dimensionalen Raume.

1. Gebiet der Geraden. — Sei ein Punkt x aus den Punkten e_1 und e_2 mittelst der Zahlen α_1 und α_2 abgeleitet, sodass

$$(1) \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

Dann sind hinsichtlich der Vorzeichen von α_1 und α_2 zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Kein Factor α negativ. Aus (1) folgt

$$\alpha_1 (x - e_1) = \alpha_2 (e_2 - x)$$

Demnach sind die Strecken $(e_2 - x)$ und $(x - e_1)$ gleichgerichtet; d. h. x liegt zwischen e_1 und e_2, oder, wie wir festsetzen, auf der positiven Seite von e_1 und auf der positiven Seite von e_2.

2) Ein Factor α negativ. (Zwei Fälle). Z. B.

$$\alpha_1 = -\alpha_1'$$

Dann ist

$$\alpha_1'(e_1 - x) = \alpha_2 (e_2 - x)$$

oder

$$\frac{e_1 - x}{e_2 - x} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1'},$$

Die Strecken $(e_1 - x)$ und $(e_2 - x)$ sind also, da ihr Quotient positiv ist, gleichgerichtet; d. h. der Punkt x liegt ausserhalb der Strecke $(e_1 - e_2)$, und zwar, da

$$\alpha_2 - \alpha_1' = 1$$

also $\alpha_2 > \alpha_1'$ sein muss, jenseit desjenigen Punktes (e_2), welcher dem Punkte mit negativem Factor (e_1) gegenüberliegt, oder, anders

ausgedrückt, auf der negativen Seite von e_2 und der positiven von e_1.

Aus (1) folgt jetzt

$$\alpha_2 e_2 = (\alpha_2 - \alpha_1') x + \alpha_1' e_1$$

Da diese Gleichung hinsichtlich der Vorzeichen der einzelnen Factoren mit (1) übereinstimmt, so folgt, dass „drei Punkte auf einer Geraden nur auf eine einzige Art eine Gruppe bilden können", wie auch die Anschauung lehrt [1]).

2. Gebiet der Ebene. — Sei ein Punkt x aus den Punkten e_1, e_2, e_3 mittelst der Zahlen α_1, α_2, α_3 abgeleitet, sodass

$$(2) \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1)$$

Dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Kein Factor negativ. Sei x_1 der Schnittpunkt der Geraden $(x e_1)$ und $(e_2 e_3)$, so ist nach (2)

$$(\alpha_2 + \alpha_3) x_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) x - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

d. h. x_1 liegt zwischen e_2 und e_3, und auf der Geraden $(x e_1)$ jenseit x. Hiernach liegt x zwischen e_1 und x_1, d. h. innerhalb des Dreiecks $(e_1 e_2 e_3)$, oder, wie wir festsetzen, auf der positiven Seite von jeder der drei Geraden $(e_1 e_2)$, $(e_2 e_3)$, $(e_3 e_1)$.

2) Ein Factor negativ, z. B.

$$\alpha_1 = -\alpha_1'$$

(Drei Fälle). Dann ist

$$(\alpha_2 + \alpha_3) x_1 = (\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1') x + \alpha_1' e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

Hiernach liegt x_1 zwischen x und e_1, folglich x auf der Geraden $(e_1 x)$ jenseit x_1, d. h. ausserhalb des Dreiecks $(e_1 e_2 e_3)$, und zwar im Nebenwinkelraum jenseit derjenigen Geraden $(e_2 e_3)$, welche dem Punkte mit negativem Factor (e_1) gegenüberliegt, oder, anders ausgedrückt, auf der negativen Seite von $(e_2 e_3)$ und auf der positiven der beiden anderen Geraden.

Da die Gleichung

$$(3) \quad x = -\alpha_1' e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

---

1) Vgl. des Verf. „System der Raumlehre" I. S. 12.

nicht auf die Form (2) reducirbar ist, so haben wir es hier mit einer von der ersten verschiedenen Punktgruppe zu tun. — Bestimmt man aus (3) einen der Punkte e_1, e_2, e_3, so bleibt die Combination der Vorzeichen auf der rechten Seite unverändert, d. h. jeder der vier Punkte hat in Bezug auf die drei übrigen die gleiche Lage.

3) Zwei Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_2 = -\alpha_2', \quad \alpha_3 = -\alpha_3'$$

(Drei Fälle). Dann ist

$$(\alpha_2' + \alpha_3')x_1 = \alpha_1 e_1 - (\alpha_1 - \alpha_2' - \alpha_3')x = \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3$$

Hiernach liegt x_1 auf der Geraden $(x e_1)$ jenseit e_1, folglich x auf der Geraden $e_1 x_1$ jenseit e_1, d. h. ausserhalb des Dreiecks $(e_1 e_2 e_3)$, und zwar im Scheitelwinkelraum jenseit desjenigen Punktes e_1, welcher der Verbindungslinie der negativen Punkte $(e_2 e_3)$ gegenüberliegt.

Da die Gleichung

$$x = \alpha_1 e_1 - \alpha_2' e_2 - \alpha_3' e_3$$

auf die Form

$$\alpha_1 e_1 = x + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3$$

gebracht werden kann, in welcher sie mit (2) übereinstimmt, so entsteht im Falle 3) keine neue Punktgruppe. — „Es können daher vier Punkte in einer Ebene nur auf zwei verschiedene Arten eine Gruppe bilden [1])".

Entweder nämlich bilden alle vier zusammen ein concaves Viereck, oder drei von ihnen bilden ein Dreieck, welches den vierten einschliesst. Ein Grenzfall ergiebt sich, wenn drei Punkte in einer Geraden liegen.

3) Gebiet des Raumes. — Sei

$$(4) \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1)$$

1) Kein Factor negativ. Sei x_1 der Schnittpunkt der Geraden $(x e_1)$ und der Ebene $(e_2 e_3 e_4)$, so ist

$$(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$$

d. h. x_1 liegt in der Fläche des Dreiecks $(e_2 e_3 e_4)$, und auf der Geraden $(x e_1)$ jenseit x. Hiernach liegt x zwischen e_1 und x_1, d. h. innerhalb des Tetraeders $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, oder auf der positiven Seite von jeder der vier Ebenen $(e_1 e_2 e_3)$, $(e_2 e_3 e_4)$, $(e_3 e_4 e_1)$, $(e_4 e_1 e_2)$.

---

1) Vgl. System der Raumlehre I. S. 71—74.

2) Ein Factor negativ, z. B.

$$\alpha_1 = -\alpha_1'$$

(Vier Fälle). Dann ist

$$(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x_1 = (\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-\alpha_1')x+\alpha_1'e_1 = \alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4$$

Hiernach liegt x_1 zwischen x und e_1, folglich x auf der Geraden (e_1x_1) jenseit x_1, d. h. ausserhalb des Tetraeders $(e_1e_2e_3e_4)$ und zwar im Nebeneckenraume [1]) jenseit derjenigen Ebene $(e_2e_3e_4)$, welche dem negativen Punkte (e_1) gegenüberliegt, oder auf der negativen Seite der Ebene $(e_2e_3e_4)$, auf der positiven der übrigen drei Ebenen.

Die Gleichung

$$(5)\qquad x = -\alpha_1'e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3+\alpha_4e_4$$

ist nicht auf die Form (4) reducirbar, und stellt daher eine neue Punktgruppe dar.

3) Zwei Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_3 = -\alpha_3', \quad \alpha_4 = -\alpha_4'$$

(Sechs Fälle). Dann ist

$$(\alpha_2-\alpha_3'-\alpha_4')x_1 = (\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3'-\alpha_4')x-\alpha_1e_1 = \alpha_2e_2-\alpha_3'e_3-\alpha_4'e_4$$

Demnach liegt x_1 in dem jenseit e_2 gelegenen Scheitelwinkelraume des Dreiecks $(e_2e_3e_4)$, und auf der Geraden (xe_1) jenseit des Punktes x. Letzterer liegt also in dem jenseit der Kante (e_1e_2) (welche der Verbindungslinie der negativen Punkte gegenüberliegt) gelegenen Nebenscheiteleckenraume.

Die Gleichung

$$x = \alpha_1e_1+\alpha_2e_2-\alpha_3'e_3-\alpha_4'e_4$$

kann auf die Form gebracht werden

$$\alpha_1e_1 = x+\alpha_3'e_3+\alpha_4'e_4-\alpha_2e_2$$

ist somit auf die Form (5) reducirt und stellt eine Punktgruppe dar von derselben Art wie diese.

Bestimmt man aus (5) den Punkt e_1, so zeigt sich, dass er zu e_2, e_3, e_4 die gleiche Lage hat wie x. Bestimmt man aber einen der

1) Die hier und im Folgenden angewendete Terminologie der dreiseitigen Ecke, welche ich zuerst in meinem „Lehrbuch der elementaren Mathematik". IV. S. 40 aufgestellt habe, erklärt sich leicht von selbst.

Punkte e_2, e_3, e_4, so hat jeder dieser Punkte zu den übrigen die im Falle 3) für x ermittelte Lage. — In der durch die Fälle 2) und 3) gleichzeitig dargestellten Gruppirung der fünf Punkte haben also zwei Punkte die Eigenschaft, dass jeder von ihnen in einem Nebeneckenraume des von den anderen gebildeten Tetraeders liegt, und drei Punkte haben die Eigenschaft, dass jeder von ihnen in einem Nebenscheiteleckenraume des von den anderen gebildeten Tetraeders liegt.

4) Drei Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_2 = -\alpha_2', \quad \alpha_3 = -\alpha_3', \quad \alpha_4 = -\alpha_4'$$

(Vier Fälle). Dann ist

$$(\alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4')x_1 = \alpha_1 e_1 - (\alpha_1 - \alpha_2' - \alpha_3' - \alpha_4')x$$
$$= \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3 + \alpha_4' e_4$$

Der Punkt x_1 liegt diesmal im Dreieck $(e_2 e_3 e_4)$, aber auf der Geraden $(x e_1)$ jenseit e_1, folglich x im Scheiteleckenraume jenseit der Ecke e_1, welche der Verbindungsebene der drei negativen Punkte (e_2, e_3, e_4) gegenüber liegt.

Da die Gleichung

$$x = \alpha_1 e_1 - \alpha_2' e_2 - \alpha_3' e_3 - \alpha_4' e_4$$

auf die Form

$$\alpha_1 e_1 = x + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3 + \alpha_4' e_4$$

gebracht werden kann, so stellt sie eine ebensolche Punktgruppe dar wie (4). „Hiernach können fünf Punkte im gewöhnlichen Raume nur auf zwei verschiedene Arten eine Gruppe bilden".

Entweder nämlich sind sie die Ecken eines aus zwei Tetraedern (1234, 5234) zusammengesetzten Hexaeders, oder vier von ihnen (1245) bilden ein Tetraeder, welches den fünften (3) umschliesst Ein Grenzfall entsteht, wenn vier Punkte in einer Ebene liegen.

4. Gebiet des vierdimensionalen Raumes. — Sei

$$(6) \quad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1)$$

1) Kein Factor negativ. Man findet analog wie oben, dass x in dem Fünfzell liegt, dessen Ecken e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 sind, und auf der positiven Seite der fünf Räume

$$(e_1 e_2 e_3 e_4), \quad (e_2 e_3 e_4 e_5), \quad (e_3 e_4 e_5 e_1), \quad (e_4 e_5 e_1 e_2), \quad (e_5 e_1 e_2 e_3)$$

2) Ein Factor negativ, z. B.

$$\alpha_1 = -\alpha_1'$$

(Fünf Fälle). Dann liegt x ausserhalb des Fünfzells $(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5)$ und zwar jenseit des Raumes $(e_2 e_3 e_4 e_5)$, welcher der Ecke mit negativem Factor (e_1) gegenüberliegt, oder auf der negativen Seite des Raumes $(e_2 e_3 e_4 e_5)$, auf der positiven der vier übrigen Räume.

Die Gleichung

$$(7) \quad x = -\alpha_1' e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5$$

ist nicht auf (6) reducirbar, und stellt daher eine neue Punktgruppe dar.

3) Zwei Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_1 = -\alpha_1', \quad \alpha_2 = -\alpha_2'$$

(Zehn Fälle). Dann liegt x wieder ausserhalb des Fünfzells, und zwar jenseit der Ebene $(e_3 e_4 e_5)$, welche der Verbindungslinie der mit negativen Factoren versehenen Punkte (e_1, e_2) gegenüberliegt, oder auf der negativen Seite der Ebene $(e_3 e_4 e_5)$, auf der positiven Seite von jeder der neun übrigen Ebenen.

Die Gleichung

$$(8) \quad x = -\alpha_1' e_1 - \alpha_2' e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5$$

lässt sich auf keine der Formen (6) und (7) reduciren und stellt daher eine neue Punktgruppe dar.

Bestimmt man aus Gleichung (8) einen der Punkte $e_1, \ldots e_5$, so findet sich rechts stets dieselbe Combination der Vorzeichen, nämlich dreimal + und zweimal —. Man schliesst daraus, dass bei dieser Gruppirung jeder der 6 Punkte in gleicher Lage zu dem von den fünf übrigen gebildeten Fünfzell sich befindet.

4) Drei Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_3 = -\alpha_3', \quad \alpha_4 = -\alpha_4', \quad \alpha_5 = -\alpha_5'$$

(Zehn Fälle). Der Punkt x liegt jetzt jenseit der Geraden $(e_1 e_2)$, die der Ebene der mit negativen Factoren versehenen Punkte $(e_3 e_4 e_5)$ gegenüberliegt.

Die Gleichung

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3' e_3 - \alpha_4' e_4 - \alpha_5' e_5$$

kann auf die Form

$$\alpha_1 e_1 = -\alpha_2 e_2 + x + \alpha_3' e_3 + \alpha_4' e_4 + \alpha_5' e_5$$

gebracht werden und stellt daher eine eben solche Punktgruppe dar wie (7).

Bestimmt man aus (7) einen der Punkte α_2, α_3, α_4, α_5, so nimmt derselbe zu den übrigen dieselbe Lage ein wie im Falle 4) der Punkt x. Es haben demnach in der durch die Fälle 2) und 4) gleichzeitig dargestellten Gruppirung der sechs Punkte zwei Punkte die Eigenschaft, dass jeder von ihnen auf der negativen Seite eines das Fünfzell der fünf übrigen begrenzenden Tetraeder liegt, und vier Punkte haben die Eigenschaft, dass jeder von ihnen jenseit einer Kante jenes Fünfzells liegt.

5) Vier Factoren negativ, z. B.

$$\alpha_2 = -\alpha_2', \quad \alpha_3 = -\alpha_3', \quad \alpha_4 = -\alpha_4', \quad \alpha_5 = -\alpha_5'$$

Der Punkt x liegt jetzt jenseit der Ecke (e_1), welche dem Tetraeder der mit negativen Factoren versehenen Punkte $(e_2 e_3 e_4 e_5)$ gegenüberliegt.

Die Gleichung

$$x = \alpha_1 e_1 - \alpha_2' e_2 - \alpha_3' e_3 - \alpha_4' e_4 - \alpha_5' e_5$$

kann auf die Form

$$\alpha_1 e_1 = x + \alpha_2' e_2 + \alpha_3' e_3 + \alpha_4' e_4 + \alpha_5' e_5$$

gebracht werden und stellt daher eine eben solche Punktgruppe dar wie (6).

„Hiernach können sechs Punkte im vierdimensionalen Raume „auf drei verschiedene Arten eine Gruppe bilden“.

Entweder nämlich (Fall 3) sind alle sechs die Ecken eines aus zwei Fünfzellen (12345), (62345) zusammengesetzten Achtzells (wobei das beiden Fünfzellen gemeinsame Tetraeder (2345) in das Innere des zusammengesetzten Körpers fällt, sodass zur äusseren Begrenzung jedes der beiden Fünfzelle nur vier Tetraeder liefert).

Oder (Fall 2 und 4) zwei Punkte (5, 6) liegen auf entgegengesetzten Seiten des durch die vier übrigen bestimmten dreidimensionalen Raumes (oder, anders ausgedrückt, auf entgegengesetzten Seiten des von den vier übrigen gebildeten Tetraeders (1234).

Oder fünf von ihnen bilden ein Fünfzell (12346), welches den sechsten (5) umschliesst. (Fall 1 und 5).

5. Gebiet des n-dimensionalen Raumes. — Sei

(9) $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n+1} e_{n+1} \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1} = 1)$

1) Kein Factor negativ. — Der Punkt x liegt in dem durch die $(n+1)$ Punkte $e_1, \ldots e_{n+1}$ als Ecken bestimmten n-dimensionalen Tetraeder (oder n-dehnigen $(n+1)$-Eck [1])). Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot(n+1)} = 1$$

n Factoren negativ. — Der Punkt x liegt jenseit der Ecke (oder des 0-dehnigen 1-Ecks), welche dem negativen $(n-1)$-dehnigen n-Eck gegenüberliegt. Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot 1} = n+1$$

2) Ein Factor negativ. — Der Punkt x liegt jenseit des $(n-1)$-dehnigen n-Ecks, welches der durch den negativen Punkt dargestellten Ecke gegenüberliegt. Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot n} = (n+1)^{\cdot 1} = n+1$$

$(n-1)$ Factoren negativ. — Der Punkt x liegt jenseit der Kante (oder des 1-dehnigen Zweiecks), welche dem negativen $(n-2)$-dehnigen $(n-1)$-Eck gegenüberliegt. Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot 2}$$

3) Zwei Factoren negativ. — Der Punkt x liegt jenseit des $(n-2)$-dehnigen $(n-1)$-Ecks, welches der durch die negativen Punkte bestimmten Kante (1-dehnigem Zweieck) gegenüberliegt. Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot(n-1)} = (n+1)^{\cdot 2}$$

$(n-2)$ Factoren negativ. Der Punkt x liegt jenseit der Fläche (oder des 2-dehnigen Dreiecks), welche dem negativen $(n-3)$-dehnigen $(n-2)$-Eck gegenüberliegt. Anzahl der Fälle

$$(n+1)^{\cdot 3}$$

Allgemein:

„Sind in dem Ausdruck (9) r Factoren negativ, so liegt der „Punkt x jenseit des $(n-r)$-dehnigen $(n-r+1)$-Ecks, welches dem „negativen $(r-1)$-dehnigen r-Eck gegenüberliegt. Die Anzahl aller „Fälle ist

$$(n+1)^{\cdot(n-r+1)} = (n+1)^{\cdot r}$$

---

1) Die erste dieser Bezeichnungen habe ich in der „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde" (Nova Acta Acad. Leop. Carol. Bd. 44. Nr. 4. S. 452) eingeführt, die zweite rührt von Hrn. Hoppe her.

„Eine Punktgruppe von gleicher Beschaffenheit mit der eben „erwähnten entsteht, wenn man $(n-r)$ Factoren negativ setzt".

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt weiter:

„Die Gesamtzahl der verschiedenen Gruppen, welche $(n+2)$ „Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können, ist $\frac{n+1}{2}$, wenn „n ungerade, und $\frac{n+2}{2}$ oder $\frac{n}{2}+1$, wenn n gerade ist".

In jedem Raume mit gerader Dimensionenzahl (n) giebt es eine Gruppirung von $(n+2)$ Punkten, die so beschaffen ist, dass die Lage eines Punktes zur Gruppe der übrigen für alle Punkte die gleiche ist. Diese Gruppe ist dadurch charakterisirt, dass jeder Punkt aus den übrigen mittelst negativer Factoren in der Anzahl $\frac{n}{2}$ und positiver in der Anzahl $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ abgeleitet werden kann.

Im Gebiete der Ebene sind es die Ecken eines gewöhnlichen Vierecks, welche eine solche Gruppe bilden. Wir nennen diese Gruppe eine homogen geordnete.

2. Uebergänge einer aus $(n+1)$ Punkten bestehenden Gruppe [n-dehniges $(n+1)$-Eck] aus dem n-dimensionalen in den $(n-1)$-dimensionalen Raum.

6. Aus $(n+1)$ Punkten, die nicht in einem Raume mit geringerer Dimensionenzahl liegen, lässt sich im n-dimensionalen Raume nur eine Art von Punktgruppen bilden. Eine solche Gruppe soll Fundamentalgruppe genannt werden. Sie ist stets homogen geordnet und bildet ein System von Fundamentalpunkten, durch welche alle Punkte ihres Raumes mittelst reeller Factoren bestimmt werden können. Diese Punkte sind z. B. die Eckpunkte einer Strecke im Gebiete der Geraden, eines Dreiecks im Gebiete der Ebene, eines Tetraeders im gewöhnlichen, eines Fünfzells im vierdimensionalen Raume.

Geht eine solche Fundamentalgruppe durch Verschiebung ihrer Punkte oder durch Projection in den $(n-1)$-dimensionalen Raum über, so entsteht eine der im vorigen Abschnitte betrachteten Gruppen. Und zwar lassen sich durch Verfolgung solcher Uebergänge die verschiedenen Arten von Punktgruppen ebenso auf rein geometrischem Wege finden, wie im vorigen Abschnitt auf rechnerischem.

Hierbei erscheinen die neuen Punktgruppen als specielle Fälle der Fundamentalgruppen, was für die Ausdehnung von Sätzen und Aufgaben über Fundamentalgruppen auf eine einen Punkt mehr enthaltende Gruppe von Wichtigkeit ist. So folgen z. B. aus Sätzen über das Tetraeder, welche den Dreieckssätzen analog sind, solche über verschiedene Arten des ebenen Vierecks. — Ausserdem erkennen wir in den neuen Gruppen die verschiedenen möglichen Abbildungen der Fundamentalgruppen auf das Gebiet nächst niederer Dimensionenzahl.

Wir stellen im Folgenden diese Uebergänge zusammen.

7. $n = 2$. Uebergang des Dreiecks in die Gerade. — Dieser Uebergang kann nur so bewerkstelligt werden, dass einer der drei Eckpunkte in die durch die beiden andern bestimmte Gerade rückt. (Nr. 1. des vorigen Abschnitts).

$n = 3$. Uebergang des Tetraeders in die Ebene. — 1) Ein Punkt rückt in die durch die drei anderen bestimmte Dreiecksfläche. — 2) Eine Kante rückt vor, bis sie die gegenüberliegende in einem Punkte schneidet. In diesem Falle entsteht das gewöhnliche (concave) Viereck. (Nr. 2).

$n = 4$. Uebergang des Fünfzells in den dreidimensionalen Raum. — Ein Punkt (Fig. 1. Punkt 3) rückt in das Innere des durch die vier anderen (1. 2. 4. 5.) bestimmten Tetraeders. — 2) Eine Kante (1. 5) rückt vor, bis sie die gegenüberliegende Dreiecksfläche (2. 3. 4.) in einem Punkte schneidet. In diesem Falle entsteht das aus zwei Tetraedern gebildete Hexaeder. (Nr. 3).

Allgemein:

„Uebergang des n-dehnigen $(n+1)$-Ecks in den $(n-1)$-dimen- „sionalen Raum". — 1) Ein Punkt rückt in das durch die n übrigen bestimmte $(n-1)$-dehnige n-Eck. — 2) Eine Strecke (Kante) schneidet das durch die $(n-1)$ übrigen Punkte bestimmte $(n-2)$-dehnige $(n-1)$-Eck in einem Punkte. — 3) Ein (begrenzendes) Dreieck schneidet das durch die $(n-2)$ übrigen Punkte bestimmte $(n-3)$-dehnige $(n-2)$-Eck in einem Punkte.

Allgemein:

„Ein $(r-1)$-dehniges r-Eck schneidet das durch die übrigen „$(n-r+1)$ Punkte bestimmte $(n-r)$-dehnige $(n-r+1)$-Eck in „einem Punkte. — Denn die Stufenzahl des Gebietes, welches zwei Gebieten von $(r-1)$ter und $(n-r)$ter Stufe im Hauptgebiete $(n-1)$ter Stufe gemeinsam ist, beträgt

$$(r+1)+(n-r)-(n-1)=0$$

(S. z. B. Grassmann, Ausdehnungslehre II. S. 62. Nr. 95).

Ist n gerade, so giebt es $\frac{n}{2}$ solcher Uebergänge; ist n ungerade, $\frac{n+1}{2}$. Diese Zahlen gehen in die in Nr. 5. ermittelten über, wenn man darin die Aenderung von n in $(n+1)$ vornimmt, welche nötig ist, um aus der Gruppe von $(n+1)$ Punkten im $(n-1)$ dimensionalen Raume, welche hier behandelt ist, die von $(n+2)$ Punkten im n-dimensionalen Raume zu machen, von welcher in Nr. 5. die Rede war.

3. Gruppen von beliebig vielen Punkten im n-dimensionalen Raume.

8. Da die Fundamentalgruppe eines n-dimensionalen Raumes aus $(n+1)$ Punkten besteht, so sind $(n+1)$ Punkte stets auch in einem Raume von mehr als n Dimensionen denkbar. Hingegen sind besondere Lagen der Punkte erforderlich, damit dieselben in einem Raume mit geringerer Dimensionenzahl enthalten seien. Eine derartig specielle Punktgruppe kann z. B., wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde, durch Projection der Fundamentalgruppe in den $(n-1)$-dimensionalen Raum hergestellt werden. Durch Fortsetzung dieses Projectionsverfahrens kann die gegebene Punktgruppe in jedem Raume mit niedrigerer Dimensionenzahl zur Darstellung gelangen. Umgekehrt kann jede in einem s-dimensionalen Raume gegebene Gruppe von r Punkten als $(r-s-1)$-fache Projection einer im $(r-1)$-dimensionalen Raume vorhandenen Fundamentalgruppe betrachtet werden.

Um nun die Frage zu beantworten, wieviel verschiedene Arten von Gruppen r Punkte im s-dimensionalen Raume bilden können, könnte man versuchen, unter Fortsetzung des im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahrens die Anzahl der Uebergänge festzustellen, welche bei jeder neuen Projection der ursprünglichen Fundamentalgruppe stattfinden können, und man würde nach $(r-s-1)$ derartigen Bestimmungen die Anzahl der im s-dimensionalen Raume möglichen Gruppen übersehen können. Man wird jedoch, wie aus einfachen Beispielen sich leicht erkennen lässt, vielfach von verschiedenen Gruppen eines Gebietes aus zu derselben Gruppe des nächst niederen Gebietes gelangen. So führen z. B. die 2 Gruppen von 5 Punkten im gewöhnlichen Raume auf dieselbe Punktgruppe

in der Ebene. (S. die Figur 1., welche sowol die Projection des Doppeltetraeders (1234, 5234), wie diejenige des Tetraeders (1245) mit eingeschlossenem Punkte (3) darstellt). Auf dieses Verfahren lässt sich also eine sichere Zählung der verschiedenen Gruppen nicht gründen.

Statt dessen kann man nun zuerst die Aufgabe lösen, die Beschaffenheit einer einzelnen Gruppe, welche r gegebene Punkte bilden, festzustellen.

Aus dem Abschnitt 2. ist bereits zu erkennen, wie sich die verschiedenen Gruppen, welche von einer bestimmten Anzahl von Punkten gebildet werden können, von einander unterscheiden. Man kann nämlich zuerst eine gewisse Anzahl von Punkten so weit mit einander verbinden, dass sie die Ecken eines concaven Polygons [1]) (für $s = 2$), Polyeders (für $s = 3$) oder eines analogen mehrdimensionalen Gebildes sind, welches alle übrigen Punkte umschliesst. Diese übrig bleibende Gruppe wird in derselben Weise behandelt, und dies Verfahren wiederholt, bis entweder alle Punkte erschöpft sind, oder eine Gruppe von weniger als $(s+1)$ Punkten übrig bleibt. Diese Restgruppe wird stets als Fundamentalgruppe eines Raumes mit weniger als s Dimensionen betrachtet werden können und als solche nur noch zu weiterer Einteilung der in ihr vorhandenen Punkte zu benutzen sein. Man bemerkt übrigens, dass alle so entstandenen Gruppen homogen geordnet sind.

Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass r beliebig gegebene Punkte im s-dimensionalen Raume stets nur auf eine einzige Art in der eben beschriebenen Weise zu einer Gruppe zusammengefasst werden können, welche durch die Anzahlen der in den aufeinander folgenden Schichten befindlichen Punkte vollständig charakterisirt ist.

Wir wollen diese Betrachtung der Reihe nach für die ersten Gebiete durchführen.

Gebiet der Geraden. — Sei eine beliebige Anzahl von Punkten in der Reihenfolge A_1, A_2, A_3 . . . A_r gegeben. Dann umschliesst von den Strecken A_1A_r, A_2A_{r-1}, A_3A_{r-2}, . . . eine jede alle folgenden. Jenachdem r gerade oder ungerade ist, bleibt im Innern kein oder ein Punkt unverbunden übrig. Hienach giebt es auf der Geraden 2 Gruppirungen beliebig vieler Punkte, und diese Gruppirungen hangen nur von der Anzahl der Punkte ab. Die An-

1) D. h. eines Polygons mit lauter concaven Innenwinkeln.

zahl aller Strecken ist $\frac{r}{2}$ oder $\frac{r-1}{2}$, jenachdem r gerade oder ungerade ist. Die Eindeutigkeit des Verfahrens der Zusammenfassung der Punkte liegt auf der Hand. Einer gegebenen Zahl r entspricht also nur eine einzige Gruppirung von Punkten.

Gebiet der Ebene. — Seien r Punkte in beliebiger Lage gegeben. Dann kann man stets aus den aussen liegenden Punkten als Ecken ein und nur ein concaves Polygon bilden, welches alle übrigen Punkte umschliesst. Denn wählen wir zunächst, was immer möglich ist, zwei aussen gelegene Punkte A_{11}, A_{12} so, dass alle übrigen Punkte auf derselben Seite der Geraden $A_{11}A_{12}$ liegen (einige auch vielleicht noch auf dieser Geraden selbst), so kann von A_{12} aus nur nach einem Punkte A_{13} eine Gerade so gezogen werden, dass alle übrigen Punkte auf der concaven Seite des Winkels $A_{11}A_{12}A_{13}$ liegen (abgesehen von denen, die etwa noch auf der Geraden $A_{12}A_{13}$ liegen). Ebenso lässt sich unter derselben Bedingung von A_{13} nur nach einem Punkte A_{14} eine Gerade ziehen. Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man schliesslich von einem Punkte A_{1r_1} zu dem Punkte A_{11} zurück und hat so von der gesamten Punktgruppe ein concaves Punktpolygon abgelöst, welches alle übrigen Punkte umschliesst. Die Zahl der Punkte dieses Polygons sei a_1, wobei es keinen Unterschied macht, ob alle Punkte Eckpunkte des Polygons sind, oder eine Anzahl derselben auf den Seiten liegt, da im letzteren Falle nur eine Anzahl von Winkeln des a_1-Ecks den Wert 2R hat.

Auch hier leuchtet die Eindeutigkeit des Processes der Polygonbildung ein. Namentlich ist es gleichgiltig, durch welches Punktepar die zuerst beschriebene Linie gelegt wird.

Auf dieselbe Weise sondert man aus den übrigen $(r-a_1)$ Punkten ein Polygon $A_{21}A_{22}\ldots A_{2r_2}$ aus, welches a_2 Punkte umfasst u. s. w. Zuletzt können drei Fälle eintreten, indem innerhalb des letzten Polygons 0 oder 1 oder 2 Punkte unverbunden übrig bleiben.

Die Anzahl aller möglichen Gruppirungen von r Punkten in der Ebene erhält man hiernach auf folgende Weise:

„Man zerlege die Zahlen r, $r-1$, $r-2$ auf alle möglichen Arten „in Summanden, deren jeder $\geqq 3$ ist, und permutire diese Sum- „manden auf alle möglichen Arten. Die Gesamtzahl aller Permu- „tationsformen ist dann die gesuchte Anzahl“.

Man hat z. B. für $r = 8$ folgende Gruppen:

$$(8),\quad (5+3),\quad (3+5),\quad (4+4)$$

$$(7)+1,\quad (4+3)+1,\quad (3+4)+1$$

$$(6)+2,\quad (3+3)+2$$

Hierbei giebt in jeder Klammer die erste Zahl die Anzahl der Eckpunkte des äusseren, die zweite diejenige der Eckpunkte des inneren derjenigen beiden Polygone an, welche aus den gegebenen Punkten auf die oben beschriebene Weise gebildet werden können. Die ausserhalb der Klammern stehenden Zahlen aber geben die Anzahl der im Innern des zweiten Polygons unverbunden bleibenden Punkte an. — Fig. 3. zeigt die acht Punktgruppen in der obigen Reihenfolge.

Wenn also beispielsweise acht Körper (Würfel, Steinchen oder dergl.) auf eine horizontale Tafel geworfen werden, so wird die zufällig hervorgebrachte Stellung derselben stets eine der oben aufgezählten sein. Nur müssen auch mehr als 2 Punkte auf einer Polygonseite als Polygonecken gezählt werden.

Gebiet des Raumes. — Sind r Punkte in beliebiger Lage gegeben, so wählen wir, was immer möglich ist, drei aussen gelegene Punkte A_{11}, A_{12}, A_{13} so, dass alle übrigen Punkte auf derselben Seite der Ebene $A_{11}A_{12}A_{13}$ liegen, einige auch vielleicht noch in dieser Ebene selbst. Es entsteht dann im ersten Falle das Dreieck $A_{11}A_{12}A_{13}$, im zweiten aber lässt sich nach dem vorhin beschriebenen Verfahren durch die äusseren Punkte ein concaves Polygon legen, welches alle übrigen in dieser Ebene befindlichen Punkte umschliesst, und unter ausschliesslicher Benutzung dieser Punkte als Ecken in Dreiecke zerlegt werden kann. Durch jede Kante des Dreiecks oder dieses Polygons lässt sich jetzt nur eine Ebene so legen, dass einer (oder mehrere) der übrigen Punkte in dieser Ebene liegt, alle übrigen aber auf der concaven Seite des von der Ebene $A_{11}A_{12}A_{13}$ und der neuen Ebene gebildeten Raumwinkels. In jeder dieser Ebenen lässt sich jetzt wieder ein concaves Polygon construiren, welches alle übrigen in dieser Ebene liegenden Punkte entweder einschliesst oder in seinem Umfange enthält. Durch Fortsetzung dieses wieder durchaus eindeutigen Verfahrens erhält man schliesslich ein von lauter Dreiecken begrenztes concaves Polyeder, dessen Ecken Punkte aus der gegebenen Menge sind, während

alle übrigen Punkte im Innern desselben liegen. Dabei kann jede Kante der äusseren Begrenzung mehrere Punkte enthalten und jede Fläche aus mehreren Dreiecken bestehen. Die Zahl aller dieser auf der Begrenzungsfläche des Polyeders liegenden Punkte sei a_1.

Man wird dann in derselben Weise aus den äusseren Punkten der in das erste Polyeder eingeschlossenen Gruppe ein zweites bilden, dessen Punktezahl a_2 sei, u. s. w. Zuletzt werden dann im Innern 0, 1, 2 oder 3 Punkte übrig bleiben.

Die Anzahl aller möglichen Gruppirungen von r Punkten im Raume erhält man hiernach auf folgende Weise:

„Man zerlege die Zahlen r, $r-1$, $r-2$, $r-3$ auf alle möglichen Arten in Summanden, deren jeder $\geqq 4$ ist, und permutire „diese Summanden auf alle möglichen Arten. Die Gesamtzahl aller „Permutationen ist dann die gesuchte Anzahl“.

Für $r=8$ ergeben sich z. B. die Gruppen:

$$(8), \quad (4+4), \quad (7)+1, \quad (6)+2, \quad (5)+3$$

Aus diesen Gruppen lassen sich der Reihe nach z. B. bilden:

Ein Hexaeder, ein Tetraeder, welches ein zweites Tetraeder umschliesst, eine doppelte fünfseitige Pyramide mit eingeschlossenem Punkt, eine doppelte vierseitige Pyramide mit eingeschlossenem Punktepar, eine doppelte dreiseitige Pyramide mit eingeschlossenem Punktetripel.

Gebiet von n Dimensionen. — Die Zerlegung einer gegebenen Gruppe von r Punkten liefert hier offenbar eine Reihe n-dimensionaler Körper, jeder begrenzt von einer Anzahl $(n-1)$-dehniger n-Ecke. Jeder dieser Körper umschliesst alle folgenden. Im Innern bleiben 0, 1, 2, ... n Punkte übrig. Zur Berechnung der Anzahl aller möglichen Gruppirungen von r gegebenen Punkten dient die Regel:

„Man zerlege die Zahlen r, $r-1$, $r-2$, ... $r-n$ auf alle ‚möglichen Arten in Summanden, deren jeder $\geqq n+1$ ist, und per„mutire diese Summanden auf alle möglichen Arten. Die Gesamt„zahl aller Permutationen ist die gesuchte Anzahl“.

Da r Punkte im Raume von $r-1$ Dimensionen eine Fundamentalgruppe bilden (vorausgesetzt, dass sie in keinem Raume mit

geringerer Dimensionenzahl enthalten sind), und durch $(r-n-1)$ auf einander folgende Projectionen im n-dimensionalen Raume abgebildet werden können, so giebt die im letzten Satze ermittelte Zahl gleichzeitig an, auf wie viele wesentlich verschiedenen Arten eine Fundamentalgruppe in einen Raum mit geringerer Dimensionenzahl projicirt werden kann.

Auch sieht man, dass in der Tat, wie schon im Eingang bemerkt, jede beliebige Gruppe von r Punkten in einem Raume mit n Dimensionen als Projectionsgebilde einer Fundamentalgruppe des $(r-1)$-dimensionalen Raumes angesehen werden kann.

Hagen i/W.

XV.

Ueber die einem Dreiecke ein- und angeschriebenen Kreise und Kegelschnitte.

Von

Andr. Müller.

Die folgenden Untersuchungen bilden die Fortsetzung und Erweiterung der früher in dieser Zeitschrift von mir veröffentlichten Abhandlungen: „Ueber den Brocard'schen Kreis etc." [1]), und es sollen die dort zur Verwendung gekommenen und barycentrisch aufgeführten Formeln nunmehr in barycentralem Sinne gedeutet werden [2]). Während nämlich dort drei Punkte

$$A' \equiv rA + sB + tC$$
$$B' \equiv sA + tB + rC$$
$$C' \equiv tA + rB + sC$$

durch ihre Coordinaten r, s, t als gegeben betrachtet werden, und diese Grössen die Abstände der Punkte A', B', C' von den betreffenden Seiten des Fundamentaldreiecks, dividirt durch die bezügl. Höhen des Dreiecks darstellten, sollen nunmehr drei Gerade betrachtet werden, welche durch die Identitäten bestimmt sind

1) S. 2. R. T. VIII. S. 337 ff. und 2. R, T. IX. S. 113 ff. dieser Zeitschrift.

2) Die Anregung zur Fortführung jener Untersuchungen in dem angegebenen Sinne erhielt ich von Herrn Universitätsprofessor Dr. Brill in Tübingen. wofür ich ihm hiemit meinen wärmsten Dank darbringe.

$$B'C' \equiv r\,BC + s\,CA + t\,AB$$
$$C'A' \equiv s\,BC + t\,CA + r\,AB$$
$$A'B' \equiv t\,BC + r\,CA + s\,AB$$

und für welche die Grössen r, s, t die Verhältnisse der Entfernungen der Ecken des Fundamentaldreiecks von den durch sie gegebenen Geraden darstellen, so dass also beispielsweise ϱr, ϱs, ϱt die Längen der von A, B, C auf $B'C'$ etc. bzhw. gefällten Senkrechten sind, wenn man unter ϱ irgend eine Constante versteht.

Ziehen wir nun drei weitere Gerade in den Kreis unserer Betrachtung, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen und die gegenüber stehenden Dreiecksseiten in den Punkten L, M, N schneiden und welche da bestimmt sind durch die Ausdrücke

$$AL \equiv p\,CA + q\,AB$$
$$BM \equiv p\,AB + q\,BC$$
$$CN \equiv p\,BC + q\,CA$$

so teilen diese Geraden die Seiten des Fundamentaldreiecks äusserlich im Verhältniss von $p:q$, denn die Schnittpunkte sind bestimmt durch die Relationen:

$$L \equiv qB - pC$$
$$M \equiv -pA + qC$$
$$N \equiv qA - pC$$

Bestimmen wir nun die Coordinaten der Schnittpunkte der Geraden AL, BM, CN mit den Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ bzhw., so erhalten wir für den ersten Schnittpunkt

$$x_1 : x_2 : x_3 = (pt - qs) : qr : -pr$$

für den zweiten

$$x_1 : x_2 : x_3 = (-pt) : (ps - qr) : qt$$

für den dritten

$$x_1 : x_2 : x_3 = qs : (-ps) : (pr - qt)$$

Da nun aber die Determinante

$$\begin{vmatrix} pt - qs, & qr, & -pr \\ -pt, & ps - qr, & qt \\ qs, & -ps, & pr - qt \end{vmatrix} = 0$$

ist, so liegen die Schnittpunkte in einer Geraden.

---

1) Bellavitis: Sposizione dei nuovi metodi di geometria analitica 95 S. 45 ff.

Bestimmt man die Coordinaten der Schnittpunkte der Geraden AL, BM, CN mit den anderen Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ und bildet die betr. Determinanten, so sind diese von der eben betrachteten nicht wesentlich verschieden und aus dieser durch cyklische Vertauschung der Colonnen, bzhw. Reihen zu erhalten, so dass sich die Sätze ergeben:

Wenn man die Seiten des Fundamentaldreiecks in den Punkten L, M, N in demselben (beliebigen) Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit den gegenüber stehenden Ecken verbindet, so liegen je drei Schnittpunkte

1. von AL mit $B'C'$, BM mit $C'A'$, CN mit $A'B'$
2. von AL mit $C'A'$, BM mit $A'B'$, CN mit $B'C'$
3. von AL mit $A'B'$, BM mit $B'C'$, CN mit $C'A'$

in gerader Linie.

Die Coordinaten der drei Geraden, deren jede durch drei zusammengehörige Schnitte auf die Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ geht, ergeben sich aus den betr. Determinanten:

$$1)\quad u_1 : u_2 : u_3 = r(p^2s+q^2t-pqr) : t(p^2r+q^2s-pqt) : s(p^2t+q^2r-pqs)$$

$$2)\quad u_1 : u_2 : u_3 = t(p^2r+q^2s-pqt) : s(p^2t+q^2s-pqs) : r(p^2s+q^2t-pqr)$$

$$3)\quad u_1 : u_2 : u_3 = s(p_2t+q^2r-pqs) : r(p^2s+q^2t-pqr) : t(p^2r+q^2s-pqt)$$

Um nun an das Gesagte weitere Schlüsse knüpfen zu können, transformiren wir die Coordinaten in Bezug auf das Dreiek $A'B'C'$.

Da wir aber für die Geraden $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ die Identitäten hatten

$$B'C' \equiv rBC + sCA + tAB$$
$$C'A' \equiv sBC + tCA + rAB$$
$$A'B' \equiv tBC + rCA + sAB$$

so ergiebt sich, falls man

$$\Delta = \begin{vmatrix} r, & s, & t \\ s, & t, & r \\ t, & r, & s \end{vmatrix} = r\alpha + s\beta + t\gamma$$

setzt,

$$A' \equiv \alpha A + \beta B + \gamma C$$
$$B' \equiv \beta A + \gamma B + \alpha C$$
$$C' \equiv \gamma A + \alpha B + \beta C$$

und daraus

$$A \equiv (\gamma\beta - \alpha^2) A' + (\alpha\gamma - \beta^2) B' + (\alpha\beta - \gamma^2) C'$$

oder

$$A \equiv rA' + sB' + tC'$$
$$B \equiv sA' + tB' + rC'$$
$$C \equiv tA' + rB' + sC'$$

Diese Formeln lassen erkennen, dass das gegebene Dreieck ABC zu dem Dreieck $A'B'C'$ in derselben Beziehung steht, wie das (verallgemeinerte) Brocard'sche Dreieck zum Fundamentaldreieck, so dass also, wenn man

$$r = a^2, \quad s = c^2, \quad t = b^2$$

setzt, die Punkte A, B, C in Bezug auf das Dreieck $A'B'C'$ die Brocard'schen Punkte (im engeren Sinne) darstellen. Construirt man also für diesen Fall das Dreieck $A'B'C'$, so hat man die Aufgabe gelöst, wenn die Brocard'schen Punkte gegeben sind, das dazu gehörige Fundamentaldreieck zu finden. Da aber dann der Brocard'sche Kreis für $A'B'C'$ der dem gegebenen Dreieck ABC umgeschriebene ist, so möge die Construction des Dreiecks $A'B'C'$, wie sie sich aus den oben für $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ aufgestellten Identitäten ergibt, hier kurz angeführt werden.

Es seien zu diesem Zwecke, wie früher, die Brocard'schen Punkte in Bezug auf das Dreieck ABC mit A_2, B_2, C_2 bezeichnet und es seien die Schnittpunkte der Geraden AA_2, AB_2, AC_2, BA_2 etc. mit den Gegenseiten des Dreiecks bzhw. A_α, A_β, A_γ, B_α etc., dann ist der zu A_α reciproke Punkt $A_{-\alpha}$ derjenige auf BC, welcher von C ebenso weit absteht, wie A_α von B. Es seien ferner die zu $A_{-\alpha}$, $A_{-\beta}$ etc. harmonischen Punkte in Bezug auf die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks A_{-a}, A_{-b} etc., und die den Schnittpunkten der Geraden AG_2, BG_2, CG_2 mit den Gegenseiten des Dreiecks harmonisch zugeordneten Punkte G_a, G_b, G_c, dann erhält man für die Schnittpunkte der Geraden $B'C'$ mit den Seiten BC, CA, AB bzhw.

$$G_a \equiv b^2 B - c^2 C$$
$$B_{-\alpha} \equiv -b^2 A + a^2 C$$
$$C_{-\alpha} \equiv c^2 A - a^2 B$$

für die Schnittpunkte von $C'A'$ mit CA, AB, BC bzhw.

$$G_b \equiv -a^2A+c^2C$$
$$C_{-b} \equiv b^2A-c^2B$$
$$A_{-b} \equiv a^2B-b^2C$$

endlich für die Schnittpunkte $A'B'$ mit AB, BC, CA bzhw.

$$G_c \equiv a^2A-b^2B$$
$$A_{-c} \equiv c^2B-a^2C$$
$$B_{-c} \equiv -c^2A+b^2C$$

Man braucht also, um für den gegebenen Fall das Dreieck $A'B'C'$ zu construiren, nur die Eckpunkte des Dreiecks ABC mit den Punkten $A_2B_2C_2$ zu verbinden, zu den Schnittpunkten dieser mit den Gegenseiten die reciproken, zu diesen endlich die harmonischen Punkte zu zeichnen, wie es durch die erhaltenen Formeln angezeigt ist, um je zwei Punkte der Geraden $B'C'$ etc. zu erhalten. Die Punkte G_a, G_b, G_c die, wie oben gezeigt, auch auf den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ liegen, können zur Prüfung der Richtigkeit der Zeichnung verwertet werden.

Kehren wir nun zur Transformation der Coordinaten zurück, so erhalten wir aus den obigen Formeln

$$BC \equiv \alpha B'C'+\beta C'A'+\gamma A'B'$$
$$CA \equiv \beta B'C'+\gamma C'A'+\alpha A'B'$$
$$AB \equiv \gamma B'C'+\alpha C'A'+\beta B'C'$$

mithin

$$AL \equiv p(\beta B'C'+\gamma C'A'+\alpha A'B'+(\gamma B'C'+\alpha C'A'+\beta A'B')$$
$$\equiv (p\beta+q\gamma)B'C'+(p\gamma+q\alpha)C'A'+(p\alpha+q\beta)A'B'$$

$$BM \equiv (p\gamma+q\alpha)B'C'+(p\alpha+q\beta)C'A'+(p\beta+q\gamma)A'B'$$

$$CN \equiv (p\alpha+q\beta)B'C'+(p\beta+q\gamma)C'A'+(p\gamma+q\alpha)A'B'$$

Für den Schnittpunkt der Geraden AL mit $B'C'$ erhält man in Bezug auf $A'B'C'$ als Fundamentaldreieck

$$x_2 : x_3 = (p\alpha+q\beta) : (-(p\gamma+q\alpha)) = l : (-m)$$

Für den Schnitt von BM mit $C'A'$ hat man ferner

$$x_1 : x_3 = (-(p\beta+q\gamma)) : (p\gamma+q\alpha) = (-n) : m$$

Für den Schnittpunkt von CN mit $A'B$ endlich findet man

$$x_1 : x_2 = (p\beta+q\gamma) : (-(p\alpha+q\beta)) = n : (-l)$$

Für die Coordinaten u_1, u_2, u_3 der Geraden aber, welche durch diese drei Schnittpunkte geht, hat man:

$$u_1 : u_2 : u_3 = lm : mn : nl$$

Die Geraden nun, welche man für die verschiedenen Werte von p und q auf die angegebene Weise erhält, umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschrieben ist. Soll dieses der Fall sein, so müssen die Coordinaten u_1, u_2, u_3 derselben der Gleichung genügen

$$\frac{f}{u_1} + \frac{g}{u_2} + \frac{h}{u_3} = 0$$

in welcher f, g und h Constante sind, deren Werte durch zwei Gerade, welche den Kegelschnitt umhüllen, bestimmt werden können. Wählen wir hiezu die beiden Geraden, die für die besonderen Werte

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q = 0$$

erhalten werden, also die Gerade, welche durch die Schnittpunkte BA mit $B'C'$, CB mit $A'C'$ und AC mit $A'B'$, und diejenige, welche durch die Schnittpunkte von CA mit $B'C'$, von AB mit $A'C'$ und von BC mit $A'B'$ geht, so hat man für die erste

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha\beta : \alpha\gamma : \beta\gamma$$

und für die zweite

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha\gamma : \beta\gamma : \alpha\beta$$

so dass man zur Bestimmung der Constanten f, g, h die Gleichungen erhält

$$\frac{f}{\alpha\beta} + \frac{g}{\alpha\gamma} + \frac{h}{\beta\gamma} = 0$$

und

$$\frac{f}{\alpha\gamma} + \frac{g}{\beta\gamma} + \frac{h}{\alpha\beta} = 0$$

aus denen sich ergibt

$$f : g : h = (\alpha^2 - \beta\gamma) : (\gamma^2 - \alpha\beta) : (\beta^2 - \alpha\gamma)$$

oder reducirt

$$f : g : h = r : t : s$$

Nun muss also, wenn die obige Behauptung sich als richtig erweisen soll, die Gleichung erfüllt sein:

$$\frac{r}{lm} + \frac{t}{mn} + \frac{s}{nl} = 0$$

oder, wenn man die Nenner beseitigt und für l, m und n ihre Werte setzt,

$$r(p\beta + q\gamma) + t(p\alpha + q\beta) + s(p\gamma + q\alpha) = 0$$

Dieses ist aber der Fall, denn auf Grund der Determinante Δ sieht man sofort, dass die Gleichungen zurecht bestehen

$$r\beta + t\alpha + s\gamma = 0$$

und

$$r\gamma + t\beta + s\alpha = 0$$

Um nun die Frage zu entscheiden, ob der umhüllte Kegelschnitt auch ein Kreis sein könne, hat man sich zu erinnern, dass für diesen Fall die Constanten f, g, h vier verschiedene Werte haben können, nämlich [1])

$$\begin{aligned}
&1. \quad f : g : h = \delta_a : \delta_b : \delta_c \\
&2. \quad f : g : h = \sigma : (-\delta_c) : (-\delta_b) \\
&3. \quad f : g : h = (-\delta_c) : \sigma : (-\delta_a) \\
&4. \quad f : g : h = (-\delta_b) : (-\delta_a) : \sigma
\end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung

$$\delta_a = b + c - a, \quad \delta_b = a + c - b, \quad \delta_c = a + b - c; \quad \sigma = a + b + c$$

gesetzt wird, und a, b, c die Längen der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ bezeichnen.

Da nun aber, wie wir oben allgemein gesehen, die Proportion bestehen muss

$$f : g : h = r : t : s$$

so sind durch die vier obigen Gleichungen, wenn wir von dem Dreieck $A'B'C'$ ausgehen, in Bezug auf dieses Dreieck viermal je drei zusammengehörige Punkte bestimmt, welche die Eigenschaft haben, dass, wenn man die Entfernung von je zweien derselben in dem nämlichen Verhältniss teilt und die Teilpunkte mit dem dritten verbindet, diese die entsprechenden Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ in drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen. Die Verbindungslinien dieser Schnittpunkte umhüllen im ersten Fall den dem

1) Für die erste Gl. s. Bellavitis: Sp. d. n. m. 160 p. 71, für die übrigen (mutat. mutand.): Annal. Geom. der Kegelschn. nach Salmon von Fiedler Art. 161 p. 193.

Dreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen, in den übrigen Fällen die demselben angeschriebenen Kreise. Neben jedem dieser Kreise aber erhält man, wie wir oben allgemein gesehen haben, noch zwei umhüllte Kegelschnitte, wenn man andere Seiten der beiden Dreiecke als sich gegenseitig entsprechend erachtet.

Was nun die Construction dieser Enveloppen angeht, so construire man (Fig. 1.) zunächst für die dem Dreiecke $A'B'C'$ eingeschriebenen Kegelschnitte die Punkte A, B, C; und um diese zu erhalten, zuvor die Punkte

$$G_\delta \equiv \delta_a A' + \delta_b B' + \delta_c C'$$

und

$$G_{-\delta} \equiv \frac{1}{\delta_a} A' + \frac{1}{\delta_b} B' + \frac{1}{\delta_c} C'$$

indem man die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ im Verhältniss $\delta_b : \delta_a$ etc. für den ersten, und umgekehrt für den zweiten Punkt teilt und die Teilpunkte mit den gegenüber stehenden Eckpunkten des Dreiecks verbindet. Da nun $G_{-\delta}$ das Collineationscentrum der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC ist, die Verbindungsgeraden $G_\delta A$ etc. aber parallel sind zu den Seiten $B'C'$ etc., so erhält man den Punkt A als Schnittpunkt der Parallelen zu $B'C'$ mit $G_{-\delta}A'$, den Punkt B als Schnittpunkt der Parallelen zu $C'A'$ mit $G_{-\delta}B'$, den Punkt C endlich als Schnittpunkt der Parallelen zu $A'B'$ mit $G_{-\delta}C'$. Indem man dann die Strecken AB, BC, CA in demselben Verhältniss teilt, diese Teilpunkte mit den gegenüber stehenden Eckpunkten C, A, B bzhw. verbindet und die Schnittpunkte dieser mit den Seiten $A'B'$ etc. bestimmt, erhält man in den Geraden, welche diese Schnittpunkte verbinden, die Tangenten des dem Dreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen Kreises. Lässt man die Seiten BC, CA, AB den Seiten $C'A'$, $A'B'$, $B'C'$ und in einem zweiten Falle den Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ entsprechen, so erhält man als Umhüllte zwei Ellipsen, die in Folge ihrer Bildungsweise dem eingeschriebenen Kreise coordinirt sind, und für welche, wie wir oben gesehen, in den betr. Formeln die Coordinaten δ_a cyklisch vertauscht sind. So sind beispielsweise die Punkte, in denen die Geraden, welche die Ecken des Dreiecks $A'B'C'$ mit den Berührungspunkten der Ellipsen verbinden, sich schneiden, gegeben durch

$$G_{-\delta_b} \equiv \frac{1}{\delta_b} A' + \frac{1}{\delta_c} B' + \frac{1}{\delta_a} C'$$

$$G_{-\delta_c} \equiv \frac{1}{\delta_c} A' + \frac{1}{\delta_a} B' + \frac{1}{\delta_c} C'$$

und diese bilden mit $G_{-\vartheta}$ ein Brocard'sches Dreieck (im weiteren Sinne). Ebenso verhält es sich mit den zu diesen reciproken Punkten $G\vartheta_b$ und $G\vartheta_c$.

Die drei erwähnten Kegelschnitte haben nun ausser den drei Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ noch je eine Tangente gemeinsam. Für den Kreis und $p = 0$ erhält man die Gerade

$$\lambda \equiv \alpha\beta B'C' + \alpha\gamma C'A' + \beta\gamma A'B'$$

diese erhält man aber auch für die zweite Ellipse und $q = 0$. Für den Kreis und $q = 0$ erhält man die Gerade

$$\mu \equiv \alpha\gamma B'C' + \beta\gamma C'A' + \alpha\beta A'B'$$

diese erhält man aber auch für die erste Ellipse und für $p = 0$. Für die erste Ellipse und $q = 0$ hat man endlich die Gerade

$$\nu \equiv \beta\gamma B'C' + \alpha\beta C'A' + \alpha\gamma A'B'$$

diese erhält man aber auch für die zweite Ellipse und für $p = 0$. Es ist also die Gerade λ die dem Kreis und der zweiten Ellipse, die Gerade μ die dem Kreise und der ersten Ellipse, die Gerade ν die den beiden Ellipsen gemeinsame Tangente. Diese Tangenten sind in der beigegebenen Zeichnung mit 0, 1 und 1' bezeichnet, entsprechend (bis auf 1') den übrigen Bezeichnungen, welche den Tangenten der ersten Ellipse beigefügt sind. Was aber diese Bezeichnungen angeht, so denke man sich A, B, C, bzhw. als Nullpunkte der Strecken AB, BC und CA, betrachte ferner die Bewegungen von A nach B, von B nach C, von C nach A als positiv und nehme für die auf der durch AB bestimmten Geraden gemessenen Strecken als Maass die Strecke AB für die auf BC die Strecke BC etc., dann sind die sich entsprechenden Punkte auf jeder dieser Geraden mit derselben Zahl zu bezeichnen und mit eben dieser Zahl ist auch jeweils die zu diesen Teilpunkten gehörige Tangente versehen.

Was endlich die Construction der Punkte A, B, C angeht, welche für die dem Dreiecke $A'B'C'$ angeschriebenen Kreise (und Ellipsen) die oben erörterte Bedeutung haben, so werden dieselben in ähnlicher Weise erhalten, wie bei dem eingeschriebenen Kreise. Man sucht zunächst (Fig. 2) (für den der Seite $B'C'$ angeschriebenen Kreis) den Punkt

$$G_{\sigma a} \equiv \sigma A' - \delta_c B' - \delta_b C'$$

indem man $B'A'$ im Verhältniss $\varrho : \delta_c$ und $A'C'$ im Verhältniss $\sigma : \delta_b$ äusserlich, $B'C'$ aber im Verhältniss $\delta_b : \delta_c$ innerlich teilt und die Teilpunkte mit den gegenüber stehenden Eckpunkten des Dreiecks verbindet. Zeichnet man dann auf den Seiten des Dreiecks die Punkte, welche zu den eben construirten Punkten reciprok sind, so erhält man durch die Verbindung dieser Punkte mit den gegenüberstehenden Eckpunktpunkten des Dreiecks als Schnittpunkt dieser drei Geraden den Punkt

$$G_{-\sigma a} \equiv -\frac{1}{\sigma} A'x + \frac{1}{\delta_c} B' + \frac{1}{\delta_c} C'$$

das Collineationscentrum des gesuchten Dreiecks mit dem gegebenen. Zieht man nun durch $G_{\sigma a}$ die Parallelen zu den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$, so schneiden diese die Geraden $A'G-\sigma a$ etc. in den Punkten ABC. In der beigegebenen Figur ist der der Seite a angeschriebene Kreis berücksichtigt und die Tangenten 0, $\frac{1}{2}$, 2 und ∞ gezogen.

XVI.

Die Resultirende als Maxima der Projectionen der Seitenkräfte.

Von

Victor Thallmayer.

Im Nachstehenden ist ein Gedankengang verfolgt, welcher in einfachster Weise die rechnungsmässige Bestimmung der Grösse und Richtung der Resultirenden sowol, als auch die Herleitung anderer zwischen der Resultirenden und den Seitenkräften bestehenden Relationen gestattet.

Es wird nämlich von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass Kräfte, welche auf einen freien Punkt einwirken, sich zu grösstmöglicher Gesamtwirkung vereinigen müssen, mithin gewissermassen ein Princip maximaler Wirkung zu Geltung kommen muss.

Schliessen Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . mit der Kraft P_0 die Winkel α_1, α_2, α_3 . . . ein, ist ferner φ der Winkel, welchen eine Gerade mit P_0 einschliesst, so ist die Resultirende

$$R = \Sigma P \cos(\varphi - \alpha) \qquad \text{I)}$$

wenn φ aus:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \Sigma P \cos(\varphi - \alpha) = \Sigma P \sin(\varphi - \alpha) = 0 \qquad \text{II)}$$

bestimmt wird. Gleichung II) mit einem beliebigen Längenmass l multiplicirt giebt

$$\Sigma P l \sin(\varphi - \alpha) = 0 \qquad \text{III)}$$

die Gleichung der statischen Momente mit Bezug auf einen auf der Resultirenden gelegenen Punkt.

Setzt man $\varphi \pm \gamma$ statt φ in Gleichung III), so erhält man:

$$\Sigma Pl \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha) = \pm Rl \sin\gamma \qquad \text{IV)}$$

die Gleichung der statischen Momente für einen ausserhalb der Resultirenden gelegenen Punkt.

Gleichung I) mit einem Längenmasse s multiplicirt ergiebt

$$Rs = \Sigma Ps \cos(\varphi - \alpha) \qquad \text{V)}$$

die Gleichung zwischen der Arbeit der Resultirenden und jener der Seitenkräfte.

Resultirende zweier Kräfte. Schliessen zwei Kräfte P_0 und P_1 den Winkel $\alpha = 0$ ein, so ist deren Resultirende

$$R = P_0 + P_1$$

ist der eingeschlossene Winkel $\alpha = 180^0$, so ist

$$R = P_0 - P_1$$

Da die Resultirende mit dem Anwachsen des Winkels α von 0 auf 180^0 von $P_0 + P_1$, dem einen Grenzwert, auf $P_0 - P_1$ den andern Grenzwert sich vermindert, so wird für einen zwischen 0 und 180^0 gelegenen Wert von α die Resultirende eine Grösse annehmen, welche $< P_0 + P_1$ ist. Man kann daher unter der Voraussetzung, dass $m < 1$ und $n < 1$ für die Resultirende setzen:

$$R = mP_0 + nP_1$$

Die Werte für m und n müssen nun derartige sein, dass sich aus selben die Grösse der Resultirenden auch für die Grenzfälle ergeben.

Bezeichnen wir mit φ den Winkel, den die Richtung der Resultirenden mit P_0 einschliesst, so muss:

für $\left.\begin{matrix}\alpha = 0\\ \varphi = 0\end{matrix}\right\}$ $m = 1,\quad n = 1$ und $R = P_0 + P_1$

für $\left.\begin{matrix}\alpha = 180^0\\ \varphi = 0\end{matrix}\right\}$ $m = 1,\quad n = -1$ und $R = P_0 - P_1$

für $\left.\begin{matrix}\alpha = 180^0\\ \varphi = 180^0\end{matrix}\right\}$ $m = -1,\quad n = 1$ und $R = P_1 - P_0$

werden.

Diesen Erfordernissen entsprechen nun nur die Werte $\cos\varphi$ für m, ferner $\cos(\alpha \pm \varphi)$ für n.

Da nun, wenn

$$P_0 = 0$$

Winkel φ als gleich mit α, und wenn

$$P_1 = 0$$

Winkel φ als gleich mit 0 angesehen werden muss, so ergeben sich als Grenzwerte des Winkels φ die Winkel α und 0.. Es kann demnach φ nicht $>$ als α werden, somit ist auch nur der Wert $\cos(\alpha - \varphi)$ jener, der für unsere Berechnung in Betracht kommen kann.

Diesem nach können wir als Ausdruck für die Resultirende setzen:

$$R = P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\alpha - \varphi) \tag{1}$$

und da

$$\cos(\alpha - \varphi) = \cos(\varphi - \alpha)$$

auch

$$R = P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\varphi - \alpha) \tag{2}$$

Die Gleichungen 1) und 2), welche die Grösse der Resultirenden als Summe der Projectionen der beiden Seitenkräfte auf eine Gerade erscheinen lassen, geben für verschiedene Wert von φ verschiedene Werte für R.

Weil nun die Resultirende nur eine bestimmte Grösse haben kann, und weil angenommen werden muss, dass die Einzelkräfte zur grösst möglichen Gesamtwirkung sich zusammentun werden, so ist es nahe gelegt, dass für φ jener Wert zu nehmen sei, der den Ausdruck

$$R = P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\varphi - \alpha)$$

zu einem Maximum macht.

Wir haben demnach:

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -P_0 \sin\varphi - P_1 \sin(\varphi - \alpha) = 0 \tag{3}$$

und hieraus

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_1 \sin\alpha}{P_0 + P_1 \cos\alpha} \tag{4}$$

Multipliciren wir Gleichung 3) mit l, so haben wir:

$$P_0\, l \sin\varphi + P_1\, l \sin(\varphi - \alpha) = 0 \tag{5}$$

d. h. die Summe der statischen Momente der zwei Seitenkräfte bezogen auf einen Punkt der Resultirenden ist $= 0$.

Aus Gleichung 5), wenn wir darin $\varphi \pm \gamma$ statt φ setzen, wird:

$$P_0 l \sin(\varphi \pm \gamma) + P_1 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha) = \pm l \sin\gamma (P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\varphi - \alpha)) \\ + l \cos\gamma (P_0 \sin\varphi + P_1 \sin(\varphi - \alpha))$$

Da nun der in der Klammer befindliche Teil des ersten Gliedes $= R$, der in der Klammer befindliche Teil des zweiten Gliedes hingegen $= 0$ ist, so ergiebt sich:

$$P_0 l \sin(\varphi \pm \gamma) + P_1 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha) = \pm R l \sin\gamma \qquad 6)$$

d. i. für einen ausserhalb der Resultirenden gelegenen Punkt ist die Summe der statischen Momente der Seitenkräfte gleich dem statischen Momente der Resultirenden.

Aus 3) folgt, dass:

$$P_0 \sin\varphi = P_1 \sin(\alpha - \varphi)$$

dies im Vereine mit

$$R = P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\alpha - \varphi)$$

(nach 1) ergiebt, dass die Resultirende der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Kräfteparalellogrammes bestimmt ist, denn nur an diesem erfüllen sich constructiv die zugezogenen beiden Gleichungen. Man gelangt somit auch auf diesem Wege auf einen Beweis für die Richtigkeit des Kräfteparalellogrammes.

Resultirende mehrerer in einer Ebene an einem Punkte angreifenden Kräfte.

Sind die Kräfte der Reihe nach P_0, P_1, P_2 . . . P_n, und die Winkel, welche P_1, P_2, P_3 . . . mit P_0 einschliessen, der Reihe nach α_1, α_2, α_3 . . ., so kann man, wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Resultirende R mit P_0 einschliesst, nach obigem setzen:

$$R = P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\varphi - \alpha_1) + P_2 \cos(\varphi - \alpha_2) + \ldots \qquad 1)$$

und zur Bestimmung von φ:

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = - P_0 \sin\varphi - P_1 \sin(\varphi - \alpha_1) - P_2 \sin(\varphi - \alpha_2) - \ldots, = 0 \qquad 2)$$

oder

$$P_0 \sin\varphi + P_1 \sin(\varphi - \alpha_1) + P_2 \sin(\varphi - \alpha_2) + \ldots = 0 \qquad 3)$$

woraus sich ergiebt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \ldots}{P_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots}$$



Multiplicirt man 3) mit l, so ergiebt sich:

$$P_0 l \sin\varphi + P_1 l \sin(\varphi - \alpha_1) + P_2 l \sin(\varphi - \alpha_2) + \ldots = 0 \qquad 4)$$

Setzt man hierin $\varphi \pm \gamma$ statt φ, so wird:

$$P_0 l \sin(\varphi \pm \gamma) + P_1 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha_1) + P_2 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha_2) + \ldots =$$
$$\pm l \sin\gamma (P_0 \cos\varphi + P_1 \cos(\varphi - \alpha_1) + P_2 \cos(\varphi - \alpha_2) + \ldots)$$
$$+ l \cos\gamma (P_0 \sin\varphi + P_1 \sin(\varphi - \alpha_1) + P_2 \sin(\varphi - \alpha_2) + \ldots)$$

Da nun der in der Klammer befindliche Teil des ersten Gliedes $= R$, jener des zweiten $= 0$ ist, so hat man:

$$P_0 l \sin(\varphi \pm \gamma) + P_1 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha_1) + P_2 l \sin(\varphi \pm \gamma - \alpha_2) + \ldots =$$
$$= \pm R l \sin\gamma \qquad 5)$$

wobei wieder 4) und 5) die bekannten Gleichungen der statischen Momente vorstellen. Constructiv erfüllen sich Gleichung 1) und 3) an dem Kräftepolygon.

Resultirende mehrerer im Raume an einem Punkte angreifenden Kräfte.

Greifen mehrere Kräfte P_0, P_1, P_2 ... P_n an einem Punkte im Raume an und sind die Winkel, welche die Kräfte P_1. P_2, P_3 ... P_n mit P_0 einschliessen, der Reihe nach α_1, α_2, α_3 ..., jene welche P_2, P_3 ... P_n mit P_1 einschliessen: β_1, β_2, β_3 ..., ist ferner ε der Winkel, welchen die Resultirende R mit P_1 einschliesst, ferner ω der Winkel, welchen die durch P_0 und R gehende Ebene mit der durch $P_0 P_1$ gelegt gedachten einschliesst, und sind endlich γ_1, γ_2, γ_3, ... die Projectionen der Winkel β_1, β_2, β_3, ... auf eine auf die Kraftrichtung P_0 senkrechte Ebene [1]), so lässt sich nach obigem Vorgange setzen:

---

1) Die Projectionen γ_1, γ_2, γ_3 ..., der Winkel β_1, β_2, β_3 ... auf eine auf P_0 senkrechte Ebene ergeben sich aus:

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\cos\beta_2 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_3}$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{\cos\beta_3 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_4}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_4} \quad \text{u. s. f.}$$

Vergleiche auch unsere diesbezügliche Arbeit Band X, 2te Reihe des Archives.

$$R = P_0 \cos\varepsilon + P_1(\cos\alpha_1 \cos\varepsilon + \sin\alpha_1 \sin\varepsilon \cos\omega)$$
$$+ P_2(\cos\alpha_2 \cos\varepsilon + \sin\alpha_2 \sin\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots$$
$$\ldots + P_n(\cos\alpha_n \cos\varepsilon + \sin\alpha_n \sin\varepsilon \cos(\omega - \gamma_{n-1}) \qquad 1)$$

wobei die Coefficienten der Kräfte die Cosinusse der Winkel sind, welche selbe mit der Richtung der Resultirenden einschliessen.

Zur Bestimmung von ω hat man aus

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -P \sin\alpha_1 \sin\varepsilon \sin\omega - P_2 \sin\alpha_2 \sin\varepsilon \sin(\omega - \gamma_1)$$
$$-P_3 \sin\alpha_3 \sin\varepsilon \sin(\omega - \gamma_2) - \ldots = 0 \quad \text{den Wert:} \qquad 2)$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{P_2 \sin\alpha_2 \sin\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \sin\gamma_2 + \ldots}{P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 \cos\gamma_1 + P_3 \sin\alpha_3 \cos\gamma_2 + \ldots}$$

Zur Bestimmung von ε aus

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = -P_0 \sin\Sigma - P_1(\cos\alpha_1 \sin\varepsilon - \sin\alpha_1 \cos\varepsilon \cos\omega)$$
$$-P_2(\cos\alpha_2 \sin\varepsilon - \sin\alpha_2 \cos\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1)) - \ldots = 0 \text{ den: } 3)$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{P_1 \sin\alpha_1 \cos\omega + P_2 \sin\alpha_2 \cos(\omega - \gamma_1) + P_3 \sin\alpha_3 \cos(\omega - \gamma_2) + \ldots}{P_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos a_2 + P_3 \alpha_3 + \ldots}$$

In Gleichung 3) entsprechen den Coefficienten der Kräfte die Sinusse jener Winkel, welche selbe mit der Resultirenden einschliessen. Multipliciren wir 3) mit l, so haben wir

$$P_0 l \sin\varepsilon + P_1 l(\cos\alpha_1 \sin\varepsilon - \sin\alpha_1 \cos\varepsilon \cos\omega)$$
$$+ P_2 l(\cos\alpha_2 \sin\varepsilon - \sin\alpha_2 \cos\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots = 0 \qquad 4)$$

Setzen wir hierin $\varepsilon \pm \gamma$ statt ε, so erhalten wir:

$$P_0 l \sin(\varepsilon \pm \gamma) + P_1 l(\cos\alpha_1 \sin(\varepsilon \pm \gamma) - \sin\alpha_1 \cos(\varepsilon \pm \gamma)\cos\omega)$$
$$+ P_2 l(\cos\alpha_2 \sin(\varepsilon \pm \gamma) - \sin\alpha_2 \cos(\varepsilon \pm \gamma)\cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots$$
$$= \pm l \sin\gamma (P_0 \cos\varepsilon + P_1(\cos\alpha_1 \cos\varepsilon + \sin\alpha_1 \sin\varepsilon \cos\omega)$$
$$+ P_2(\cos\alpha_2 \cos\varepsilon + \sin\alpha_2 \sin\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots)$$
$$+ l \cos\gamma (P_0 \sin\varepsilon + P_1(\cos\alpha_1 \sin\varepsilon - \sin\alpha_1 \cos\varepsilon \cos\omega)$$
$$+ P_2(\cos\alpha_2 \sin\varepsilon - \sin\alpha_2 \cos\varepsilon \cos(\omega - \gamma_1) + \ldots)$$

Da nun die Summe der Glieder der ersten Klammer $= R$, jene der Glieder der zweiten Klammer $= 0$ ist, so haben wir



$$P_0 l(\sin\omega \pm \gamma) + P_1 l(\cos\alpha_1 \sin(\varepsilon \pm \gamma) - \sin\alpha_1 \cos(\varepsilon \pm \gamma)\cos\omega)$$
$$+ P_2 l(\cos\alpha_2 \sin(\varepsilon \pm \gamma) - \sin\alpha_2 \cos(\varepsilon \pm \gamma)\cos(\omega - \gamma_1)) + \ldots =$$
$$\pm Rl \sin\gamma \qquad 5)$$

Hier sind 4) und 5) wieder die Gleichungen der statischen Momente.

Gleichungen 1), 2) und 3) erfüllen sich an dem räumlichen Kräftepolygon, respective dessen Projection auf die auf P_0 senkrechte Ebene.

Erteilen die Kräfte der freien Masse m gewisse Geschwindigkeiten v_0, v_1, v_2 . . . so sind ihre Grössenmaasse mv_0, mv_1, mv_2 . . . und die oben gefundenen Werte für $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\omega$ und $\operatorname{tg}\varepsilon$ bleiben constant, was besagt, dass die Bewegung in gerader Richtung vor sich geht. Dasselbe ist der Fall, wenn die Kräfte alle der Masse m gewisse Beschleunigungen γ_1, γ_2, γ_3 . . . erteilen, indem dann, da nach einer gewissen Zeit t ihre Grösse mit $m\gamma_1 t$, $m\gamma_2 t$, $m\gamma_3 t$ . . . gemessen werden kann, aus den Ausdrücken für die Tangenten der Winkel φ, ω und ε, die Grösse t herausfällt. Sind unter den Kräften solche, welche der Masse zum Teile Beschleunigungen, zum Teile aber keine erteilen, so findet die Bewegung in einer Curve statt, indem dann mit t sich auch die Werte der Tangenten der Winkel φ, ω und ε sich ändern. Die Bahn, welche von dem Beweglichen beschrieben wird, ist dann die Einhüllende der unter den verschiedenen Winkeln gezogenen Geraden.

Nach diesem Vorgange kann auch die Endgeschwindigkeit eines freien Punktes, auf welchen Kräfte wirken, bestimmt werden.

Wird z. B. einem Punkte A von einer Kraft P_0 die Beschleunigung γ, von einer andern zu dieser unter einem Winkel α wirkenden Kraft P_1 hingegen die Geschwindigkeit c zu Teil, so ergiebt sich zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit v des Punktes A nach Verlauf der Zeit t:

$$v = c\cos\varphi + \gamma t \cos(\alpha - \varphi) \qquad 1)$$

wobei φ aus

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$$

zu bestimmen ist.

Man bekommt aus

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -c\sin\varphi + \gamma t \sin(\alpha - \varphi) \quad \text{den Wert:}$$



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma t \sin\alpha}{z + \gamma t \cos\alpha}$$

und mit Benutzung dieses Wertes:

$$v = \sqrt{(c + \gamma t \cos\alpha)^2 + \gamma^2 t^2 \sin^2\alpha}$$

und hieraus nach der von uns in Band X., 2te Reihe angegebenen Art Wurzel zu ziehen, unmittelbar:

$$v = (c + \gamma t \cos\alpha)\cos\varphi + \gamma t \sin\alpha \sin\varphi$$

wie sich dies durch Transformation auch aus 1) ergiebt.

Die Einhüllende der unter den Winkeln φ zur Kraftrichtung P_1 liegenden Geraden ist eine Parabel.

XVII.

Ueber den Zusammenhang der Facultäten-Coefficienten mit den Bernoulli'schen und Euler'schen Zalen.

Von

Franz Rogel.

Das wirkliche Bestehen eines Zusammenhanges der Facultäten-Coefficienten mit den Bernoulli'schen Zalen lässt sich aus der Tatsache erkennen, dass erstere in einfacher Weise in den Newton-schen Identitäten mit den mit Hilfe der Bernoulli'schen Zalen summirbaren Potenzreihen ganzer Zalen verbunden sind.

Es ist auch auf diese Weise möglich den $k$ten, aus den Elementen 1, 2, 3, ... $n-1$ gebildeten Facultäten-Coefficient C_k^n in Determinantenform durch $2k$ Potenzen von n und eine beschränkte Anzal Bernoulli'scher Zalen darzustellen.

Die sehr umständliche Transformationen erfordernde Verwandlung dieser, sich in combinatorischer Form gebenden Abhängigkeit in eine einfachst mögliche und übersichtliche Gestalt führt zu einem Ergebniss, welches direct mit Benutzung der von Faà di Bruno ins Leben gerufenen, von L. Königsberger (Klein, Ann. XXXII.), Teixeira (Jorn.) und F. Meyer weiter ausgebildeten combinatorischen Darstellung der höheren Ableitungen der Functionen erzielt wird, wenn man von der bekannten Formel

$$C_k^n = (-1)^k \binom{a-1}{k} \left[D^k \left(\frac{v}{e^v - 1}\right)^n\right]_{(v=0)} \qquad 1)$$

ausgeht.

Sei

$$\frac{v}{e^v - 1} = y$$

so ist

$$D^k y^n = D^k \overset{n\,\text{mal}}{(y \cdot y \ldots)}$$

wofür symbolisch

$$[y_1 + y_2 + \ldots + y_n]^k$$

unter dem Vorbehalte geschrieben werden kann, dass nach vollendeter polynomischer Entwicklung die Potenz-Exponenten durch Wiederholungs-Exponenten der Ableitungen, dass ferner jede 0ten Potenz durch die Functionen selbst ersetzt werden und dass schliesslich die Stellenzeiger rechts unten entfallen. Es ist dann

$$D^k y^n = n!\, k!\, \Sigma \frac{(y)^\alpha \left(\frac{y'}{1!}\right)^\beta \left(\frac{y''}{2!}\right)^\gamma \left(\frac{y'''}{3!}\right)^\delta \cdots \left(\frac{y^{(k)}}{k!}\right)^\varkappa}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!\ \ldots\ \varkappa!} \tag{2}$$

wo für α, β, ... alle möglichen gleichen und ungleichen, den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots \varkappa &= n \\ \beta + 2\gamma + 3\delta \ldots + k\varkappa &= k \end{aligned} \tag{2'}$$

genügenden ganzen Zalen zu setzen sind.

Die Nullwerte y_0', y_0'', ... $y_0^{(k)}$ bestimmen sich aus

$$y = 1 - \frac{v}{2} + \frac{B_1}{2!} v^2 - \frac{B_2}{4!} v^4 + \frac{B_3}{6!} v^6 \ldots$$

$$-2\pi < v < 2\pi$$

es ist

$$y_0 = 1, \quad y_0' = -\tfrac{1}{2}, \quad y_0^{(2r)} = (-1)^{r+1} B_r, \quad y^{(2r+1)} = 0,$$
$$r = 1, 2, \ldots$$

Aus 2') geht hervor, dass α nicht unter $n-k$ sinken, aber auch nicht $(n-1)$ übersteigen kann, es wird daher der Teiler $(n-k-1)!$ von $\alpha!$ allen Gliedern der Summe gemeinschaftlich sein.

Nach erfolgter Einsetzung ist

$$C_k^n = (-1)^k \binom{n-1}{k} . k!\, \Sigma \frac{n! \left(\frac{B_1}{2!}\right)^\gamma \left(-\frac{B_2}{4!}\right)^\delta \cdots \left((-1)^{r+1} \frac{B_r}{(2r)!}\right)^\varkappa}{\alpha!\,(-2)^\beta\ \beta!\ \gamma!\ \delta!\ \ldots\ \varkappa!}$$

wo

$$r = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ \frac{k-1}{2} & \text{wenn } k \text{ ungerade ist} \end{cases} \tag{3}$$

und für α, β alle möglichen, und für γ, δ ... alle möglichen geraden den Bedingungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots + \varkappa = n$$
$$\beta + 2\gamma + 4\delta \ldots + 2r\varkappa = k$$

entsprechenden ganzen Zalen zu setzen sind.

Bezüglich der Auflösungen Nr. 2') wäre zu bemerken, dass alle der zweiten genügenden Werte auch der ersten genügen; die erste dient tatsächlich nur zur Bestimmung von α.

Das Vorzeichen eines jeden Gliedes hängt von k, β und den Exponenten der Bernoulli'schen Zalen mit geradem Index, also von δ, ζ ... ab; dasselbe ist daher

$$(-1)^{k+\beta+\delta+\zeta} \ldots,$$

Erwähnenswert sind folgende specielle Fälle:

a) $k = 1$

$$\beta = 1, \quad \gamma = \delta = \varepsilon \ldots = 0, \quad C_1^n = \frac{n(n-1)}{1.2}$$

b) $k = 2$

$$\alpha + \beta + \gamma = n$$
$$\beta + 2\gamma = 2$$

α,	β,	γ
$n-2$,	2,	0
$n-1$,	0,	1

$$C_2^n = \binom{n-1}{2} 2!\, n!\, \Sigma \frac{\left(\frac{B_r}{2!}\right)^\gamma}{(-2)^\beta \alpha!\, \beta!\, \gamma!} \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{1.2.3.4}$$

c) $k = n-2$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots + \varkappa = n$$
$$\beta + 2\gamma + 4\delta + \ldots + 2r\varkappa = n-2$$

$$2r = \begin{cases} n-2, & n \text{ gerade} \\ n-3, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Das Minimum von $\alpha!$ ist hier $2!$

$$C_{n-2}{}^{n} = (n-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

mithin

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}$$

$$= (-1)^{n-2} n!\, \Sigma \frac{\left(\frac{B_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(-\frac{B_2}{4!}\right)^{\delta}\cdots\left((-1)^{r+1}\frac{B_r}{(2r)!}\right)^{\varkappa}}{(-2)^{\beta}\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!\ \ldots\ \varkappa!} \qquad 4)$$

Z B. ist für $n = 6$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 6$$
$$\beta+2\gamma+4\delta+6\varepsilon = 4$$

α	β	γ	δ
2	4	0	0
3	2	1	0
4	0	2	0
5	0	0	1

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = 6!\left[\frac{1}{2^4\, 2!\, 4!}+\frac{B_1}{2^2(2!)^2 3!}+\frac{B_1{}^2}{(2!)^3 4!}-\frac{B_2}{4!\,5!}\right]$$

d) $k = n-1$

$$\alpha+\beta+\gamma\ \ldots+\varkappa = n$$
$$\beta+2\gamma\ \ldots+2r\varkappa = n-1$$

$$2r = \begin{cases} n-1 & n \text{ ungerade} \\ n-2 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$C_{n-1}{}^{n} = (n-1)!$$

folglich

$$\Sigma \frac{\left(\frac{B_1}{2!}\right)^{\gamma}\left(-\left(\frac{B_2}{4!}\right)\right)^{\delta}\cdots\left((-1)^{r+1}\frac{B_r}{(2r)!}\right)^{\varkappa}}{(-2)^{\beta}\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!\ \ldots\ \varkappa!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \qquad 5)$$

Hieraus entstehen, so wie aus Nr. 4) für $n = 4, 6, 8 \ldots 2\nu$ Formeln, in welchen die $\nu-1$ ersten, und für $n = 5, 7, 9, . 2\nu-1$ solche, in welchen ebenfalls die $\nu-1$ ersten Bernoulli'schen Zalen multiplicativ und additiv verknüpft erscheinen. So ist für

$n = 6$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 6$$
$$\beta+2\gamma+4\delta = 5$$

α	β	γ	δ
1	5	0	0
2	3	1	0
2	1	2	0
3	1	0	1

$$\frac{1}{2^5 5!}+\frac{B_1}{2^3(2!)^2}+\frac{B_2}{2.3!\,4!}+\frac{B_1^2}{(2!)^4}=\frac{1}{6!}$$

$n = 8$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=8$$
$$\beta+2\gamma+4\delta+6\varepsilon=7$$

α	β	γ	δ	ε
1	7	0	0	0
2	5	1	0	0
2	3	2	0	0
4	3	0	1	0
4	1	3	0	0
6	1	0	0	1

$$\frac{1}{2^7 7!}+\frac{B_1}{2^5(2!)^2}-\frac{B_2}{2^3(4!)^2}+\frac{B_3}{2\,(6!)^2}+\frac{1}{2^3 2!}\left(\frac{B_1}{2!}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2.3!\,4!}\left(\frac{B_1}{2!}\right)^3=\frac{1}{8!}$$

$n = 5$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=5$$
$$\beta+2\gamma+4\delta=4$$

α	β	γ	δ
1	4	0	0
2	2	1	0
3	0	2	0
4	0	0	1

$$\frac{1}{2^4 4!}+\frac{B_1}{2^3(2!)^3}-\frac{B_2}{(4!)^2}+\frac{B_1^2}{(2!)^3 3!}=\frac{1}{5!}$$

$a = 7$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=7$$
$$\beta+2\gamma+4\delta+6\varepsilon=6$$

α	β	γ	δ	ε
1	6	0	0	0
2	4	1	0	0
3	2	2	0	0
4	2	0	1	0
4	0	3	0	0
5	0	1	1	0
6	0	0	0	1

$$\frac{1}{2^6 6!}+\frac{B_1}{2^4(2!)^2 4!}-\frac{B_2}{2^2 2!\,(4!)^2}+\frac{B_3}{(6!)^2}-\frac{B_1 B_2}{2!\,4!\,5!}+\frac{B_1^2}{2^3(2!)^4 3!}$$
$$+\frac{B_1^3}{(2!)^3 3!\,4!}=\frac{1}{7!}$$

e) Wenn $k > n-1$ angenommen wird, so verschwindet C_k^n, weil dann $\binom{n-1}{k} = 0$ ist. Bei geradem k durchläuft $\alpha!$ die

Werte von $(n-k)!$ bis $(n-1)!$, bei **ungeradem** k jene von $(n-k)!$ bis $(n-2)!$, so dass im letzteren Falle $(n-1)^2$ ein allen Gliedern gemeinsamer Factor ist, C_k^n daher für ungerade k und $n=1$ zweimal verschwindet. Durch Absonderung des beliebigen Factors $n-g$ von $\binom{n-1}{k}$ und vorläufiger Ausschliessung des Falles (k ungerade und gleichzeitig $n=1$) entsteht wegen

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{g-1} \frac{\binom{n-g-1}{k-g}}{g\binom{k}{g}} \cdot (n-g)$$

und

$$\left[\frac{\binom{n-1}{k}}{n-g}\right]_{n=g} = \frac{(-1)^{k-g}}{g\binom{k}{g}}$$

wenn beide Seiten von Nr. 3) durch $n-g$ dividirt und dann $n=g$ gesetzt wird:

$$\left[\frac{C_k^n}{n-g}\right]_{n=g} = (-1)^g (k-g)!\,(g-1)! \times$$
$$\left\{\Sigma \frac{n!\left(\frac{B_1}{2!}\right)^\gamma \left(-\frac{B_2}{4!}\right)^\delta \cdots \left((-1)^{r+1}\frac{B_r}{(2r)!}\right)^\varkappa}{\alpha!\,(-2)^\beta \beta!\quad \gamma!\quad \delta!\quad \ldots\quad \varkappa!}\right\}_{n=g} \tag{6}$$

Bei **ungeradem** k und $n=1$ ist

$$\left[\frac{C_k^n}{(n-1)^2}\right]_{n=1} = -(k-1)!\,n \times$$
$$\left\{\Sigma \frac{(n-2)!\left(\frac{B_1}{2!}\right)^\gamma \left(-\frac{B_2}{4!}\right)^\delta \cdots \left((-1)^{r+1}\frac{B_r}{(2r)!}\right)^\varkappa}{\alpha!(-2)^\beta \beta!\quad \gamma!\quad \delta!\quad \ldots\quad \varkappa!}\right\}_{n=1} \tag{7}$$

Mit Berücksichtigung von

$$\left[\frac{(n-2)!}{(n-k)!}\right]_{n=1} = (-1)^{k-2}(k-2)!;\quad \text{wo}\quad \alpha = n-k = -(k-1)$$

$$\left[\frac{(n-2)!}{(n-k+1)!}\right]_{n=1} = (-1)^{k-3}(k-3)!\quad \text{wo}\ \alpha = n-k+1 = -(k-2)$$

. . . .

gilt auch

k ungerade $\left[\frac{C_k^n}{(n-1)^2}\right]_{n=1} = -(k-1)!\, n \times$

$$\left\{\frac{\Sigma\left(\frac{B_1}{2!}\right)^\gamma\left(-\frac{B_2}{4!}\right)^\delta\cdots\left((-1)^{r+1}\frac{B_r}{(2r)!}\right)^\varkappa}{(-2)^\beta(\alpha-1)!\ \ \gamma!\ \ \delta!\ \ \ldots\ \ \varkappa!}\right\}_{n=1} \tag{7'}$$

wo dann die Grössen α, β, γ ... auf die bereits angegebene Art aus

$$\alpha+\beta+\gamma\ \ \ldots\ \ +\varkappa = 1$$
$$\beta+2\gamma+4\delta\ \ \ldots\ \ 2r\varkappa = k\quad (\alpha < 0)$$

zu bestimmen sind und hernach

$$(\alpha-1)! = (-1)^{-\alpha-1}(-\alpha-1)!$$

zu setzen ist.

Bei geradem k nimmt der unter dem Summenzeichen in Nr. 3) stehende Factor $\frac{n!}{\alpha!}$ die Werte von

$$\frac{n!}{(n-k)!}\quad\text{bis}\quad\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

an, welche für $n=1$ mit Ausnahme des letzten ($=n$) sämtlich verschwinden; dem Factor $\frac{n!}{(n-1)!}$ entspricht

$$\alpha = n-1$$

daher ist

$$\beta = \gamma = \delta\ \ \ldots\ \ = 0,\quad \varkappa = 1$$

und

$$\left[\frac{C_k^n}{n-1}\right]_{n=1} = (-1)^{\frac{k}{2}}\ \frac{B_{k/2}}{k};\quad k\ \text{gerade} \tag{8}$$

Bei ungeradem k nimmt $\frac{n!}{\alpha!}$ die Werte

$$\frac{n!}{(n-k)!}\quad\text{bis}\quad\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

an, welche für $n=2$ mit Ausnahme des letzten sämtlich verschwinden; dem Factor $\frac{n!}{(n-2)!}$ entspricht

$$\alpha = n-2$$

daher ist

$$\beta = 1;\quad \varkappa = 1,\quad \gamma = \delta\ \ \ldots\ \ = 0$$

und

$$\left[\frac{C_k^n}{n-2}\right]_{n=2} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{B_{\frac{k-1}{2}}}{k-1}; \quad k \text{ ungerade} \qquad 9)$$

Diese beiden an und für sich bemerkenswerten Resultate haben auch insofern eine praktische Bedeutung, als sich mit ihrer Hilfe die für höhere Facultäten-Coefficienten gewonnenen Formeln mittelst der Einsetzungen $n = 1$ resp. $n = 2$ leicht auf ihre Richtigkeit prüfen lassen.

2.

Die Einführung der combinatorischen Gebilde $\mathfrak{B}$, definirt durch

$$x^m = \left(\frac{v}{2}\cot h\frac{v}{2} - 1\right)^m = \left(-\frac{B_1}{2!}v^2 + \frac{B_2}{4!}v^4 - \frac{B_3}{6!}v^6 \ldots\right)^m$$
$$= (-1)^m(\mathfrak{B}_1{}^m v^{2m} - \mathfrak{B}_2{}^m v^{2m+2} \ldots + (-1)^{r+1}\mathfrak{B}_r{}^m v^{2m+2r-2} \ldots) \quad 10)$$

wo $\coth v$ die hyperbolische Cotangente

$$= \frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}$$

bezeichnet, führt zu einer eigenartigen Abhängigkeits-Form.

Ausgehend von der Formel Nr. 1) ist zunächst

$$\frac{v}{e^v - 1} = \frac{v}{2}\cot h\frac{v}{2} - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}\cot h\frac{v}{2} - 1 - \frac{v}{2} + 1$$

$$\frac{v}{2}\cot h\frac{v}{2} - 1 = x$$

und

$$-\frac{v}{2} + 1 = z$$

gesetzt, ist

$$\left(\frac{v}{e^v - 1}\right)^n = (x + z)^n$$

und

$$\left\{D^k\left(\frac{v}{e^v - 1}\right)^n\right\}_0 = \left\{D^k(x+z)^n\right\}_0 = \left\{k!\, n!\, \Sigma \frac{D^\varrho x^r . D^\sigma z^s}{r!\, \varrho!\, s!\, \sigma!}\right\}_0 \qquad 11)$$

wo für r, s und ϱ, σ alle möglichen gleichen und ungleichen den Gleichungen

$$r + s = n$$
$$\varrho + \sigma = k$$

genügenden ganzen Zalen zu setzen sind.

Nun ist

$$[D^\varrho x^r]_{v=0} = \begin{cases} (-1)^{\frac{\varrho}{2}+r} \varrho! \mathfrak{B}^r_{\frac{\varrho}{2}-r+1} & \varrho \text{ gerade und } \geqq 2r \\ 0 \dots\dots\dots\dots & \varrho \text{ ungerade oder } < 2r \end{cases}$$

$$\mathfrak{B}_m{}^0 = 0 \quad m > 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1{}^0 = 1$$

$$\mathfrak{B}'_{\frac{\varrho}{2}} = B_{\frac{\varrho}{2}}$$

ferner

$$[D^\sigma z^s]_{v=0} = (-\tfrac{1}{2})^\sigma s(s-1)\dots(s-\sigma+1)\left[-\frac{v}{2}+1\right]^{s-\sigma}_{v=0} \quad \sigma \leqq s$$

$$= \begin{cases} (-\tfrac{1}{2})^\sigma \dfrac{s!}{\sigma!\,(s-\sigma)!}, & \sigma \leqq s \\ 0, & \sigma > s \end{cases}$$

dies in Nr. 1) eingesetzt, giebt mit Rücksicht darauf, dass das Vorzeichen unter dem Summenzeichen

$$(-1)^{\frac{\varrho}{2}+\sigma} = (-1)^{k+\frac{\varrho}{2}}$$

und nach Vereinigung mit jenem vor demselben

$$= (-1)^{2k+\frac{\varrho}{2}} = (-1)^{\frac{\varrho}{2}} \quad \text{ist:}$$

$$C_k{}^n = k!\,n!\binom{n-1}{k}\,\Sigma\,(-1)^{\frac{\varrho}{2}+r}\frac{B_{\frac{\varrho}{2}-r+1}}{2^\sigma(\sigma!)^2 r!\,(s-\sigma)!} \tag{12}$$

wo r, s und ϱ, σ den Bedingungen

$$r+s=n \quad \varrho \geqq 2r \quad \text{und gerade}$$

$$\varrho + \sigma = k \quad \sigma \leqq s$$

zu genügen haben.

Bemerkenswert sind die folgenden speciellen Fälle:

a) $k = n - 1, \quad C_{n-1}{}^n = (n-1)!$

s ungerade $r + s = n \qquad \varrho \geqq 2r$ und gerade

$$\varrho + \sigma = n - 1 \quad \sigma \leqq s$$

$$\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-1}{2}}}{\frac{n-1}{2}!\;\frac{n+1}{2}!} - \frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{n-3}{2}!\;\frac{n+3}{2}!} \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\,\mathfrak{B}^1{}_{\frac{n-1}{2}}}{1!\,(n-1)!}$$

$$\frac{1}{(2!)^2 2^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{n-3}{2}!\;\frac{n-1}{2}!} - \frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-5}{2}}}{\frac{n-5}{2}!\;\frac{n+1}{2}!} \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathfrak{B}_1{}_{\frac{n-3}{2}}}{1!\,(n-3)!}\right)$$

$$+ \frac{(4!)^2 2^4}{1}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-5}{2}}}{\frac{n-5}{2}!\;\frac{n-3}{2}!} - \frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-7}{2}}}{\frac{n-7}{2}\;\frac{n-1}{2}} \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1{}_{\frac{n-5}{2}}}{1!\,(n-5)!}\right)$$

. . . .

$$+ \frac{1}{2^{n-3}\,((n-3)!)^2} \cdot \frac{B_1{}^1}{1!\,2!} +$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2 1!} = \frac{1}{n!} \qquad 13)$$

ϱ	σ	r	s	$\frac{\varrho}{2}-r+1$
$n-1$	0	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	1
		$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	2
		. .	. .	. . . .
		1	$n-1$	$\frac{n-1}{2}$
$n-3$	2	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	1
		$\frac{n-5}{2}$	$\frac{n+5}{2}$	2
		. .	. .	. . . .
		1	$n-1$	$\frac{n-3}{2}$
.	.	.	.	.
2	$n-3$	1	$n-1$	1
0	$n-1$	0	n	1

$k=n-1$, n **gerade**. Da ϱ **gerade** sein muss, ist in der vorigen Tabelle $n-2$ statt $n-1$, $n-4$ statt $n-3$ etc. zu schreiben und σ und s entsprechend zu erhöhen; dann ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-2}{2}}}{\frac{n-2}{2}!\,\frac{n}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-4}{2}}}{\frac{n-4}{2}!\,\frac{n+2}{2}!}\cdots(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1{}_{\frac{n-2}{2}}}{1!\,(n-2)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2^3(3!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-4}{2}}}{\frac{n-4}{2}!\,\frac{n-2}{2}!}\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-6}{2}}}{\frac{n-6}{2}!\,\frac{n}{2}!}\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1{}_{\frac{n-4}{2}}}{1!\,(n-4)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2^5(5!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-6}{2}}}{\frac{n-6}{2}!\,\frac{n-4}{2}!}\,\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-8}{2}}}{\frac{n-8}{2}!\,\frac{n-2}{2}!}\cdots+(-1)^{\frac{n-4}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-6}{2}}}{1!\,(n-6)!}\right)$$

. . . .

$$+\frac{1}{2^{n-3}[(n-3)!]^2}\frac{\mathfrak{B}_1^{\,1}}{1!\,2!}+\frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2}=\frac{1}{n!} \qquad 14)$$

b) $k=n-2$

$$C_{n-2}{}^{n}=(n-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

n gerade

$$\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-2}{2}}}{\frac{n-2}{2}!\,\frac{n+2}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-4}{2}}}{\frac{n-4}{2}!\,\frac{n+4}{2}!}\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\mathfrak{B}^2_{\frac{n-2}{2}}}{1!\,(n-1)!}$$

$$+\frac{1}{2^2(2!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-4}{2}}}{\frac{n-4}{2}!\,\frac{n}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-6}{2}}}{\frac{n-6}{2}!\,\frac{n+2}{2}!}\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-4}{2}}}{1!\,(n-3)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2^4(4!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{u-6}{2}}}{\frac{n-6}{2}!\,\frac{n-3}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-8}{2}}}{\frac{u-8}{2}!\,\frac{n}{2}!}\cdots+(-1)^{\frac{n-4}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-6}{2}}}{1!\,(n-5)!}\right)$$

. . . .

$$+\frac{1}{2^{n-4}[(n-4)!]^2}\frac{\mathfrak{B}_1^{\,1}}{3!}+\frac{1}{2^{n-2}[(n-2)!]^2\,2!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n-1}\right) \qquad 15)$$

$k = n-2$, n **ungerade**

$$\frac{1}{1}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{n-3}{2}!\,\frac{n+1}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-5}{2}}}{\frac{n-5}{2}!\,\frac{n+3}{2}!}\dots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-3}{2}}}{1!(n-2)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2^3(3!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-5}{2}}}{\frac{n-5}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-7}{2}}}{\frac{n-7}{2}!\,\frac{n+1}{2}!}\dots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-5}{2}}}{1!(n-4)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2^5(5!)^2}\left(\frac{\mathfrak{B}_1^{\frac{n-7}{2}}}{\frac{n-7}{2}!\,\frac{n-3}{2}!}-\frac{\mathfrak{B}_2^{\frac{n-9}{2}}}{\frac{n-9}{2}!\,\frac{n-1}{2}!}\dots+(-1)^{\frac{n-5}{2}}\frac{\mathfrak{B}^1_{\frac{n-7}{2}}}{1!(n-6)!}\right);$$

. . . .

$$+\frac{1}{2^{n-4}[(n-4)!]^2}\frac{\mathfrak{B}_1^{\,1}}{3!}+\frac{1}{2^{n-2}[(n-2)!]^2}$$
$$=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}\right) \qquad 16)$$

c) Die Annahme $n = 1$ führt in Verbindung mit den Ergebnissen Nr. 8) und 9) zu einer bekannten Recursions-Formel für die Bernoulli'schen Zalen.

3.

Die von **Euler** zur Auffindung zalentheoretischer Sätze angewendete Methode der Vergleichung der Coefficienten zweier verschiedenen für eine und dieselbe Function geltenden gleichwertigen Reihenentwicklungen, hat **Schlömilch** in diesem Journale IX. Bd. 333 u. s. f. benutzt um Beziehungen der Facultäten-Coefficienten unter sich und mit Bernoulli'schen Zalen aufzufinden und fand u. A.

$$B_1 C_2^n - B_2 C_4^n + B_3 C_6^n \dots = \frac{(n-1)!}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1}$$

Ebenso leicht kann eine Relation zwischen Facultäten-Coefficienten und Euler'schen Zalen E gefunnden werden.

Es ist

$$\frac{2}{e^y + e^{-y}} = z = 1 - \frac{E_1}{2!} y^2 + \frac{E_2}{4!} y^4 - \frac{E_3}{8!} y^6 \ldots \quad -\frac{\pi}{2} < y < + \frac{\pi}{2}$$

Für

$$y = \log(1+x)$$

verwandelt sich diese Entwicklung in

$$2 \frac{1+x}{x^2 + 2x + 2} = 1 - \frac{E_1}{2!} [\log(1+x)]^2 + \frac{E_2}{4!} [\log(1+x)]^4$$

$$- \frac{E_3}{6!} [\log(1+x)]^6 \ldots \qquad 17)$$

Die echt gebrochene Function ist aber auch

$$= \frac{2x^3 - 2x + 4}{x^4 + 4} = \frac{1}{1 + \frac{x^4}{4}} - \frac{x^2}{2\left(1 + \frac{x^4}{4}\right)} + \frac{x^3}{2\left(1 + \frac{x^4}{4}\right)}$$

besteht daher, wenn ein $x^2 < 1$ vorausgesetzt wird, aus drei geometrischen Reihen oder aus dem Producte der geometrischen Reihe für $\frac{1}{1 + \frac{x^4}{4}}$, welche nur Potenzen von x^4 enthält mit dem Polynom $\frac{1}{4}(2x^3 - 2x^2 + 4)$, in welchem das Glied mit der ersten Potenz von x nicht vertreten ist. Es folgt daraus, dass die mit diesem Bruche gleichwertige recurrente Reihe $\sum_{r=0} a_r x^r$ mit der Relationsscala [2, 2] Potenzen mit Exponenten von der Form $4\nu + 1$ nicht enthalten kann, daher ist

$$a_r = 0, \quad r = 4\nu + 1$$

ferner ist

$$a_r = (-\tfrac{1}{4})^{\frac{r}{4}}, \quad r = 4\nu; \qquad a_r = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4})^{\frac{r-2}{4}}, \quad r = 4\nu + 2$$

$$a_r = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4})^{\frac{r-3}{4}}, \quad r = 4\nu + 3$$

Die Potenzen von $\log(1+x)$ in Nr. 17) rechter Hand lassen sich mit Hilfe von

$$[\log(1+x)]^p = C_0^p x^p - C_1^{p+1} \frac{x^{p+1}}{p+1} + C_2^{p+2} \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \cdots$$

$$-1 < x < +1$$

entwickeln, die gleichnamigen Potenzen zusammenziehen und die Coefficienten dieser neuen Potenzreihe mit jenen so eben gefundenen (a_r) vergleichen.

Es ergeben sich hierdurch die gewünschten Beziehungen zwischen Facultäten-Coefficienten und Euler'schen Zalen mit Unterscheidung der vier Fälle:

a) $r = 4\nu$

$$E_1 C_{4\nu-2}^{4\nu} - E_2 C_{4\nu-4}^{4} + E_3 C_{4\nu-6}^{4\nu} \ldots + E_{2\nu-1} C_2^{4\nu} - E_{2\nu} C_0^{4\nu} = (-1)^{\nu+1} \frac{(4\nu)!}{4^\nu}$$

b) $r = 4\nu+1$

$$E_1 C_{4\nu-1}^{4\nu+1} - E_2 C_{4\nu-3}^{4\nu+1} + E_3 C_{4\theta-5}^{4\nu+1} \ldots + E_{2\nu-1} C_3^{4\nu+1} - E_{2\nu} C_1^{4\nu+1} = 0$$

c) $r = 4\nu+2$

$$E_1 C_{4\nu}^{4\nu+2} - E_2 C_{4\nu-2}^{4\nu+2} + E_3 C_{4\nu-4}^{4\nu+2} \ldots - E_{2\nu} C_2^{4\nu+2} + E_{2\nu+1} C_0^{4\nu+2} = (-1) \frac{\nu(4\nu+2)!}{2.4^\nu}$$

d) $r = 4\nu+3$

$$E_1 C_{4\nu+1}^{4\nu+3} - E_2 C_{4\nu-1}^{4\nu+3} + E_3 C_{4\nu-3}^{4\nu+3} \ldots - E_{2\nu} C_3^{4\nu+3} + E_{2\nu+1} C_1^{4\nu+3} = \frac{(-1)^\nu (4\nu+3)!}{2.4^\nu}$$

Brünn, September 1890.

XVIII.

Dreiteilung jedes Winkels mittelst einer festen Hyperbel.

Von

Herrn **Wilhelm Panzerbieter,**

Oberlehrer am Falkrealgymnasium in Berlin.

Analysis. Macht man den gegebenen Winkel α zum Centriwinkel BMC eines Kreises mit beliebigem Radius, und nimmt man an, dass die Bogen BP_1, P_1R und CR die gleichen Drittel des Bogens BC seien, so muss die Halbirungslinie des Winkels α die Sehnen BC und P_1R in ihren Mittelpunkten Q resp. Q_1 treffen, die Sehne BP_1 daher gleich $2P_1Q_1$ sein, also der Punkt P_1 auf derjenigen Hyperbel liegen, deren Punkte doppelt so weit von B entfernt sind, als von der Halbirungslinie des Winkels α. Da für diese Hyperbel die lineare Excentricität gleich der doppelten Hauptachse ist, so ergiebt sich sofort folgende Construction:

Construction. Man teile die zu den Centriwinkel α gehörige Sehne BC in die drei gleichen Teile BP, PO und OC und construire diejenige Hyperbel, welche O zum Mittelpunkt, P zu dem einen Scheitel und B zu dem entsprechenden Brennpunkt hat. Diese Hyperbel, deren anderer Scheitel in C liegt, schneidet den Kreis ausserdem in den Punkten P_1; P_2 und P_3. Dann ist:

Wkl. $BMP_1 = \frac{\alpha}{3}$; Wkl. $BMP_2 = 120^0 - \alpha/3$ und Wkl. $BMP_3 = 120^0 + \frac{\alpha}{3}$.

Beweis. Ist MQ die Halbirungslinie des Centriwinkels α, so ist
$$BP = 2PQ, \quad \text{also} \quad BO = 2PO$$
mithin ist MQ die Directrix der construirten Hyperbel; mithin ist jeder Punkt der letzteren doppelt so weit von B entfernt, als von MQ. Es ist daher:

1) $$BP_1 = 2P_1Q_1; \quad \text{mithin}$$

Wkl. $BMP_1 = 2$ Wkl. $P_1MQ_1 = 2\left(\frac{\alpha}{2} - \text{Wkl. } BMP_1\right)$; daher

$$\text{Wkl. } BMP_1 = \frac{\alpha}{3}$$

2) $$BP_2 = 2P_2Q_2; \quad \text{mithin}$$

$$\text{Wkl. } BMP_2 = 2 \text{ Wkl. } P_2MQ_2 = 2\left(180^0 - \frac{\alpha}{2} - \text{Wkl. } BMP_2\right)$$

daher:

$$\text{Wkl. } BMP_2 = 120^0 - \frac{\alpha}{3}$$

3) $$BP_3 = 2P_3Q_3; \quad \text{mithin}$$

$$\text{Wkl. } BMP_3 = 2 \text{ Wkl. } P_3MQ_3 = 2(180^0 - (\text{Wkl. } BMP_3 - \alpha/2))$$

daher:

$$\text{Wkl. } BMP_3 = 120^0 + \alpha/3$$

Anmerkung 1. Es ergiebt sich ohne weiteres, dass die einmal ausgeführte Construction der Hyperbel für eine beliebige Strecke BC zur Trisection eines jeden Winkels ausreicht; denn man braucht nur BC zur Sehne desjenigen Kreises zu machen, in welchem der gegebene Winkel der dieser Sehne gegenüber liegende Centriwinkel ist, um sofort die Punkte P_1; P_2 und P_3 zu erhalten.

Anmerkung 2. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, die Sehne BC mit a und die Sehne BP_1 mit b, so gilt für b die kubische Gleichung

$$b^3 - 3r^2b + ar^2 = 0$$

(da $b = 2r \sin \alpha/6$; $a = 2r \sin \alpha/2$ und $\sin \alpha/2 = \sin \alpha/6\,(3 - 4 \sin^2 \alpha/6)$ ist). Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$2r \sin \alpha/6; \; 2r \sin (60^0 - \alpha/6) \text{ und } -2r \sin (60^0 + \alpha/6)$$

und werden daher durch die Sehnen BP_1; BP_2 und BP_3 geometrisch dargestellt.

Anmerkung 3. Da

$$\text{Wkl. } BMP_3 = 120^0 + \frac{\alpha}{3}$$

ist, so ist

$$\text{Wkl. } MBP_3 = 30^0 - \frac{\alpha}{6}$$

mithin ist BP_3 eine Trisectionslinie des Winkels MBC oder $90^0 - \alpha/2$; in gleicher Weise ergiebt sich, dass BP_2 den concaven Winkel MBX oder $90^0 + \alpha/2$ und BP_1 den convexen Winkel MBX oder $270^0 - \alpha/2$ drittelt. Bezeichnet man ferner den Nebenwinkel von α mit CMA oder γ (und seine zugehörige Sehne AC mit c), so ist

$$\text{Wkl. } AMP_3 = 60^0 - \frac{\alpha}{3}$$

daher ist MP_3 eine Trisectionslinie des Winkels γ; ebenso drittelt MP_2 den Winkel $360^0 - \gamma$ und MP_1 den Winkel $360^0 + \gamma$. Mithin liegen die vier Punkte C, P_1, P_2 und P_3 auch auf derjenigen Hyperbel, welche in analoger Weise durch AC so gelegt wird, dass A ein Brennpunkt derselben und C der beiden Hyperbeln gemeinsame Scheitelpunkt ist.

Nimmt man die Sehne $BC(a)$ zur Xachse und die Halbirungslinie MQ des Winkels α zur Yachse eines Coordinatensystems, so lautet die Gleichung der durch BC gelegten Hyperbel:

$$y^2 = ax + 3x^2 - \frac{a^2}{4}$$

und die Gleichung des Kreises:

$$\left(y + \frac{c}{2}\right)^2 + x^2 = r^2$$

oder, da

$$a^2 + c^2 = 4r^2 \text{ ist:}$$

$$y^2 + cy + x^2 = \frac{a^2}{4}$$

Aus der Hyperbelgleichung folgt:

$$ax + 3x^2 - y^2 = \frac{a^2}{4}$$

mithin ist:

$$ax + 3x^2 - y^2 = y^2 + cy + x^2$$

oder:

$$x^2 - y^2 + \frac{a}{2}x - \frac{c}{2}y = 0$$

oder:

$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(y + \frac{c}{4}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{16}$$

Verlegt man daher den Anfangspunkt Q des Coordinatensystems durch parallele Verschiebung der Achsen nach dem Halbirungspunkte S des Radius MC und vertauscht man die Achsen mit einander, so erhält man die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = \frac{c^2 - a^2}{16}$$

welcher die Coordinaten der Schnittpunkte des Kreises und der Hyperbel gleichfalls genügen müssen. Die vier Punkte C, P_1, P_2 und P_3 liegen daher auch auf einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt S ist, und deren Achsen den Halbirungslinien der Winkel α und γ parallel laufen.

Hieraus ergiebt sich sofort folgende weitere Lösung des Trisectionsproblems:

Construction. Man zeichne eine beliebige gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt S sei, trage an die Achse SX' derselben den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, dessen Schenkel die gleichseitige Hyperbel (oder ihre conjugirte) in C und durch S verlängert in M schneide, und schlage um M mit dem Radius MC einen Kreis, der die gleichseitige Hyperbel ausserdem in den Punkten P_1, P_2 und P_3 schneidet. Trägt man alsdann an CM den Winkel $CMB = \alpha$ an, so ist wiederum

$$\text{Wkl. } BMP_1 = \frac{\alpha}{3}; \quad \text{Wkl. } BMP_2 = 120^0 - \alpha/3 \quad \text{und}$$

$$\text{Wkl. } BMP_3 = 120^0 + \alpha/3$$

Die gewonnenen Resultate ergeben daher auch folgenden Lehrsatz: Der einem rechtwinkligen Dreiecke ABC umgeschriebene Kreis M wird von der durch die Mitten der drei Seiten und den Scheitel C des rechten Winkels gelegten gleichseitigen Hyperbel in den drei Punkten P_1, P_2 und P_3 derartig geschnitten, dass AP_1 und BP_3 Trisectionslinien der spitzen Winkel BAC und ABC, AP_2 und BP_2 Trisectionslinien der entsprechenden Nebenwinkel und MP_1 und MP_3 Trisectionslinien der Winkel BMC und AMC sind.

Dostor, Prof. G., Mémoire sur une méthode nouvelle de transformation des coordonnés dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces des deux premières degrés. 1856. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

— Propriétés nouvelles des quadrilatères en général avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles etc. 1868. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

— Nouvelle détermination analytique des foyers et directrices dans les sections coniques etc. 1879. Geh. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Fahland, H., Leitfaden für den planimetrischen Unterricht in Gymnasien und Realschulen. Mit 1 Taf. 1857. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Grunert, Prof. J. A., Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Coordinatensysteme. Mit 1 Tafel. 1857. Geh. Preis 5 Mk. 40 Pf.

Hain, E., Mathematische Unterrichtsstunden. 1. Heft: Einfache Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. 1884. Geh. Preis 50 Pf.

— Dass. 2. Heft: Leichte grammatische Konstruktionsaufgaben. Mit 1 Tafel. 1885. Geh. Preis 50 Pf.

Helmling, Prof. P., Ueber die Integration der allgemeinen Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx} \times xy^2 = x$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. 1879. Geh. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Hofmann, Fr., Die synthetischen Grundlagen der Theorie des Tetraedroid-Komplexes. 1887. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Hoppe, Prof. R., Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil: Lehrbuch der analytischen Curventheorie. 1880. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

— Dass. II. Teil: Principien der Flächentheorie. 2. Aufl. 1890. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

— Tafeln zur 30stelligen logarithmischen Rechnung. 1876. Geh. Preis 80 Pf.

Houël, Prof. J., Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. 1863. Geh. Preis 1 Mk.

Jentzsch, H., Geometrische und mechanische Theorie der Astroiden. Mathematische Monographie. Mit 5 Tafeln. 1863. Geh. Preis 5 Mk.

Oettinger, L., Weitere Ausführungen der politischen Arithmetik. 1863. Geh. Preis 6 Mk.

Pfeil, Graf L. v., Anwendung der Sekanten zur Auffindung der Sinus, Tangenten und Bogen kleiner Winkel aus Tafeln von 5 Stellen. 1864. Geh. Preis 50 Pf.

Schlömilch, Prof. O., Neue Methode zur Summirung endlicher und unendlicher Reihen. 1849. Geh. Preis 90 Pf.

Sella, Qu., die geometrischen Prinzipien des Zeichnens, insbesondere die der Axonometrie. In's Deutsche übertragen von Dr. **M. Curtze.** Mit 4 Tafeln. 1865. Geh. Preis 1 Mk.

Worpitzky, J., Beiträge zur Integration der Riccati'schen Gleichung. 1862. Geh. Preis 1 Mk. 50 Pf.

INHALT.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Zweite Reihe.

Zehnter Teil. Viertes Heft.

(Mit 3 lithographirten Tafeln.)

Leipzig.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,
J. Sengbusch.

1891.

XIX.

Teilungen.

Von

Rudolf Gaertner.

Vorwort. Geometrische Gebilde durch Teilung auf einander zu beziehen ist ein schon gebrauchtes Verfahren. Man spricht von dem geometrischen Ort der harmonischen Teilung. Das Abbildungsprincip der reciproken Radien ist nichts Anderes. In einer kurzen Schrift über „die Polaren der algebraischen Curven“ *) zeigte ich, dass auch die Polaren als das Ergebniss einer Teilung angesehen werden können. Die Principien der Teilung zu verallgemeinern ist die Aufgabe vorliegender Abhandlung.

Inhalt.

---

*) Vergl. Grunert's Arch. d. Math. u. Phys. Zweite Reihe, VII, 2.

§ 1. Bedeutung der Teilungen.

Auf einer Geraden seien n „Grundpunkte“ R_1 bis R_n gegeben. Ein fester Punkt O dieser Geraden sei der Nullpunkt der Messung. Derselbe heisse „Pol“. Die Lage jedes Punktes der Geraden wird durch seine Entfernung vom Pol, die sogenannte „Polferne“ gemessen. Es bestehen die n „gegebenen Polfernen“ r_1 bis r_n. Die Gerade selbst heisse „Polgerade“ zum Unterschiede von denjenigen Geraden, welche nicht durch den Pol gehen.

Die n gegebenen Polfernen sollen n „Einheiten“ vorstellen, mittelst deren jeder beliebige Punkt der Polgeraden gemessen, d. h. auf den festen Pol bezogen wird. Diese beliebigen Punkte der Polgeraden treten als gesuchte Punkte auf und werden durch die „gesuchten Polfernen“ ϱ gemessen. Ihre Lage wird daher stets durch eine Gleichung von der Form

$$(0) \qquad F(\varrho, r_1, r_2, \ldots r_n) = 0 \text{ [1]}$$

auf den festen Pol bezogen.

Wie wir nun gewohnt sind von harmonischer Teilung zu sprechen und diese Teilung durch eine Construction zu erzeugen, so wollen wir in vorliegendem Falle annehmen, es gäbe eine Teilung, d. h. Construction, welche jene gesuchten Punkte erzeugt und nennen letztere Punkte „Teilpunkte“ die Gleichung (0) jedoch „Teilungsgleichung“. [2])

---

1) Der höchste Grad der Variabelen ϱ giebt die Zahl der gesuchten Punkte an.

2) Die einfachste Form einer Teilungsgleichung

$$\varrho = kr$$

zeigt an, dass auf einer Polgeraden der Pol O sowie ein Grundpunkt R gegeben, dagegen ein Teilpunkt gesucht ist, welcher der Gleichung

$$\varrho = kr$$

genügt. Ist $k = \frac{1}{3}$ so muss die Strecke OR in drei gleiche Teile geteilt werden. Das erste Drittel von O aus, in der Richtung des Grundpunktes R angetragen, bestimmt den Teilpunkt. Wir führen das Beispiel an um zu zeigen, dass der Begriff der Teilung der einfachsten Form unserer Gleichungen zu Grunde liegt. Eine Teilung höheren Grades leichter anschaulich zu machen haben wir „Teilung“ und „Construction“ identificirt. Ob eine solche Construction möglich ist oder nicht, ob dieselben Teilpunkte durch eine Construction oder durch mehrere in ihrer Art verschiedene Constructionen erlangt werden können, gilt uns als völlig nebensächlich.

Indem wir die Teilung als Construction stets vollzogen denken, befinden sich die Teilpunkte auf der Polgeraden in der ihnen durch die Teilungsgleichung (0) vorgeschriebenen Lage. Setzen wir zur Abkürzung r an Stelle der gegebenen Polfernen r_1 bis r_n, so erkennen wir

I. *Die allgemeine Teilungsgleichung*

$$F(\varrho, r) = 0 \tag{1}$$

giebt eine Gleichung an, in der ausser der gesuchten Polferne ϱ und den gegebenen Polfernen r_1 bis r_n nur noch bestimmte „numerische Werte" enthalten sind.

Durch die gegebenen Polfernen r werden die Grundpunkte, durch die gesuchte Polferne ϱ die Teilpunkte auf den gemeinsamen festen Pol bezogen.

Wie jede Gleichung eine bestimmte Anzahl von Wurzeln, so bedingt jede Teilungsgleichung eine bestimmte Anzahl von Teilpunkten, gleichviel ob diese Punkte reell oder imaginär sind. Daraus schliessen wir

II. *Sind Pol und Grundpunkte der Lage nach gegeben, so wird durch die Teilungsgleichung* (1) *die Lage der Teilpunkte bestimmt.*

Wie ferner jede Gleichung durch jeden ihrer Wurzelwerte erfüllt wird, so gilt auch die Teilungsgleichung nicht nur für die Gesamtheit der sie bedingenden Teilpunkte, sondern

III. *Die Teilungsgleichung* (1) *gilt für jeden einzelnen Teilpunkt.* [1])

Waren die n Grundpunkte bisher in starrer Lage gedacht, so sollen sie sich jetzt nach beliebigem Gesetze in der Polgeraden bewegen. Jedem Moment der Bewegung entspricht dann eine starre Lage der Grundpunkte. Obgleich sich bei dieser Bewegung die n gegebenen Polfernen ändern, so werden die n Grundpunkte doch in jedem Moment der Bewegung als gegeben betrachtet, und zwar soll allgemein der Grundpunkt R_k in jeder Lage durch die gegebene Polferne r_k gemessen werden, d. h.

IV. *Die n Grundpunkte werden in jedem Moment der Bewegung durch dieselben n gegebenen Polfernen r auf den festen Pol bezogen.*

Die Bewegung der n Grundpunkte hat gemäss II. eine ent-

1) Bezieht sich aber stets auf den festen Pol als Nullpunkt.

sprechende Bewegung der Teilpunkte zur Folge. In jedem Moment der Bewegung bilden Grundpunkte und Teilpunkte ein starres System, welches stets durch dieselbe Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

auf den festen Pol bezogen wird.

Fällt bei der Bewegung der Grundpunkte und der davon abhängigen Bewegung der Teilpunkte einer der letzteren auf einen Grundpunkt, so gilt für diesen die Gleichung

$$\varrho = r \quad \text{oder} \quad \varrho - r = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{\varrho}{r} = 1$$

Fallen für den speciellen Fall $m = n$ sämtliche Teilpunkte mit den n Grundpunkten zusammen, so zeigt dies die Gleichung

$$(2) \qquad (\varrho - r_1)(\varrho - r_2) \ldots (\varrho - r_n) = 0$$

an. In diesem speciellen Falle ist

$$1 = \frac{\varrho}{r_1} = \frac{\varrho}{r_2} = \ldots = \frac{\varrho}{r_n}$$

und wir erkennen hier die anfangs erwähnten n „Einheiten" der Teilung. Die Teilung, welche Gleichung (2) angiebt, nennen wir „Einheitsteilung" oder „Grundteilung".

Mit jeder unendlich geringen Lagenänderung der Grundpunkte sei eine Drehung der Polgeraden — im Pol — um einen unendlich kleinen Winkel verbunden. Die n Grundpunkte mögen bei dieser Lagenänderung eine gegebene a. C. n. O. [1]) durchlaufen. Denken wir auf jeder Polgeraden die Teilung

---

1) a. C. n. O. Abkürzung für „algebraische Curve $n$ter Ordnung".

Anm. Satz IIIa lässt sich auch wie folgt ableiten: Grundcurve und Teilcurve seien durch die Gleichungen

$$G(x, y) = 0 \quad \text{resp.} \quad T(x, y) = 0$$

auf ein gemeinsames rechtwinkliges Achsensystem bezogen, dessen Anfangspunkt der feste Pol O sei. Transformiren wir beide Gleichungen in Polarcoordinaten und bezeichnen im Sinne unserer Teilungsgleichungen den Radiusvector der Grundcurve mit r, denjenigen der Teilcurve mit ϱ, so entstehen die Gleichungen

$$G(r, \psi) = 0 \quad \text{resp.} \quad T(\varrho, \psi) = 0$$

worin ψ den Rotationswinkel bedeutet. Da Grundpunkte und entsprechende Teilpunkte stets auf ein und derselben Polgeraden liegen, so ist der Rotations-

$$F(\varrho, r) = 0$$

als Construction erzeugt, so muss infolge II. der Ort dieser Teilung eine algebraische Curve sein. Es besteht wie vorher der Satz:

IIIa. *Die Teilungsgleichung gilt für jeden Punkt der Teilcurve* (vergl. III.)

Wie der Büschel der Polgeraden als Ort der Teilung in Bezug auf eine Grundcurve eine Teilcurve entstehen lässt, so zeigt das Bündel der Polgeraden als Ort der Teilung in Bezug auf eine „Grundfläche" eine „Teilfläche". Auch hier besteht der Satz:

IIIb. *Die Teilungsgleichung gilt für jeden Punkt der Teilfläche.*

Die zu Grunde gelegte Fläche wird durch die Einheitsteilung gemessen. Die Gleichungen beziehen sich wie stets so auch hier auf den festen Pol.

Die Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

hat also vor anderen Ortsgleichungen den Vorzug in ungeänderter Form auf der Geraden eine Punktreihe, in der Ebene eine algebraische Curve und im Raume eine Fläche zu bedeuten. Mit der Annahme der Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

aber sind wir gezwungen die Einheitsteilung

$$(\varrho - r_1)(\varrho - r_2) \ldots (\varrho - r_n) = 0$$

---

winkel ψ beiden Punktreihen jeder Polgeraden gemeinsam. Wir können ihn daher eliminiren und erhalten die Gleichung

$$(1) \qquad F(\varrho, r) = 0$$

dies ist die Gleichung der gesuchten Teilcurve in Polarcoordinaten. Jeder Punkt der Teilcurve genügt also der Gleichung (1), welche mit unserer Teilungsgleichung identisch ist. Wir erkennen, dass die Teilungsgleichungen als Polargleichungen aufgefasst werden können. Der Rotationswinkel tritt nicht mehr als Variabele auf, weil er der Grundcurven- und Teilcurvengleichung als gemeinsam eliminirt werden konnte. Mögen wir aber

$$F(\varrho, r) = 0$$

als Teilungsgleichung oder als eine auf Polarcoordinaten bezogene Ortsgleichung betrachten, in beiden Fällen muss die „Einheitsteilung" als Gleichung der Grundcurve aufgestellt werden.

als Gleichung desjenigen Grundgebildes, sei es Punktreihe, Curve oder Fläche zu betrachten, in Bezug auf welches die Teilung stattfindet.

Die folgenden Paragraphen beschäftigen sich mit Gebilden der Ebene.

§ 2. Allgemeine Beziehung zwischen gegebenen Polfernen und Rotationswinkel. Transformation der Teilungsgleichung.

Die Grundcurve sei durch eine Gleichung der Variabeln x und y auf rechtwinklige Coordinaten bezogen. Coordinaten-Anfang sei der feste Pol. Man ordne die Gleichung nach homogenen Summen. Bezeichnet $\overset{(k)}{u}$ die homogene Summe $k$ten Grades der Variabelen x und y, so hat die Gleichung der Grundcurve (a. C. n. O.) die Form

$$(0) \qquad \overset{(n)}{u} + \overset{(n-1)}{u} + \overset{(n-2)}{u} + \ldots + \overset{(0)}{u} = 0$$

Durch die Substitution

$$x = \varrho \cos \psi \quad \text{und} \quad y = \varrho \sin \psi$$

gehen wir zu einem Polarsystem über, dessen Pol mit dem ursprünglich gegebenen festen Pol zusammenfällt. Die homogene Summe $\overset{(k)}{u}$ kommt durch diese Substitution auf die Form $\varrho^k \overset{(k)}{\psi}$, worin $\overset{(k)}{\psi}$ eine homogene Summe $k$ten Grades bedeutet, welche sich von $\overset{(k)}{u}$ nur dadurch unterscheidet, dass $\cos \psi$ an Stelle von x nnd $\sin \psi$ an Stelle von y getreten ist. Die Gleichung (0) der Grundcurve geht daher über in

$$(1) \quad \varrho^n \overset{(n)}{\psi} + \varrho^{n-1} \overset{(n-1)}{\psi} + \varrho^{n-2} \overset{(n-2)}{\psi} + \ldots + \overset{(0)}{\psi} = 0$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\overset{(n)}{\psi}$, so entsteht

$$(2) \quad \varrho^n + \varrho^{n-1} \frac{\overset{(n-1)}{\psi}}{\overset{(n)}{\psi}} + \varrho^{n-2} \frac{\overset{(n-2)}{\psi}}{\overset{(n)}{\psi}} + \ldots + \frac{\overset{(0)}{\psi}}{\overset{(n)}{\psi}} = 0$$

Dieselbe a. C. n. O. wird aber auch durch die Einheitsteilung

$$(\varrho - r_1)(\varrho - r_2)(\varrho - r_3) \ldots (\varrho - r_n) = 0$$

auf den festen Pol bezogen. Entwickelt man dieselbe, so wird



$$(3)\quad \varrho^n - \varrho^{n-1} \overset{(1)}{r} + \varrho^{n-2} \overset{(2)}{r} - \ldots \pm 1 \overset{(n)}{r} = 0$$

Da die Gleichungen (2) und (3) für jeden Wert der veränderlichen Grösse ϱ einander gleich sind, so erkennen wir nach der Methode der unbestimmten Coefficienten folgende besonders wichtige Beziehung zwischen den gegebenen Polfernen r und dem Rotationswinkel ψ

$$\text{I.}\qquad \overset{(k)}{r} = \pm \frac{\overset{(n-k)}{\psi}}{\underset{\psi}{\overset{(n)}{}}} \quad \text{resp.} \quad \overset{(n-k)}{r} = \pm \frac{\overset{(k)}{\psi}}{\underset{\psi}{\overset{(n)}{}}}$$

Das Vorzeichen muss mit successiver Aenderung von k um 1 stetig wechseln.

Die gefundene Beziehung I. gestattet eine sehr einfache Transformation derjenigen Teilungsgleichungen, in denen die Polfernen r nur in der Summenform $\overset{(k)}{r}$ vorkommen, da diese Summen $\overset{(k)}{r}$ aus der Teilungsgleichung mittelst der Beziehung I. unmittelbar eliminirt werden können. Die Teilungsgleichung kommt dadurch auf die Form

$$F(\varrho, \psi) = 0$$

Befinden sich aber einzelne Polfernen r in der Teilungsgleichung, so dient zu ihrer Berechnung die Gleichung der Grundcurve in der Form

$$\text{II.}\qquad r^n + r^{n-1} \frac{\overset{(n-1)}{\psi}}{\underset{\psi}{\overset{(n)}{}}} + r^{n-2} \frac{\overset{(n-2)}{\psi}}{\underset{\psi}{\overset{(n)}{}}} + \ldots + \frac{\overset{(0)}{\psi}}{\underset{\psi}{\overset{(n)}{}}} = 0$$

in welcher r an Stelle des ϱ der Gleichung (2) getreten ist, doch wird die Berechnung der Polfernen r aus der Gleichung II. allgemein in den Fällen unmöglich, wo Gleichung II. den vierten Grad überschreitet. Nach Elimination von r aus Grundgleichung II. und Teilungsgleichung bleibt wie oben eine Gleichung von der Form

$$F(\varrho, \psi) = 0$$

Da, wie schon erwähnt $\varrho^k \overset{(k)}{\psi}$ die Polarform von $\overset{(k)}{u}$ ist, so geht Gleichung

$$F(\varrho, \psi) = 0$$

durch die Substitution

$$\varrho^k \overset{(k)}{\psi} = \overset{(k)}{u}$$

in

$$F(u) = 0$$

über. Es wird hier nur der rückwärtige Gang durchgemacht, welcher in der Anmerkung des § 1. eingeschlagen wurde, um die Teilungsgleichungen als Polargleichungen erkennen zu lassen.

§ 3. Volldeutige und minderdeutige Teilungen.

Das Wesen der allgemeinen Teilung tritt erst nach genauerer Untersuchung der Teilungsgleichung $m$ten Grades

$$(0) \qquad F^m(\varrho, r) = 0 \text{ [1]}$$

deutlich hervor. Es wird angenommen, dass diese Gleichung (0) nicht mehr durch ϱ dividirt werden kann, dass also das letzte Glied der Gleichung (0) kein ϱ enthält. Gleichung (0) sagt aus: Auf jeder Polgeraden bestehen m Teilpunkte, wenn bestimmt ist, welcher der gegebenen Grundpunkte R_1, welcher R_2 u. s. w. ist. Vertauschen wir die n Grundpunkte unter einander, so wird auch die Teilung (0) andere Teilpunkte bedingen.

Wir nennen die Teilung (0) „eindeutig", wenn trotz beliebiger Vertauschung der Grundpunkte[2]) dieselben m Teilpunkte entstehen, dagegen „mehrdeutig", wenn eine Vertauschung der Grundpunkte neue Teilpunkte erzeugt.

I. *Eindeutig sind diejenigen Teilungsgleichungen, in denen nur Summen von r in der Form $\overset{(k)}{r}$ vorkommen,*

weil in diesen Summen jedes r beliebig seine Lage vertauschen kann, also auch umgekehrt jeder Grundpunkt auf der Polgeraden seinen Platz gegen einen anderen wechseln kann.

Eine Teilungsgleichung kann eindeutig und mehrdeutig zur Anwendung gelangen. Z. B. ist die Teilung

$$(a') \qquad \varrho = r_1 + r_2 - r_3$$

in Bezug auf drei gegebene Gerade eindeutig, wenn jeder Geraden ein bestimmtes r zugemessen wird, zweideutig, wenn jeder Geraden

1) m soll den Grad der Teilungsgleichung in Bezug auf die variabele Polferne ϱ andeuten.

2) d. h. von den n Grundpunkten einer beliebigen Polgeraden wird jeder einmal der Grundpunkt R_k.

zwei der gegebenen r bestimmt zugemessen werden [1]), dreideutig, wenn jede Gerade einmal durch r_1 ein zweites Mal durch r_2 und das dritte Mal durch r_3 gemessen wird.

In Bezug auf einen Kegelschnitt und eine gegebene Gerade ist Teilung (a') eindeutig, wenn durch r_1 und r_2 der Kegelschnitt, durch r_3 die Gerade gemessen wird, dagegen zweideutig, wenn z. B. durch r_1 die Gerade und durch r_2 und r_3 der Kegelschnitt gemessen wird. Letzteres erklärt sich aus folgendem Umstande: Ist R ein gleitender Punkt des Kegelschnittes, so können wir nicht sagen, der Punkt R soll bis zu einer bestimmten Grenze durch r_2 von da ab durch r_3 gemessen werden. Selbst wenn dies angienge, würde durch $r_2 - r_3$ eine Wurzel in der Gleichung der Teilcurve auftreten, weil $r_2 - r_3$ aus der Gleichung des Kegelschnittes (für Polarcoordinaten) zu entnehmen ist. Dadurch wird ein Quadriren der Teilungsgleichung notwendig, welches anzeigt, dass in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt sowol $r_2 - r_3$ als auch $r_3 - r_2$ zu berücksichtigen ist. Die Teilung wird also zweideutig. Ihre Gleichung lautet in diesem Falle:

$$\text{(a'')} \qquad (\varrho - r_1 + r_2 - r_3)(\varrho - r_1 - r_2 + r_3) = 0$$

Ist eine Teilung mehrdeutig, so wollen wir das Product aller möglichen Teilungsgleichungen als „volle Teilung“ bezeichnen, oder die Teilung „volldeutig“ nennen.

II. *Die volldeutige Teilung gilt für alle minderdeutigen Teilungen,*

denn sie umfasst alle ihre Producte.

Die Teilung

$$\text{(a''')} \quad (\varrho - r_1 - r_2 + r_3)(\varrho - r_1 - r_3 + r_2)(\varrho - r_2 - r_3 + r_1) = 0$$

gilt für alle Grundgebilde beliebiger Ordnung, wenn nur die Bedingung erfüllt ist, dass auf keiner Polgeraden ausserhalb des Pols mehr als drei Grundpunkte auftreten. Kann in Bezug auf irgend eines dieser Grundgebilde minderdeutig geteilt werden, so ergiebt die volle Teilung als Ort der Teilung eine algebraische Curve, während die minderdeutige Teilung eine reine Curve erzeugt, vorausgesetzt, dass keine geringere Deutung möglich war.

Liegt der Teilung (a''') eine algebraische Curve zu Grunde, welche einen k fachen Punkt im Pol hat, auf jeder Polgeraden aber

---

1) z. B. sollen die Geraden g_1, g_2, g_3 das erste Mal durch r_1, r_2, r_3 gemessen werden; das zweite Mal sei bestimmt, dass g_1 durch r_2, g_2 durch r_3 und g_3 durch r_1 gemessen wird.

ausserhalb des Pols im allgemeinen drei Grundpunkte nachweist, so kann die Gleichung dieser a. C. $(3+k)$ O., welche eigentlich die Form hat

$$\varrho^k(\varrho-r_1)(\varrho-r_2)(\varrho-r_3)=0$$

doch in der einfacheren Form

$$(\varrho-r_1)(\varrho-r_2)(\varrho-r_3)=0$$

geschrieben werden, weil die in den Pol fallenden k Grundpunkte von keinem Einfluss auf die Teilung der Polgeraden sind, was schon daraus erhellt, dass in der Teilungsgleichung (a''') nur die gegebenen Polfernen derjenigen Grundpunkte vorkommen, welche auf jeder Polgeraden ausserhalb des Pols erscheinen.

Wir bemerken allgemein, dass die Teilungsgleichung

$$F^m(\varrho, r)=0$$

sowol auf einen beliebigen Nullpunkt in der Ebene der a. C. n. O. wie auch in erweitertem Sinne auf den k fachen Punkt einer a. C. $(n+k)$ O. als Pol bezogen werden kann. Die Teilung erleidet dadurch keine Aenderung. Der Ort der Teilung aber wird je nach der Gestalt der Grundcurve verschieden sein. Wie die Einheitsteilung einen vielfachen Punkt der Grundcurve im Pol nicht anzuzeigen braucht, so wird auch die allgemeine Teilungsgleichung alle diejenigen Fälle in sich schliessen, in denen der Pol als vielfacher Punkt der Teilcurve auftritt, gleichviel ob die Grundcurve im Pol einen vielfachen Punkt hat oder nicht.

Der nächst liegende Weg den etwa vorhandenen vielfachen Punkt der Teilcurve im Pol zu bestimmen wäre folgender: Wir bringen die Teilungsgleichung nach Art des § 2. auf die homogene Form

$$F(u)=0$$

Fehlen dieser Gleichung die m homogenen Summen u niedrigsten Grades, so hat die Teilcurve einen m fachen Punkt im Pol.

Als Beispiel soll der Ort der Teilung

b) $$\varrho=r_1-r_2$$

in Bezug auf eine beliebige a. C. II. O. bestimmt werden. Die Gleichung der Grundcurve sei

$$\overset{(2)}{u}+\overset{(1)}{u}+\overset{(0)}{u}=0$$

Ihre Polarform ist

$$r^2 \overset{(2)}{\psi} + r \overset{(1)}{\psi} + \overset{(0)}{\psi} = 0$$

Die gegebenen Polfernen r_1 und r_2 sind die Wurzeln dieser Gleichung; es wird

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{2 \overset{(2)}{\psi}} \sqrt{\overset{(1)}{(\psi)}{}^2 - 4 \overset{(0)}{\psi} \overset{(2)}{\psi}}$$

Die Gleichung der Teilcurve ist daher

$$(b_1) \qquad \varrho^2 = \frac{\overset{(1)}{(\psi)}{}^2 - 4 \overset{(0)}{\psi} \overset{(2)}{\psi}}{4 \overset{(2)}{(\psi)}{}^2}$$

Diese Gleichung entspricht der vollen Teilungsgleichung

$$\varrho^2 = (r_1 - r_2)^2$$

welche aus

$$(\varrho - r_1 + r_2)(\varrho - r_2 + r_1) = 0$$

durch Ausmultipliciren entsteht. Es vollzieht sich also die Volldeutigkeit von selbst, wenn dieselbe anfangs nicht in Rechnung gebracht wird. Gleichung (b_1) muss mit ϱ^2 multiplicirt werden; es entsteht

$$4\varrho^4 \overset{(2)}{(\psi)}{}^2 - \varrho^2 \overset{(1)}{(\psi)}{}^2 + 4\varrho^2 \overset{(0)}{\psi} \overset{(2)}{\psi} = 0$$

da allgemein $\varrho^k \overset{(k)}{\psi}$ die Polarform von $\overset{(k)}{u}$ ist, so wird

$$4 \overset{(2)}{(u)}{}^2 - \overset{(1)}{(u)}{}^2 + 4 \overset{(0)}{u} \overset{(2)}{u} = 0$$

Die gesuchte Teilcurve ist daher eine a. C. IV. O., welche im Pol einen Doppelpunkt hat. (Siehe Anm.)

Eine andere Art den etwa vorhandenen vielfachen Punkt der Teilcurve im Pol zu erkennen, zeigt der folgende Paragraph.

Anm. Oft wird es behufs Transformation der Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0 \quad \text{in} \quad F(u) = 0$$

von Vorteil sein, die volldeutige Teilung zu benutzen, weil die Berechnung der Wurzeln r_1 bis r_n der Grundgleichung II. § 2. dadurch umgangen wird. So lässt sich z. B. die volldeutige Teilung (a''') in der Form schreiben

$$(\varrho - \overset{(1)}{r} + 2r_3)(\varrho - \overset{(1)}{r} + 2r_2)(\varrho - \overset{(1)}{r} + 2r_1) = 0$$

und ergiebt nach teilweiser Entwickelung

§ 4. Teilungsgleichung als Ortsgleichung.

Es kann nicht im Sinne dieser Abhandlung liegen, Teilungsgleichungen aufzustellen, um sie nachher durch andere zu ersetzen. Den Ort der Teilung zu erkennen, bedarf es nicht erst der Transformation der Teilungsgleichung in bekannte Formen. Vielmehr muss die Teilcurve in ihrem ganzen Verlaufe einzig aus der Teilungsgleichung unter Bezugnahme auf die Grundcurve erkannt werden, da sie ja umgekehrt durch die Teilung in Bezug auf die Grundcurve entstanden ist.

Zunächst versuchen wir einen Weg einzuschlagen, welcher den etwa vorhandenen vielfachen Punkt der Teilcurve im Pol unmittelbar aus der Teilungsgleichung erkennen lässt. Angenommen wird, dass der Pol ein beliebiger Punkt der Ebene der a. C. n. O. ist und die Teilungsgleichung nicht mehr durch ϱ dividirt werden kann.

Setzen wir in der Teilungsgleichung $F(\varrho, r) = 0$

$$\varrho = 0$$

so fallen alle Glieder, welche ϱ enthalten, fort, und es bleibt eine Gleichung übrig von der Form

$$\varpi(r) = 0$$

$$(\varrho - \overset{(1)}{r})^3 - (\varrho - \overset{(1)}{r})^2\, 2\overset{(1)}{r} + (\varrho - \overset{(1)}{r})\, 4\overset{(2)}{r} + 8\overset{(3)}{r} = 0$$

In dieser volldeutigen Teilung kommen nur Summen von r in der Form $\overset{(k)}{r}$ vor. Sie hat nach I. wieder den Charakter einer eindeutigen Teilung angenommen und kann leicht mittelst der Beziehung I. § 2. auf die Form

$$F(u) = 0$$

gebracht werden. Würden wir aber dieselbe Teilung in der Form

$$\varrho = r_1 + r_2 - r_3$$

eindeutig auf ein Grundgebilde beziehen, welches eine volle Teilung erfordert, z. B. auf eine reine Curve dritter Ordnung, so müssten wir zunächst die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$r^3 + r^2 \frac{\overset{(2)}{\psi}}{\overset{(3)}{\psi}} + r \frac{\overset{(1)}{\psi}}{\overset{(3)}{\psi}} + \frac{\overset{(0)}{\psi}}{\overset{(3)}{\psi}} = 0$$

bestimmen und in obige Gleichung einsetzen. Nach Rechnungen langwierigster Art würde schliesslich dasselbe Resultat

$$F(u) = 0$$

wie oben entstehen.

welche ausser numerischen Grössen nur gegebene Polfernen enthält. Die Zahl nun, welche angiebt, wie oft die Bedingung

$$\bar{\omega}(r) = 0$$

von den Polgeraden in Bezug auf das Grundgebilde erfüllt werden kann, zeigt an, wieviel Polgeraden die Teilcurve im Pol berühren; denn liegt umgekehrt der Pol auf der Teilcurve und denken wir einen nahe liegenden Punkt der Teilcurve mit dem Pol verbunden, die so entstandene Sehne der Teilcurve — d. i. eine Polgerade — aber nach derjenigen Richtung rotirend, nach welcher sie abnimmt, so wird sie zur Tangente, wenn

$$\varrho = 0$$

wird. Die Frage nach dem vielfachen Punkt im Pol ist aber identisch mit der Frage nach der Anzahl der Tangenten im Pol. (Siehe unten B.) Um zu erkennen, wie oft die Bedingung

$$\bar{\omega}(r) = 0$$

von den Polgeraden in Bezug auf das Grundgebilde während der Rotation der Polgeraden erfüllt werden kann, muss vor Allem die Mehrdeutigkeit der Teilungsgleichungen in Betracht gezogen werden. (Siehe unten A.) Allgemeingültige Anhaltepunkte lassen sich nicht geben. Jede Teilungsgleichung muss für sich discutirt werden.

Aehnlich wie die Frage nach dem vielfachen Punkt im Pol erledigt sich die Frage nach den unendlich fernen Punkten der Teilcurve. Dividirt man die Teilungsgleichung durch ϱ und setzt

$$\frac{1}{\varrho} = 0 \quad \text{also} \quad \varrho = \infty$$

so bleibt das erste Glied der Teilungsgleichung bestehen. Dieses sei

$$\alpha(r) = 0$$

Die Bedingung

$$\alpha(r) = 0$$

wird demnach von denjenigen Polgeraden erfüllt, welche nach unendlich fernen Punkten der Teilcurve gerichtet sind, d. h. von denjenigen Polgeraden, welche den Asymptoten der Teilcurve parallel sind. Wir bemerken, dass bei der Untersuchung einer allgemeinen Teilung zunächst folgende Momente in Betracht kommen.

A. *Die Teilung ist in Bezug auf Mehrdeutigkeit zu untersuchen. In allgemeinen Fällen ist die Teilung volldeutig zu nehmen. In speciellen Fällen kann die Teilung minderdeutig bestimmt werden. Der allgemeine Fall gilt auch für den speciellen.*

B. *Für*

$$\varrho = 0$$

ergiebt die Teilungsgleichung

$$\bar{\omega}(r) = 0$$

Die Bedingung

$$\bar{\omega}(r) = 0$$

wird von denjenigen Polgeraden erfüllt, welche die Teilcurve im Pol berühren. Die Zahl, welche angiebt, wie oft die Bedingung

$$\bar{\omega}(r) = 0$$

von den Polgeraden i. B. a. C. n. O.[1]) *erfüllt wird, giebt die Zahl des vielfachen Punktes der Teilcurve im Pol an.*

C. *Für*

$$\varrho = \infty$$

ergiebt die Teilungsgleichung

$$\alpha(r) = 0$$

Die Bedingung

$$\alpha(r) = 0$$

wird von denjenigen Polgeraden erfüllt, welche parallel zu den Asymptoten der Teilcurve gehen.

Geht die Teilcurve durch den Pol, so lässt sich die Gestalt derselben wie folgt näher bestimmen. Ein Punkt P der Teilcurve liege nahe dem Pol O. Die Polgerade rotire so, dass die Sehne OP kleiner werde. Während die Polgerade rotirt, nähert sich der Teilpunkt P dem Pol O. Fällt P mit O zusammen, so sagen wir der Teilpunkt erreicht die Grenzlage. Zugleich erreicht die Polgerade die Grenzlage, sie wird Tangente im Pol. Wir unterscheiden nun

α. *Die Polgerade rotire über die Grenzlage ohne den Sinn der Drehung zu ändern.*

D. *Der Teilpunkt*[2]) *P überschreitet auf der rotirenden Polgeraden die Grenzlage im Pol: die Sehne OP wird zur Tangente; der Pol ist ein Punkt der Teilcurve.*

E. *Der Teilpunkt P ändert in der Grenzlage seine Richtung, indem er rückwärts schreitet: die Polgerade wird Doppeltangente im Pol. Die Teilcurve zeigt eine Spitze im Pol. Die Zweige der Spitze liegen zu beiden Seiten der Doppeltangente. Der Pol ist ein Doppelpunkt der Teilcurve.*

---

1) i. B. a. C. n. O. Abkürzung für „in Bezug auf die a. C. n. O.", welche zu Grunde liegt.

2) Die Bewegung des Teilpunktes P muss aus der Teilungsgleichung unter Bezugnahme auf das vorliegende Grundgebilde erkannt werden.

β. Die Polgerade ändere in der Grenzlage den Sinn der Drehung, d. h. sie rotire rückwärts.

F. *Der Teilpunkt P überschreitet den Pol: die Polgerade wird Wendetangente im Pol. Die Teilcurve hat einen Wendepunkt im Pol.*

G. *Der Teilpunkt P ändert seine Richtung im Pol: die Teilcurve zeigt eine Spitze im Pol, deren Zweige auf derselben Seite der Doppeltangente liegen. Der Pol ist ein Doppelpunkt der Teilcurve.*

Diesen Merkmalen fügen wir noch hinzu:

H. *Ist der Pol ein k facher Punkt der Grundcurve, so werden k Polfernen r zu null.*

Setzt man daher in der allgemeinen Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

welche wir ausführlicher

$$F(\varrho, r_1, r_2, \ldots, r_n) = 0$$

schreiben

$$r_n = r_{n-1} = r_{n-2} = \ldots = r^{n-k+1} = 0$$

so giebt die neu entstehende Teilungsgleichung

Anm. Als Beispiel soll die Teilung

$$\varrho = r_1 - r_2$$

discutirt werden. Der Teilung liege eine Hyperbel in beliebiger Lage zu Grunde.

ad A. Die Teilung ist zweideutig, da sowol $r_1 - r_2$ als auch $r_2 - r_1$ zu berücksichtigen ist. Auf jeder Polgeraden entstehen zwei Teilpunkte, welche gleich weit vom Pol nach verschiedenen Richtungen entfernt sind, weil

$$\varrho_1 = r_1 - r_2 \quad \text{und} \quad \varrho_2 = -(r_1 - r_2) \quad \text{ist.}$$

ad B. Für

$$\varrho = 0$$

entsteht

$$r_1 - r_2 = 0 \quad \text{oder} \quad r_2 - r_1 = 0$$

In beiden Fällen ist die Bedingung

$$r_1 = r_2$$

zu erfüllen. Es giebt nur zwei Polgeraden, welche die Bedingung

$$r_1 = r_2$$

erfüllen können. das sind die Tangenten an die gegebene Hyperbel. Diese beiden Tangenten sind nach B. Tangenten der Teilcurve im Pol. Liegt der Pol innerhalb der Hyperbel, so hat die Teilcurve einen isolirten Doppelpunkt im Pol. Alsdann giebt es keine gemeinsamen Tangenten an Hyperbel und Teil-

$$F(\varrho, r_1, r_2, \ldots r_{n-k}) = 0$$

die neue Teilung sämtlicher Polgeraden an.

J. *Nimmt die Teilungsgleichung*

$$F(\varrho, r) = 0$$

durch die Substitution

(k) $$\varrho = r_n = r_{n-1} = r_{n-2} = \ldots = r_{n-k+1}$$

die identische Form

$$0 = 0$$

an, so erfüllt sie die Bedingung (k) *d. h. die Teilcurve geht durch den k fachen Punkt der Grundcurve*, denn k gegebene Polfernen müssen gleich ϱ sein, wenn ein k facher Grundpunkt zugleich ein Teilpunkt sein soll.

§ 5. Wechselbeziehung zwischen Pol und Teilpunkt.

Bisher wurde die Gesamtheit der Teilpunkte auf den gegebenen Pol bezogen. Jetzt soll umgekehrt der Pol auf jeden Punkt der Teilcurve bezogen werden.

---

curve. Die Teilcurve ist vierter Ordnung, da ein Doppelpunkt in den Pol fällt, ausserdem auf jeder Polgeraden noch zwei Teilpunkte bestehen.

ad C. Für

$$\varrho = \infty$$

wird

$$r_1 - r_2 = \infty = r_2 - r_1$$

diese Bedingung wird durch

$$r_1 = \pm\infty \quad \text{und} \quad r_2 = \pm\infty$$

erfüllt, d. h. diejenigen beiden Polgeraden, welche den Hyperbelasymptoten parallel laufen, geben die Asymptoten-Richtungen der Teilcurve an.

ad β. Die Polgerade ändert in der Grundlage den Sinn der Drehung, weil sie gezwungen ist einem Punkte der Hyperbel zu folgen, dieser Hyperbelpunkt aber auf demselben Zweige der Hyperbel weitergleitet, nachdem die Polgerade die Hyperbel berührte.

ad F. Der Teilpunkt überschreitet den Pol, weil die Polgerade in demjenigen Moment die Teilung ändert, wo sie die gegebene Hyperbel berührt. Liegt der Pol ausserhalb der Hyperbel, so hat die Teilcurve einen reellen zweifachen Wendepunkt im Pol. Die ad B. erwähnten Tangenten vom Pol an die Hyperbel sind Wendetangenten der Teilcurve.

Da der Pol ein (eventuell isolirter) Doppelpunkt der Teilcurve ist, zeigt jede Polgerade zwei Teilcurvensehnen, welche infolge A. von gleicher Länge aber entgegengesetzt gerichtet sind. Beide Sehnen erscheinen als eine, wenn der Pol innerhalb der Hyperbel liegt, d. h. wenn er ein isolirter Doppelpunkt der Teilcurve ist.

Die Teilungsgleichung

$$(0) \qquad F(\varrho, r) = 0$$

gilt für jeden Punkt der Teilcurve. Greifen wir einen beliebigen Punkt derselben heraus, z. B. den Teilpunkt P_k und verbinden ihn mit dem Pol O, so bezieht die Gleichung

$$(\text{k}) \qquad F(\varrho_k, r) = 0$$

in der ϱ_k an Stelle der gesuchten Polferne ϱ der Gleichung (0) tritt, die Lage des Teilpunktes P_k auf den Pol O. Gleichung (k) gilt auf der starren Polgeraden OP_k. Diese Polgerade hat die Grundpunkte R_1 bis R_n.

Der Teilpunkt P_k soll jetzt Nullpunkt der Messung werden, und zwar die Lage des Pols O auf den Teilpunkt P_k bezogen werden. Während bisher die Strecken OR_1, OR_2 . . . Maasseinheiten waren, sind jetzt $P_k R_1$, $P_k R_2$, . . . Maasseinheiten. Diese neuen Maasseinheiten bezeichnen wir mit r_{k_1}, r_{k_2}, . . .

In Bezug auf die Grundpunkte findet eine Verschiebung des Nullpunktes statt. Es tritt also

$r_{k_1} - \varrho_k$ an Stelle von r_1

$r_{k_2} - \varrho_k$ „ „ „ r_2

allgemein

$r_k - \varrho_k$ an Stelle von r

Der Teilpunkt P_k wurde durch die gesuchte Polferne ϱ_k auf den früheren Nullpunkt O bezogen. Jetzt wird der Punkt O durch die gesuchte Polferne $-\varrho_k$ auf den gegebenen Teilpunkt P_k als Nullpunkt bezogen. An Stelle der Gleichung (k) tritt daher die Gleichung

$$F(-\varrho_k, \quad r_k - \varrho_k) = 0$$

Dies ist wieder eine Teilungsgleichung. Während also die allgemeine Teilungsgleichung

$$(\text{k}) \qquad F(\varrho_k, r) = 0$$

den Teilpunkt P_k auf den Pol O als Nullpunkt bezieht, misst umgekehrt die Teilungsgleichung

$$(\text{k}') \qquad F(-\varrho_k, \quad r_k - \varrho_k) = 0$$

die Lage des Pols O vom Teilpunkt P_k als Nullpunkt.

Gleichung (k) ist aber als Gleichung einer algebraischen Curve (denn Gl. (k) ist identisch mit Gleichung (0)) so aufgebaut, dass

jeder ihrer Summanden in Bezug auf ϱ_k und r zusammengenommen gleich hohen Grades ist. Dasselbe gilt von Gleichung (k') weil ϱ_k wie r der Gleichung (k) durch eine Grösse desselben Grades ersetzt wird. Wenn aber jeder Summand der Gleichung (k') in Bezug auf ϱ_k und r zusammengenommen gleich hohen Grades ist, so können wir Gleichung (k') mit -1 multipliciren und erhalten

$$(k'') \qquad F(\varrho_k, \quad \varrho_k - r_k) = 0$$

Den Wechsel in der Eigenschaft als Nullpunkt zwischen Pol und Teilpunkt wollen wir durch die Gleichung angeben

$$(a) \qquad \underset{[\varrho_k - r_k \text{ statt } r]}{F(\varrho_k, r) \quad = \quad F(\varrho_k, \quad \varrho_k - r_k)} = 0$$

Der Teilpunkt P_k war ein beliebiger Punkt der Teilcurve. Statt dessen können wir jeden anderen Punkt dieser Teilcurve wählen. Obige Wechselbeziehung (a) gilt also zwischen dem Pol O und jedem beliebigen Punkt der Teilcurve. Denken wir uns nicht allein die Grundcurve, sondern auch die Teilcurve in ihrem ganzen Umfange gegeben, und wenden das soeben gefundene Resultat, dass Gleichung (k'') für jeden Punkt der Teilcurve als Nullpunkt gilt in der Weise an, dass wir einen Punkt P als Nullpunkt auf der Teilcurve gleiten lassen, während seine Verbindungslinie mit dem Pol um letzteren einen Strahlenbüschel beschreibt, so bemerken wir, dass die Teilungsgleichung

$$F(\varrho_k, \quad \varrho_k - r_k) = 0$$

auf jeder Polgeraden eine Reihe von Punkten bedingt, deren einer in den Pol fallen muss. Ist die Teilcurve $m$ter Ordnung, so trifft der gleitende Punkt P die vorerwähnte Polgerade OP_k m mal. Jedesmal aber, wenn P auf dieser Polgeraden erscheint, bedingt die Teilungsgleichung

$$F(\varrho_k, \quad \varrho_k - r_k) = 0$$

eine neue Reihe von Punkten, deren einer in den Pol fällt. Dasselbe gilt auf jeder Polgeraden. Der Ort der Teilung

$$F(\varrho_k, \quad \varrho_k - r_k) = 0$$

ist also eine a. C., welche einen m fachen Punkt im Pol hat. Diese Curve nennen wir „secundäre Teilcurve“ im Gegensatz zu der „primären Teilcurve“, auf welcher der Punkt P als Nullpunkt gleitet.

Da es dem Princip der Teilung zu Grunde liegt, die Polfernen der Grundcurve von jedem beliebigen Nullpunkte durch r_1 bis r_n zu messen, so wollen wir dies auch tun, wenn der Nullpunkt gleitet. Gleichung (a) gilt wie wir wissen für jeden Punkt der Teilcurve als

Nullpunkt. Wir müssen also an Stelle von ϱ_k allgemein ϱ setzen, wenn Gleichung (a) auf jeden Punkt der Teilcurve bezogen werden soll. Indem wir aber die Grundcurve durch die Polfernen r_1 bis r_n auf den gleitenden Punkt P beziehen, fällt auch für die gegebenen der Index k fort. Wir finden, die Gleichung

$$\text{(b)} \qquad F(\varrho, r)_{[\varrho - r \text{ statt } r]} = F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0 \text{ [1]}$$

giebt die *Wechselbeziehung zwischen Pol und Teilcurve* auf jeder Polgeraden an.

Den früheren Pol O können wir jetzt als Teilpunkt, den früheren Teilpunkt als Pol auffassen, d. h.

I. *Die Substitution* $\varrho - r$ *statt* r *bedingt einen Wechsel von Pol und Teilpunkt.*

Sie bedingt aber auch eine Bewegung. Diese Bewegung giebt sich auf der festen Polgeraden dadurch zu erkennen, dass die durch obige Substitution entstehende Gleichung

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

nur für gewisse Punkte der Polgeraden als Nullpunkt gilt, nämlich für jene Punkte, welche vorher durch die Teilung

$$F(\varrho, r) = 0$$

in Bezug auf den Pol O und die Grundpunkte entstanden waren. Die neue Gleichung

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

bezieht auf der festen Polgeraden die Lage des Pols O (nebst neu entstandenen Punkten) auf jeden der früheren Teilpunkte als Nullpunkt [2]).

1) Es wird nur das r der Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

geändert, während ϱ ungeändert bleibt.

2) So giebt z. B. die Teilung

$$\varrho^2 = r_1 r_2$$

in Bezug auf den Pol O zwei Punkte P_1 und P_2 an, welche den Grundpunkten R_1 und R_2 harmonisch zugeordnet sind, Die Substitution $\varrho - r$ statt r lässt die Teilungsgleichung

$$\varrho = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

Wir wollen den auf der Teilcurve gleitenden Nullpunkt „Pol“ nennen, da auf ihn die Teilung bezogen wird. Der frühere Pol O soll „fester Punkt O“ oder nur „Punkt O“ heissen. Das Vorbemerkte fassen wir kurz in folgender Weise zusammen:

II. *Gleitet der Pol auf der primären Teilcurve mter Ordnung*

$$F(\varrho, r) = 0$$

des festen Punktes O i. B. a. C. n. O.[1]*, so ist der Ort der Teiluug*

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

in Bezug auf die Schnittpunkte jeder durch O gehenden Geraden mit der a. C. n. O. die secundäre Teilcurve. Dieselbe hat einen m fachen Punkt im festen Punkte O.

Denken wir nun um den auf der primären Teilcurve gleitenden Pol einen Büschel beschrieben und in jedem Moment des Gleitens auf „allen“ Strahlen dieses Büschels die Teilung

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

i. B. a. C. n. O. erfüllt, so ist der Ort der Teilung in jedem Moment des Gleitens eine a. C., welche durch den festen Punkt O geht, weil sie die Verbindungslinie des gleitenden Poles mit dem festen Punkte O in einer der vorgenannten m Punktreihen schneidet, aus denen sich die secundäre Teilcurve zusammensetzte und jede dieser Punktreihen einen Punkt in O zeigte. Diesen Ort der Teilung

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

i. B. a. C. n. O., dessen Pol und Nullpunkt ein beliebiger Punkt der primären Teilcurve sein kann, nennen wir „coordinirte Teilcurve“. Es besteht das Gesetz:

III. *Gleitet der Pol anf der primären Teilcurve*

$$F(\varrho, r) = 0$$

des Punktes O i. B. a. C. n. O., so beschreibt die coordinirte Teilcurve

$$F(\varrho, \quad \varrho - r) = 0$$

---

entstehen. Diese Gleichung bezieht die Lage des Pols O auf jeden der beiden Punkte P_1 und P_2 als Nullpunkt. Sie sagt aus, dass der frühere Pol O halb so weit von P_1 (oder P_2) liegt wie ein zu P_1 (oder P_2) harmonisch zugeordneter Punkt in Bezug auf die Grundpunkte R_1 und R_2.

1) i. B. C. Abkürzung für „in Bezug auf eine Curve“.



ein System von algebraischen Curven, deren jede durch den Punkt O geht [1]).

Die nachmalige Substitution $\varrho - r$ statt r würde einen neuen Wechsel von Pol und Teilpunkt anzeigen. Der Pol würde auf der

---

1) Um eine Anwendung des Satzes III. zu zeigen, möge der Kegelschnitt

$$(\varrho - r_1)(\varrho - r_2) = 0$$

und in seiner Ebene der Punkt O gegeben sein. Primäre Teilcurve sei die gerade Polare des Punktes O. Diese ist der Ort der harmonischen Teilung in Bezug auf den Punkt O und den gegebenen Kegelschnitt. Ihre Gleichung ist also

$$\varrho = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

Statt dessen können wir schreiben

$$\frac{\varrho - r_1}{r_1} + \frac{\varrho - r_2}{r_2} = 0$$

Die Substitution $\varrho - r$ statt r ergiebt

$$\frac{r_1}{\varrho - r_1} + \frac{r_2}{\varrho - r_2} = 0$$

Diese Gleichung ist wieder identisch mit

$$\varrho = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

d. h. die coordinirte Teilcurve ist eine gerade Polare. Es folgt nach Satz III.: Gleitet der Pol auf der geraden Polare des Punktes O in Bezug auf einen Kegelschnitt, so beschreibt seine Polare einen Strahlenbüschel um den Punkt O.

Anm. zu § 5. Durch die allgemeine Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0 \tag{0}$$

wird der Teilpunkt P einer Polgeraden auf den Pol O bezogen. Auf der Polgeraden OP gilt aber trotz beliebiger Lage des Grundpunktes R die Beziehung

$$OP = OR + RP$$

wofür wir kurz schreiben

$$\varrho = r + r' \tag{α}$$

Soll nun aus obiger Gleichung diejenige Gleichung abgeleitet werden, welche umgekehrt den Pol O auf den Teilpunkt P bezieht, so bleibt die gesuchte Polferne ϱ ungeändert, während infolge α

(β) an Stelle von r der Wert $\varrho - r'$ tritt.

Die Gleichung

$$F(\varrho, \varrho - r') = 0$$

bezieht daher den früheren Pol O auf den Teilpunkt P als Nullpunkt. In dieser Gleichung aber tritt r' als gegebene Polferne auf. Wir bezeichnen daher r' mit r und erhalten

secundären Teilcurve oder auf dem System coordinirter Curven gleiten, je nachdem die Teilung auf demjenigen Büschel vollzogen wird, dessen Centrum der feste Punkt O ist, oder auf einem Büschel, welches den Pol begleitet. Diese Betrachtung würde hier zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass die nochmalige Substitution $\varrho - r$ statt r, so bedeutungsvoll sie sein mag, doch auf die ursprüngliche Teilungsgleichung

$$F(\varrho, r) = 0$$

führt, wie dies die Gleichung anzeigt

$$\text{(c)} \qquad F(\varrho, \varrho - r)_{[\varrho - r \text{ statt } r]} = F(\varrho, r) = 0$$

§. 6. Durch Centralprojection auf parallele Träger wird die Teilung nicht geändert.

Setzt man in die allgemeine Teilungsgleichung

$$\text{(0)} \qquad F(\varrho, r) = 0$$

$$\text{(1)} \qquad k\varrho \text{ statt } \varrho \text{ und } kr \text{ statt } r$$

worin k einen beliebigen numerischen Factor bedeutet und „kr statt r“ allgemein steht für kr_1 statt r_1, kr_2 statt r_2, kr_3 statt r_3 u. s. w., so erleidet die allgemeine Teilungsgleichung (0) keine Aenderung, da in jedem Gliede der Gleichung (0) „ϱ und r zusammen genommen“ in gleichem Grade vorkommen, d. h. die Summe der Exponenten von ϱ und r jedes Gliedes ein und dieselbe Grösse ist. Obige Substitution (1) würde daher eine Teilungsgleichung

$$F(k\varrho, kr) = 0$$

erzeugen, in deren einzelnen Gliedern der Factor k in gleich hoher Potenz enthalten wäre. Die entstandene Gleichung könnte infolge dessen durch die entsprechende Potenz von k dividirt werden und käme wieder auf die Form (0).

Nähme nun k der Reihe nach alle möglichen Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, so würde eine successive Grössenänderung sämtlicher Polfernen (gegebener wie gesuchter) stattfinden, welche man

---

$$\text{(1)} \qquad F(\varrho, \varrho - r) = 0$$

welche Gleichung nach (β) durch die Substitution

$$\varrho - r \text{ statt } r$$

unmittelbar aus Gleichung (0) abgeleitet werden kann.



bildlich erzeugen kann, wenn man die ursprünglich gegebene Polgerade „parallel verschiebt" in einem beliebigen Büschel, dessen Strahlen durch Grundpunkte, Teilpunkte und Pol der ursprünglich gegebenen Polgeraden gehen, vorausgesetzt, dass die Teilung stets auf den Durchgangspunkt des Polstrahles mit der parallel verschobenen Polgeraden bezogen wird. Der Beweis erhellt aus Folgendem:

Bezeichnet man den verticalen Abstand der ursprünglich gegebenen Polgeraden mit „1", denjenigen einer beliebigen parallelen Polgeraden mit „k", so verhalten sich die Abstände wie 1 zu k. Daraus folgt, dass sich die Polferne eines beliebigen Grund- oder Teilpunktes der gegebenen Polgeraden zu der zugeordneten Polferne [1]) dieses Grund- oder Teilpunktes auf der parallelen Polgeraden ebenfalls wie $1 : k$ verhält. Für die Teilung auf der parallelen Polgeraden gilt daher die Gleichung

$$F(k\varrho, kr) = 0$$

wenn auf der gegebenen Polgeraden die Teilung

$$F(\varrho, r) = 0$$

besteht. Beide Teilungsgleichungen aber sind wie oben gezeigt, identisch. Wir erkennen das Gesetz:

I. *Jede Teilung kann ohne eine Aenderung zu erleiden auf parallele Träger projicirt werden.*

Dabei entspricht jedem Element der gegebenen Teilung, sei es Pol, Grundpunkt oder Teilpunkt dasjenige Element des parallelen Trägers, welches mit ihm auf demselben Projectionsstrahl liegt.

Zugleich bemerken wir

II. *Die Teilungsgleichung giebt das Verhältniss der gegebenen Polfernen zu den gesuchten an und umgekehrt,*

da dieses Verhältniss sich nie ändern kann, wenn man an Stelle jeder Polferne, gegebener wie gesuchter, Polfernen von k facher Grösse setzt.

§ 7. Allgemeine Gesetze der homogenen Teilungen.

Es giebt eine Reihe von Teilungen, sowie Teilcurven, deren Gleichungen in der Form

$$F(\varrho, r) = 0 \quad \text{oder} \quad F(u) = 0$$

1) Zwei zugeordnete Polfernen befinden sich zwischen denselben zwei Projectionsstrahlen. Einer dieser Projectionsstrahlen ist stets der Polstrahl.



sich unmittelbar aus ihrer Coefficientenreihe bestimmen lassen. Um den Vorteil solcher Coefficientenreihen zu zeigen, führen wir die folgenden Teilungsgleichungen in beiden Gleichungsformen an. Die Einheitsteilung

$$(0) \qquad \varrho^n - \varrho^{n-1} \overset{(1)}{r} + \varrho^{n-2} \overset{(2)}{r} - \ldots \pm \overset{(n)}{r} = 0 \text{ [1]}$$

$$(0') \qquad \overset{(n)}{u} + \overset{(n-1)}{u} + \overset{(n-2)}{u} + \ldots + \overset{(0)}{u} = 0$$

zeigt in jedem Summand den numerischen Coefficienten „1". Geben wir statt dessen jedem Summand einen beliebigen numerischen Coefficienten, so entsteht eine Teilung (gleichviel welchen Grades), welche wir „homogen" nennen. Der Grad der Teilung kann sich nur ändern, wenn die numerischen Coefficienten der höchsten Potenzen von ϱ zu null werden. Die homogene Teilung $m$ten Grades hat daher die Gleichung

$$(1) \qquad \alpha_m \varrho^m \overset{(n-m)}{r} - \alpha_{m-1} \varrho^{m-1} \overset{(n-m+1)}{r} + \ldots \pm \alpha_0 \overset{(n)}{r} = 0$$

$$(1') \qquad \alpha_m \overset{(m)}{u} + \alpha_{m-1} \overset{(m-1)}{u} + \ldots \pm \alpha_0 \overset{(0)}{u} = 0$$

Die Coefficienten

$$\alpha_n, \quad \alpha_{n-1}, \quad \ldots \quad \alpha_{m+1}$$

sind null geworden.

Die Coefficientenreihe dieser Teilung ist

$$0, \; 0, \; 0, \; \ldots \; \alpha_m, \; \alpha_{m-1}, \; \alpha_{m-2}, \; \ldots \; \alpha_0$$

Die ersten $n - m$ Coefficienten sind null [2]. Um zu beweisen, dass Gleichung (1) mit (1') identisch ist, dividire man (1) durch $\overset{(n)}{r}$ und setze nach § 2.

$$\frac{\overset{(n-k)}{r}}{\overset{(n)}{r}} = \pm \overset{(k)}{\psi}$$

Es entsteht

$$\alpha_m \varrho^m \overset{(m)}{\psi} + \alpha_{m-1} \varrho^{m-1} \overset{(m-1)}{\psi} + \alpha_{m-2} \varrho^{m-2} \overset{(m-2)}{\psi} + \ldots = 0$$

---

1) Jede Teilungsgleichung enthält ausser ϱ und r nur numerische Coefficienten. Vgl. I. § 1.

2) Es können auch die letzten Coefficienten null werden.

Da nun $\rho^k \overset{(k)}{\psi}$ die Polarform von $\overset{k}{u}$ ist, so entsteht Gleichung (1′). Wir bemerken das Gesetz:

I. *Die homogene Teilung unterscheidet sich von der Einheitsteilung nur durch die numerischen Coefficienten der einzelnen Summanden.*[1])

Identisch mit diesem Gesetze ist folgendes:

I a. *Die Gleichung einer homogenen Teilcurve in der Form*

$$F(u) = 0$$

unterscheidet sich von der Gleichung der Grundcurve

$$\overset{(n)}{u} + \overset{(n-1)}{u} + \overset{(n-2)}{u} + \ldots + \overset{(0)}{u} = 0$$

nur durch numerische Coefficienten der homogenen Summen u.

Aus der Identität der Gleichungen (1) und (1′) folgt:

I b. *Den Gleichungen einer homogenen Teilcurve in der Form*

$$F(\varrho, r) = 0 \quad \text{oder} \quad F(u) = 0$$

liegt dieselbe numerische Coefficientenreihe zu Grunde.

Gleichung (1) zeigt nur Summen von r, deren allgemeine Form $\overset{(k)}{r}$ ist. Zufolge § 3. heisst dies

II. *Die homogenen Teilungen sind eindeutig.*

Die homogene Teilung $m$ten Grades (1) schreiben wir

$$\text{„hom.}\ \frac{n}{m}\text{“}$$

Aus (1′) sehen wir:

III. *Der Ort der Teilung*

$$\text{„}\mathit{hom.}\ \frac{n}{m}\text{“}$$

ist eine a. C. m. O.[2])

---

1) Die Einheitsteilung enthält in jedem Summanden nur eine Summe von der allgemeinen Form $\overset{(k)}{r}$; die allgemeine Teilungsgleichung enthält r in beliebiger Anordnung.

2) Die homogene Teilcurve ist aber $n$ter Ordnung, wenn der Coefficient des höchsten Gliedes ($\overset{n}{\varrho}$ oder $\overset{(n)}{u}$) nicht null wird. Es findet dann stets eine Teilung „hom. $\frac{n}{n}$“ statt.

Ist der Pol ein k facher Punkt der a. C. n O., so werden die k Polfernen r zu null. Aus Gleichung (1) schwinden die letzten k Summanden und wir erkennen mittelst (1')

IV. *Ist der Pol ein k facher Punkt der a. C. n. O., so ist er auch ein k facher Punkt jeder homogenen Teilcurve.*

Derselbe Satz lautet in Bezug auf Teilung:

IVa. *Ist der Pol ein k facher Punkt der a, C. n. O., so erleiden die Polgeraden durch Pol, Curve und homogene Teilcurve m ter Ordnung die Teilung*

$$„hom. \frac{n-k}{m-k}“$$

Diesen Satz zu beweisen, lassen wir die Polfernen $r_n, r_{n-1}, \ldots r_{n-k+1}$ null werden. Gleichung (1) geht also für den Fall eines k fachen Punktes der Grundcurve im Pol in die Gleichung über

$$\alpha_m \varrho^{m-k} \overset{(n-m)}{r} - \alpha_{m-1} \varrho^{m-k-1} \overset{(n-m+1)}{r} + \ldots \pm \alpha_k \overset{(n-k)}{r} = 0$$

Dafür kann man schreiben

$$\alpha_m \varrho^{m-k} \overset{(n-k-[m-k])}{r} - \alpha_{m-1} \varrho^{m-k-1} \overset{(n-k-[m-k-1])}{r} + \ldots$$
$$\ldots \pm \alpha_k \overset{(n-k)}{r} = 0$$

Setzt man

$$m-k = m' \quad \text{und} \quad n-k = n'$$

so entsteht

$$\alpha_m \varrho^{m'} \overset{(n'-m')}{r} - \alpha_{m-1} \varrho^{m'-1} \overset{(n'-m'+1)}{r} + \ldots \pm \alpha_k \overset{(n')}{r} = 0$$

welche Gleichung nach Analogie der Gleichung (1) eine homogene Teilung m ten Grades in Bezug auf n' Grundpunkte, d. h. die Teilung

$$„\text{hom.} \frac{n'}{m'}“$$

angiebt. Die Coefficienten sind ganz beliebige numerische Factoren, sie können eine Teilung nur specialisiren. Setzt man

$$n' = n-k \quad \text{und} \quad m' = m-k$$

so erkennt man die Gültigkeit des Satzes IVa.

Wenn man bedenkt, dass der Träger der Grundpunkte ein ganz beliebiger sein kann, dass also die a. C. n. O. stets durch n Gerade verdrängt werden kann, wenn es gilt auf einer bestimmten Pol-

geraden die Teilung zu erzeugen, so sieht man hier, wo der Grad der Teilung sich um k erniedrigt ein grosses Feld wirklich durchführbarer Constructionen sich eröffnen. Setzt man

$$k = m - 2$$

so entsteht nach VIa. eine Teilung

$$\text{„hom.}\ \frac{n - m + 2}{2}\text{“}$$

Diese Teilung ist construirbar unter der Annahme gegebener Grundpunkte.

§ 8. Polaren.

Eine Sonderstellung nehmen diejenigen „homogenen Teilungen“ ein, welche trotz beliebiger Centralprojection auf beliebige Träger keine Aenderung erleiden. Dieselben sollen besimmt werden.

Die Centralprojection erfordert, dass durch das beliebig gewählte Centrum der Projection Strahlen nach sämtlichen n Grundpunkten und m Teilpunkten gehen. Erstere mögen den Grundbüschel $n$ter Ordnung, letztere den Teilbüschel $m$ter Ordnung bilden. Beide Büschel sind concentrisch. Der Teilbüschel $m$ter Ordnung soll als Ort einer homogenen Teilung entstanden sein. Homogene Teilungen werden aber nach § 7. I. aus der Einheitsteilung durch Coefficientenreihen abgeleitet. Diese Coefficientenreihe ist zu bestimmen.

Die Teilungsgleichung gilt auf jeder Polgeraden, also auch auf der Pol-Centralen, d. i. diejenige Polgerade, welche durch das gemeinsame Centrum beider Büschel geht. Im Centrum fallen n Grundpunkte mit m Teilpunkten zusammen. Die Einheitsteilung ergiebt für den Fall

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r$$

als Gleichung der Grundpunkte

(g) $$(\varrho - r)^n = 0$$

Die Gleichung der Teilpunkte aber ist

(t) $$(\varrho - r)^m = 0$$

Beide Gleichungen (g) und (t) beziehen sich auf den gemeinsamen Pol der Pol-Centralen als Nullpunkt. Gleichung (t) muss aus (g) durch eine Coefficientenreihe entstanden sein. Dies ist nur möglich, wenn die Coefficienten derjenigen Glieder der Gleichung (g), welche die gesuchte Polferne ϱ in höherer als $m$ter Potenz enthalten zu

null werden. Es kommen zunächst nur die Coefficienten derjenigen Glieder der Gleichung (g) in Betracht, in welchen der Exponent von ϱ gleich und kleiner ist als m. Diese Coefficienten sind der Reihe nach

$$(g') \quad \frac{n \ldots (m+3)(m+2)(m+1)}{(n-m)!}; \quad \frac{n \ldots (m+2)(m+1)m}{(n-m+1)!};$$
$$\frac{n \ldots (m+1)m(m-1)}{(n-m+2)!}; \text{ u. s. w.}$$

Offenbar können alle Glieder der Gleichung (g) durch

$$n \ldots (m+3)(m+2)(m+1)$$

dividirt werden, dadurch erhalten die Coefficienten (g') die Form

$$(g'') \quad \frac{1}{(n-m)!}; \quad \frac{m}{(n-m+1)!}; \quad \frac{m(m-1)}{(n-m+2)!}; \text{ u. s. w.}$$

Die Coefficienten der entwickelten Gleichung (t) sind

$$(t'') \quad 1; \quad \frac{m}{1!}; \quad \frac{m(m-1)}{2!}; \text{ u. s. w.}$$

Multiplicirt man die Coefficienten (g'') der Reihe nach mit den Coefficienten

$$(\vartheta) \quad (n-m)!; \quad \frac{(n-m+1)!}{1!}; \quad \frac{(n-m+2)!}{2!}; \text{ u. s. w.}$$

so entstehen die Coefficienten (t'') d. h.:

Die Gleichung (g) der Grundpunkte wird durch die Coefficienten

$$(\vartheta') \quad 0; \quad 0; \quad \ldots \quad (n-m)!; \quad \frac{(n-m+1)!}{1!}; \quad \frac{(n-m+2)!}{2!}; \text{ u. s. w.}$$

in die Gleichung (t) der Teilpunkte übergeführt.

Da es nur eine einzige Coefficientenreihe giebt, welche die Gleichung (g) in (t) überführt, so bemerken wir

I. *Es giebt nur eine homogene Teilung mten Grades, welche durch Centralprojection keine Aenderung erleidet.*

Diese Teilung schreiben wir kurz Teilung „$\wedge \frac{n}{m}$“, indem durch das Zeichen $\wedge$ die Projectionsmöglichkeit angedeutet werden soll. Durch die Coefficientenreihe (ϑ') ist die Teilung $\wedge \frac{n}{m}$ bestimmt.

Diese Teilung $\wedge \frac{n}{m}$ wird in Bezug auf einen Pol und n gegebene Grundpunkte einer Polgeraden nur von m Punkten in bestimmter Lage erfüllt.

Wir haben zunächst nur diejenige Teilung $\wedge \frac{n}{m}$ gefunden, welche in Bezug auf einen Grundbüschel $m$ter Ordnung einen concentrischen Teilbüschel $m$ter Ordnung erzeugt. Zum Centrum beider Büschel konnte jeder beliebige Punkt gewählt werden. Die Teilung $\wedge \frac{n}{m}$ lässt sich daher von jedem beliebigen Punkte auf jede beliebige Polgerade (eine Gerade, welche durch den Pol geht) der gemeinsamen Büschelebene projiciren, da umgekehrt die Teilungsgleichung für jede Polgerade gilt. Nach § 6., I. lässt sich aber jede Teilung auf parallele Träger projiciren, woraus folgt

II. *Die Teilung* $\wedge \frac{n}{m}$ *kann ohne eine Aenderung zu erleiden, auf jeden beliebigen Träger projicirt werden.*

In einfachster Weise lässt sich die gefundene Coefficientenreihe wie folgt ableiten

(0)	1	1	1	1	1	u. s. w.
(1)	0	1	2	3	4	„
(2)	0	0	1.2	2.3	3.4	„
(3)	0	0	0	1.2.3	2.3.4	„

$$(n-m) \qquad 0; \quad 0; \; \ldots \; \frac{(n-m)!}{1!}; \quad \frac{(n-m+1)!}{2!}$$

$$\frac{(n-m+2)!}{3!} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Coefficientenreihen beziehen sich wie folgt:

(0) auf die Einheitsteilung $\left(\wedge \frac{n}{n}\right)$

(1) auf die Teilung $\wedge \frac{n}{n-1}$

(2) „ „ „ $\wedge \frac{n}{n-2}$

$(n-m)$ „ „ „ $\wedge \frac{n}{m}$

Es zeigt sich das Gesetz:

III. *Die Teilung* $\wedge \frac{n}{m}$ *kann durch* $(n-m)$ *malige Anwendung der Coefficientenreihe 0. 1, 2, 3, . . . aus der Einheitsteilung abgeleitet werden.*

Obigen Coefficientenreihen entsprechen die Teilungsgleichungen:

$$(0) \quad \text{Teilung} \quad \varrho^n - \varrho^{n-1} \overset{(1)}{r} + \varrho^{n-2} \overset{(2)}{r} - \varrho^{n-3} \overset{(3)}{r} + \ldots = 0$$

$$(1) \quad \wedge \frac{n}{n-1} \quad \varrho^{n-1} \overset{(1)}{r} - 2\varrho^{n-2} \overset{(2)}{r} + 3\varrho^{n-3} \overset{(3)}{r} - \ldots - 0$$

$$(2) \quad \wedge \frac{n}{n-2} \quad 1.2\varrho^{n-2} \overset{(2)}{r} - 2.3\varrho^{n-3} \overset{(3)}{r} + \ldots = 0$$

$$(n-m) \quad \wedge \frac{n}{m} \quad 1.2 \ldots (n-m)\varrho^m \overset{(n-m)}{r} - 2.3 \ldots$$

$$\ldots (n-m+1)\varrho^{m-1} \overset{(n-m+1)}{r} + \ldots \pm (m+1)(m+2) \ldots n . \overset{(n)}{r} = 0$$

In umgekehrter Reihenfolge kann man an Stelle der Gleichung $(n-m)$ schreiben:

$$(m+1)(m+2) \ldots n \overset{(n)}{r} - m(m+1)(m+2) \ldots (n-1)\varrho \overset{(n-1)}{r}$$

$$+ (m-1)m(m+1) \ldots (n-2)\varrho \overset{2(n-2)}{r} - \ldots \pm 1.2 \ldots$$

$$\ldots (n-m)\varrho^m \overset{(n-m)}{r} = 0$$

dividirt man diese Gleichung durch

$$(m+1)(m+2) \ldots n \varrho^m \overset{(n)}{r}$$

so entsteht

$$(n-m)_1 \quad \left(\frac{1}{\varrho}\right)^m - \frac{m}{n}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{m-1} \overset{(1)}{\Sigma} \frac{1}{r} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{m-2} \overset{(2)}{\Sigma} \frac{1}{r} - \ldots = 0$$

worin

$$\overset{(1)}{\Sigma} \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}$$

$$\overset{(2)}{\Sigma} \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_{n-1}} \cdot \frac{1}{r_n} \quad \text{u. s. w.}$$

ist. Die m Wurzelbeziehungen dieser Gleichung $(n-m)_1$ sind iden-

tisch mit den m Eigenschaften der Polarcurven, welche bei Salmon-Fiedler „Höhere ebene Curven“ S. 138 (1873) entwickelt sind. Wir schliessen daraus:

IV. *Der Ort der Teilung* $\wedge \frac{n}{m}$ *ist die* $(n-m)$*te Polare (oder die Polare mier Ordnung) einer a. C. n. O.*

In der Form

$$F(u) = 0$$

lassen sich die Gleichungen der Polaren infolge § 7., Ib., wie folgt, ableiten

$$\text{a. C. n. O.:}\quad \overset{(n)}{u} + \overset{(n-1)}{u} + \overset{(n-2)}{u} + \overset{(n-3)}{u} + \ldots + \overset{(0)}{u} = 0$$

$$\text{1te Polare:}\quad \overset{(n-1)}{u} + 2\overset{(n-2)}{u} + 3\overset{(n-3)}{u} + \ldots + n\overset{(0)}{u} = 0$$

$$\text{2te Polare:}\quad 1.2\overset{(n-2)}{u} + 2.3\overset{(n-3)}{u} + \ldots$$

$$\ldots + (n-1)n.\overset{(0)}{u} = 0$$

. . . .

$$(n-1)\text{te Polare (gerade Polare)}\quad \overset{(1)}{u} + n\overset{(0)}{u} = 0$$

Die Teilung $\wedge \frac{n}{m}$ bezeichnen wir auch als „Polarteilung $m$ten Grades“.

Zur Ableitung der Gesetze über Polarteilungen ist die Gleichung $(n-m)$ wenig geeignet. Wir entwickeln eine andere. Aus der Ableitung durch die Coefficientenreihe 0, 1, 2 . . . erkennen wir zunächst das Gesetz:

(α) Jede Polare entsteht aus der Polare nächst höherer Ordnung durch dieselbe Operation [1]).

Dividiren wir die Gleichung der Einheitsteilung durch $r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_n$, so erlangt sie die Form

$$\frac{\varrho - r_1}{r_1} \cdot \frac{\varrho - r_2}{r_2} \cdot \frac{\varrho - r_3}{r_3} \ldots \frac{\varrho - r_n}{r_n} = 0$$

1) Dabei kann die Grundcurve als 0te Polare oder als Polare $n$ter Ordnung der a. C. n. O. angesehen werden.

Diese Gleichung kann als Combinationssumme der n Elemente $\frac{\varrho - r}{r}$ zur $n$ten Classe in der Form

$$\overset{(n)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0$$

geschrieben werden. Verringern wir die Classenzahl dieser Combinationssumme stetig um „1", so entsteht nach der $(n-m)$ten gleichen Operation

$$(n-m)_2 \qquad \overset{(m)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0$$

nach der $(n-1)$ten gleichen Operation

$$(n-1)_2 \qquad \overset{(1)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0$$

Diese Gleichung $(n-1)$ können wir schreiben

$$\frac{\varrho}{r_1} + \frac{\varrho}{r_2} + \ldots + \frac{\varrho}{r_n} = n$$

oder

$$\varrho \overset{(n-1)}{r} - n \overset{(n)}{r} = 0$$

Diese Gleichung ist aber nach § 7., Ib. identisch mit der Gleichung

$$\overset{(1)}{u} + n \overset{(0)}{u} = 0$$

welche, wie vorher abgeleitet, die gerade Polare der a. C. n. O. bedeutet. Gleichung $(n-m)_2$ muss die Polarteilung $m$ten Grades angeben, da sie durch fortgesetzte gleiche Operation aus der Einheitsteilung abgeleitet ist, und diese Operation schliesslich auf die Gleichung der Polarteilung ersten Grades führt. Multipliciren wir die Gleichung $(n-m)_2$ mit $\frac{r_1 . r_2 \ldots r_n}{(\varrho - r_1)(\varrho - r_2) \ldots (\varrho - r_n)}$, so finden wir

$$(n-m)_3 \qquad \overset{(m)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0 = \overset{(n-m)}{\Sigma} \frac{r}{\varrho - r} \quad \left[= \wedge \frac{n}{m} \right]$$

analog für $m = n - m$ [1])

$$(m)_3 \qquad \overset{(n-m)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0 = \overset{(m)}{\Sigma} \frac{r}{\varrho - r} \quad \left[= \wedge \frac{n}{n-m} \right]$$

1) Diese Gleichungen lassen sich leicht mit den Cremona'schen identificiren.

Gleichung $(n'' - m)$ giebt die $(n - m)$te Polare (m. O.) an

„ (m''') „ „ $m$te „ ((n — m). O.) an

Nach § 5., I. bedingt die Substitution

$$\varrho - r \quad \text{statt} \quad r$$

einen Wechsel von Pol und Polarpunkt (Polarpunkt an Stelle von Teilpunkt). Die genannte Substitution ergiebt

$$\overset{(m)}{\Sigma} \frac{\varrho - r}{r} = 0 = \overset{(m)}{\Sigma} \frac{r}{\varrho - r}$$
$$[\varrho - r \quad \text{statt} \quad r]$$

d. h. die $m$te Polare ist die „coordinirte Teilcurve" der $(n-m)$ten Polare. Aus § 5., III. folgt der in Bezug auf Polaren bekannte Satz:

„Gleitet der Pol auf der $m$ten Polare des Punktes O. i. B. a. C. n. O., so beschreibt die $(n-m)$te Polare i. B. a. C. n. O. ein System um den Punkt O."

Ableitung des ersten Teilungsgesetzes. Setzt man k Polfernen r gleich null [1]), so geht die Combinationssumme

$$\overset{n}{\underset{1}{}} \overset{(m)}{\Sigma} \frac{r}{\varrho - r} = 0 \qquad \left(\wedge \frac{n}{n-m}\right)$$

über in

$$\overset{n-k}{\underset{1}{}} \overset{(m)}{\Sigma} \frac{r}{\varrho - r} = 0 \qquad \left(\wedge \frac{n-k}{n-k-m}\right)$$

wenn $n - k > m$ ist. Es ergiebt sich das

Teilungsgesetz I. *Ist der Pol ein k facher Punkt einer a. C. n. O., so erleiden die Polgeraden durch Pol, Curve und m te Polare die Teilung*

$$\wedge \frac{n-k}{n-k-m}$$

Ist der Pol ein $(n-2)$ facher Punkt einer a. C. n. O., so werden sämtliche Polgeraden durch Pol, Curve und erste Polare harmonisch $\left(\wedge \frac{2}{1}\right)$ geteilt [2]).

---

1) Man setze

$$r_n = 0, \quad r_{n-1} = 0, \quad r_{n-2} = 0 \; \ldots \; r_{n-k+1} = 0$$

es bleiben nur noch die Polfernen r bis r_{n-k} bestehen.

2) i. B. auf eine C. III. O. bei Salmon-Fiedler S. 177 bewiesen.

Ableitung des zweiten Teilungsgesetzes. Wenn die $m$te Polare durch einen k fachen Punkt der Grundcurve geht, so werden k Polfernen r gleich ϱ. Die Summe

$$\overset{n}{\underset{1}{}}\overset{(n-m)}{\Sigma}\frac{\varrho-r}{r}=0 \qquad \left(\wedge\frac{n}{n-m}\right)$$

geht für diesen Fall über in

$$\text{(c)} \qquad \overset{n-k}{\underset{1}{}}\overset{(n-m)}{\Sigma}\frac{\varrho-r}{r}=0 \qquad \left(\wedge\frac{n-k}{n-m}\right)$$

wenn $n-k>n-m$ d. h. $k<m$ ist.

Es gilt in diesem Falle das

Teilungsgesetz II. *Wenn die mte Polare durch k fache Punkte einer a. C. n. O. geht, so erleiden die Polgeraden dieser k fachen Punkte die Teilung*

$$\wedge\frac{n-k}{n-m}$$

Geht die gerade Polare durch $(n-2)$ fache Punkte einer a. C. n. O., so werden die Polgeraden dieser $(n-2)$ fachen Punkte harmonisch $\left(\wedge\frac{n}{1}\right)$ geteilt.

Betrachten wir den Fall $k>m$. In der Summe (c) bleiben weniger Elemente als jeder Summand Factoren hat, da $n-k<n-m$ wird. Jeder Summand muss daher null werden. Der Gleichung (c) genügen also die m Werte von ϱ

$$\varrho=r_{n-m+1};\quad \varrho=r_{n-m+2};\quad \dots\quad \varrho=r_n$$

da für jeden dieser Werte die Gleichung (c) auf die Form $0=0$ kommt. Wir bemerken das bekannte Gesetz:

„Die $m$te Polare geht durch alle vielfachen Punkte der a. C. n. O., deren Anzahl grösser ist als m".

Ist die Classenzahl $n-m$ der Combinationssumme (c) um 1 geringer als die Zahl $n-k$ der nicht verschwindenden Elemente, ist also

$$k=m+1$$

so zeigt ein Summand der Combination (c) ein Null-Element, die anderen mehr. Ist

$$k=m+2$$

so zeigt ein Summand zwei Null-Elemente, die anderen mehr. Ist

$$k = m + K$$

so zeigt ein Summand K Null-Elemente, die übrigen mehr. In letzterem Falle kann die Gleichung (c) durch K Elemente dividirt werden, d. h.

(β) „Die $m$te Polare einer a. C. n. O. hat in deren $(m+K)$ fachen Punkten K fache Punkte".

§ 9. Unendlich ferne Pole.

Differentiirt man die Gleichung der Einheitsteilung

$$(0) \qquad (\varrho - r_1)(\varrho - r_2) \ldots (\varrho - r_n) = 0$$

nach ϱ, so entsteht nach $(n-m)$ maliger Differentiation

$$(n-m) \qquad \overset{(m)}{\Sigma}(\varrho - r) = 0$$

Da die $(n-1)$ malige Differentiation als „gleiche Operation" die Summe

$$(n-1) \qquad \overset{(1)}{\Sigma}(\varrho - r) = 0 \quad \text{d. h.}$$

$$n\varrho = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$

ergiebt, und diese Gleichung den Polarpunkt ersten Grades eines unendlich fernen Poles in Bezug auf n Grundpunkte bedeutet[1]), so muss infolge § 8., α die Gleichung $(n-m)$ die Polarpunkte $m$ten Grades des unendlich fernen Poles angeben. Die Gleichung $(n-m)$ aber ist nicht mehr auf den Pol, sondern auf jeden beliebigen Nullpunkt des Trägers der Grundpunkte bezogen.

Fällt der Nullpunkt auf einen Polarpunkt $m$ten Grades, so wird

$$\varrho = 0$$

Gleichung $(n-m)$ kommt auf die Form

$$(n-m)_1 \qquad \overset{(m)}{\Sigma}\, r = 0 \quad \text{oder} \quad \overset{(m)}{r} = 0$$

wie wir bisher geschrieben haben. Daher kann man auch sagen:

1) Salmon-Fiedler S. 133.

„Die Gleichung

$$\overset{(m)}{r} = 0$$

wird durch jeden Polarpunkt $m$ten Grades eines unendlich fernen Poles erfüllt“ [1]).

Während ein auf der Geraden U gleitender Punkt in Bezug auf die n gegebenen Grundpunkte der Geraden die Bedingung

$$\Sigma \overset{(m)}{r} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \overset{(m)}{r} = 0$$

m mal erfüllt, nämlich jedesmal, wenn er auf einen Polarpunkt $m$ten Grades fällt, so erfüllt ein beliebiger Nullpunkt der Curvenebene, um den eine Gerade U rotirt, die gleiche Bedingung

$$\overset{(m)}{r} = 0$$

in Bezug auf die a. *C.* n. O. und einen unendlich fernen Pol $n - m$ mal. Dies folgt sowol aus der Wechselbeziehung zwischen $m$ter und $(n-m)$ter Polare, da Pol und Polarpunkt einmal getauscht haben (der Nullpunkt wird jetzt Polarpunkt; vergl. Substitution $\varrho - r$ statt

---

1) Ist die Gleichung einer a. C. n. O. auf ein beliebiges Coordinatensystem (X, Y) bezogen, so kann man für eine beliebige Abscisse als Gleichung ihrer Schnittpunkte mit der a. C. n. O. schreiben

$$\overset{(n)}{\Sigma}(x - a) = 0$$

wenn a_1 bis a_n die für jede Abscisse als gegeben zu betrachtenden Entfernungen der Schnittpunkte von der Y-Axe bedeuten. Die Gleichung

$$\overset{(m)}{\Sigma}(x - a) = 0$$

bezeichnet alsdann die Polarpunkte $m$ten Grades eines unendlich fernen Poles in der Richtung der X-Axe. Daher muss bei Parallelverschiebung einer Abscisse

$$\overset{(m)}{\Sigma}(x - a) = 0$$

den Ort der Polarpunkte $m$ten Grades, den sogenannten krummlinigen Durchmesser ergeben. Daraus folgt:

„Durch partielle Differentiation der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

einer a. C. n. O. nach einer der beiden Variabelen entstehen die Gleichungen der krummlinigen Durchmesser in Bezug auf einen unendlich fernen Pol in der Richtung derjenigen Axe, welche der differentiirten Variabelen entspricht“,

r § 5., I.) als auch aus der Identität der Gleichungen (0) und (0′) des § 7. Setzt man nämlich

$$(0') \qquad \overset{(n-m)}{u} = 0$$

so muss entsprechend

$$(0) \qquad \overset{(m)}{r} = 0 \text{ [1]}$$

werden. Gleichung

---

1) Der Umstand, dass für

$$\overset{(m)}{u} = 0 \quad \text{auch} \quad \overset{(n-m)}{r} = 0$$

ist, lässt sich dazu benutzen, das Glied m ten Grades aus einer Gleichung n ten Grades

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

zu entfernen.

Das Glied m ten Grades sei $a x^m$. Der Factor a hat die Eigenschaft

$$a = \Sigma \overset{(n-m)}{x}$$

in welcher Summe die Wurzeln x_0 bis x_n enthalten sind. Soll nun $a x^m$ Null werden, so muss

$$\Sigma \overset{(n-m)}{x}$$

null werden, d. h. der Nullpunkt muss auf einen Polarpunkt $(n-m)$ ten Grades fallen, wenn wir uns unter der Gleichung

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

eine Reihe von n Punkten vorstellen, welche auf den Nullpunkt 0 bezogen sind. Die Polarpunkte $(n-m)$ ten Grades erkennen wir durch m malige Differentiation. Dadurch entsteht eine Gleichung $(n-m)$ ten Grades. Eine der $n-m$ Wurzeln dieser Gleichung sei α_k. Indem wir nun den Nullpunkt auf den Polarpunkt P_k verschieben, wird

$$\overset{(n-m)}{F \; x} = 0$$

also auch das Glied

$$a x^m = 0$$

Diese Verschiebung des Nullpunktes um α_k erreichen wir aber, wenn wir in der ursprünglichen Gleichung

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

setzen

$$x = x' + \alpha_k$$

Die neu entstandene Gleichung

$$\overset{n}{F}(x') = 0$$

$$\overset{(n-m)}{u} = 0$$

aber giebt $n-m$ durch den Nullpunkt gehende Geraden an. Diese $n-m$ Geraden befinden sich in solcher Lage, dass der Nullpunkt ein Polarpunkt $m$ten Grades des unendlich fernen Poles in Bezug auf die n Grundpunkte dieser Geraden ist. In analoger Weise bedeutet Gleichung

$$\overset{(m)}{u} = 0$$

diejenigen m Nullpunktsgeraden U, deren Nullpunkt ein Polarpunkt $(n-m)$ten Grades des unendlich fernen Poles ist. Diese m Geraden zeigen die Asymptotenrichtungen jeder homogenen Teilcurve $m$ten Grades an, denn für

$$\varrho = \infty$$

kommt Gleichung (1) des § 7. auf die Form

$$\overset{(n-m)}{r} = 0$$

Zugleich aber erfüllt sich, wie Gleichung (1′) des § 7. zeigt, die Bedingung

$$\overset{(m)}{u} = 0$$

da (1) und (1′) identische Gleichungen ein und derselben Teilcurve sind. Wir bemerken das Gesetz:

---

bezieht die Lage der ursprünglich gedachten n Punkten auf ihren Polarpunkt P_k als Nullpunkt. In der Gleichung fehlt daher der $m$te Grad der Variabeln x'. Um das Glied $m$ten Grades aus der Gleichung

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

zu entfernen, erkennen wir folgende allgemeine Regel:

„Man differentiire die gegebene Gleichung

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

m mal. Die neue Gleichung

$$\overset{n-m}{F}(x) = 0$$

habe die Wurzeln α_1 bis α_{n-m}. Eine beliebige dieser Wurzeln sei α_k. Setzt man in Gleichung

$$\overset{n}{F}(x) = 0$$

$$x = x' + \alpha_k$$

so verschwindet in der neu entstehenden Gleichung das Glied $m$ten Grades.

I. *„Der Nullpunkt ist ein Polarpunkt $(n-m)$ ten Grades des unendlich fernen Poles auf denjenigen m Nullpunktsgeraden, welche den Asymptoten einer beliebigen homogenen Teilcurve mter Ordnung parallel gerichtet sind“.*

Liegt die Grundcurve symmetrisch in Bezug auf ein Centrum, so ist ihre Gleichung

(a) $$(\varrho^2 - r_1^2)(\varrho^2 - r_2^2) \ldots = 0$$

wenn ihre Ordnungszahl gerade ist, dagegen

(b) $$\varrho(\varrho^2 - r_1^2)(\varrho^2 - r_2^2) \ldots = 0$$

wenn die Ordnungszahl ungerade ist, weil der Symmetrie halber ein Grundpunkt in den Pol fallen muss. Gleichung (a) fällt nach geraden Potenzen von ϱ, Gleichung (b) nach ungeraden Potenzen. Um diese Symmetrie-Curven daraufhin zu untersuchen, ob ihr Centrum, welcher Nullpunkt der Messung ist, ein Polarpunkt des unendlich fernen Poles ist, differentiire man beide Gleichungen fortgesetzt. Zeigt der letzte Summand einer von beiden Gleichungen ein ϱ, so lässt sich die ganze Gleichung durch ϱ dividiren. Das Centrum ist in diesem Falle ein Polarpunkt des unendlich fernen Poles in der Richtung der betreffenden Nullpunktsgeraden. Wir sehen unmittelbar, dass sowol Gleichung (a) wie (b) trotz mehrfachen Differentiirens nur Gleichungen entstehen lassen, welche höchstens ϱ in der ersten Potenz im letzten Gliede enthalten, dass ferner die Ordnung dieser Gleichungen in allen Fällen ungerade ist. Es fällt daher stets nur „ein“ Polarpunkt des unendlich fernen Poles in's Centrum der Symmetrie, vorausgesetzt, dass das Centrum kein mehrfacher Punkt der Grundcurve ist wie auch in (a) und (b) angenommen ist. Der Grad der Gleichung ist ungerade, wenn ein Polarpunkt in das Centrum fällt. Ist nun durch Differentiation von (a) oder (b) eine Gleichung $(2k-1)$ ten Grades entstanden, so giebt diese die Polarpunkte $(2k-1)$ ten Grades eines unendlich fernen Poles an. Wir bemerken das Gesetz:

II. *Ist der Grad der Polarpunkte ungerade, so fällt ein Polarpunkt des unendlich fernen Poles in das Centrum der Symmetrie.*

Dieses Gesetz gilt auf jeder durch das Centrum gehenden Geraden.

Da die m te Polare $(n-m)$ ter Ordnung ist, so folgt:

III. *Die mte Polare eines unendlich fernen Poles (d. i. der Durchmesser $(n-m)$ ter Ordnung) geht durch das Centrum der Symmetrie, wenn $n-m$ eine ungerade Zahl ist.*

§ 10. Centralen.

In der Ebene einer a. C. n. O. wähle man einen beliebigen Punkt als Nullpunkt O. Auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden U erzeuge man die Teilung $\wedge \frac{n}{n-m}$ in Bezug auf einen unendlich fernen Pol der Geraden U. Die entstehenden Teilpunkte jeder Nullpunktsgeraden werden durch die Gleichung

$$\text{(m)} \qquad \overset{(n-m)}{\Sigma}(\varrho - r) = 0$$

auf den beliebig gewählten Nullpunkt O bezogen.. Gleichung (m) ist durch m malige Differentiation aus der Grundgleichung

$$\text{(0)} \qquad (\varrho - r_1)(\varrho - r_2)\ \ldots\ (\varrho - r_n) = 0$$

entstanden. Entwickeln wir letztere, so wird

$$\text{(0')} \qquad \varrho^n - \varrho^{n-1}\overset{(1)}{r} + \varrho^{n-2}\overset{(2)}{r} - \ldots \pm \varrho \overset{(n-1)}{r} \mp \overset{(n)}{r} = 0$$

Die m malige Differentiation ergiebt

$$\text{(m)} \quad n(n-1)\ldots(n-m+1)\varrho^{n-m} - (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\varrho^{n-m-1}\overset{(1)}{r} + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1)\ldots 2.1 \overset{(n-m)}{r} = 0$$

Vermöge der allgemeinen Polfernenbeziehung des § 2.

$$\overset{(k)}{r} = \pm \frac{\overset{(n-k)}{\psi}}{\overset{(n)}{\psi}}$$

geht Gleichung (m) nach Multiplication mit $\varrho^m \overset{(n)}{\psi}$ über in

$$\text{(m')} \quad n(n-1)\ldots(n-m+1)\varrho^n \overset{(n)}{\psi} - (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\varrho^{n-1}\overset{(n-1)}{\psi} + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1)\ldots 2.1\, \varrho^m \overset{(m)}{r} = 0$$

Da ferner $\varrho^k \overset{(k)}{\psi}$ die Polarform von $\overset{(k)}{u}$ ist (vergl. § 2.), so ist die Gleichung der gesuchten Teilcurve in der Form

$$F(u) = 0$$

$$(\mathrm{m}'') \quad n(n-1) \ldots (n-m+1) \overset{(n)}{u} + (n-1)(n-2) \ldots (n-m) \overset{(n-1)}{u} + \ldots$$
$$\ldots + m(m-1) \ldots 2.1 \overset{(m)}{u} = 0$$

Die entstandene Teilcurve nennen wir

„$m$te Centrale“

Multipliciren wir Gleichung (m) mit ϱ^m, so wird

$$(\mathrm{m}''') \quad n(n-1) \ldots (n-m+1)\varrho^n - (n-1)(n-2) \ldots (n-m)\varrho^{n-1} \overset{(1)}{r} + \ldots$$
$$\ldots \pm m(m-1) \ldots 2.1 \varrho^m \overset{(n-m)}{r} = 0$$

Wir bemerken, dass das Gesetz I. des § 7. Gültigkeit hat, d. h.

I. *Die Centralen sind homogene Teilcurven.*

Da Gleichung (m) durch Differentiation aus der Einheitsteilung abgeleitet wurde, so folgt

II. *Die mte Centrale einer a. C. n. O. ist der Ort der Teilung*

$$\wedge \frac{n}{n-m}$$

i. B. a. C. n. O., wenn der Pol jeder Nullpunktsgeraden im Unendlichen liegt.

Aus Gleichung (m″) sehen wir:

III. *Die mte Centrale einer a. C. n. O. ist eine a. C. n. O., welche im Pol einen m fachen Punkt hat.*

Die homogene Summe $\overset{(n)}{u}$ ist der Grundgleichung wie auch allen Centralgleichungen gemeinsam, d. h.

IV. *Die a. C. n. O. hat mit allen Centralen eines beliebigen Punktes ihrer Ebene gleiche Asymptotenrichtungen.*

Setzen wir in III.

$$m = n$$

so folgt

V. *Die nte Centrale einer a. C. n. O. zerfällt in einen Büschel von n Strahlen, welche die Asymptotenrichtungen der Grundcurve angeben.*

Das Gesetz IV. des § 7. lässt erkennen

VI. *Ist der Nullpunkt ein k facher Punkt der a. C. n. O., so ist er auch ein k facher Punkt jeder Centrale.*

Nach Satz II. kann die *m*te Centrale als Ort der Polarteilung

$$\wedge \frac{n}{n-m}$$

erzeugt werden; daher findet auch das Gesetz (β) des § 8. statt, d. h.

VII. *Die mte Centrale einer a. C. n. O. hat in deren $(m+K)$ fachen Punkten K fache Punkte.*

Allgemeiner können wir infolge § 8., β) sagen:

VIII. *Im $(m+K)$ fachen Punkte einer a, C. n. O. schneiden sich mte Polare und mte Centrale K mal.*

Nach Satz III. des § 9. folgt

IX. *Im Centrum der Symmetrie einer a. C. n. O. schneiden sich mte Centrale und mter Durchmesser ($(n-m)$ter Ordnung), wenn $n-m$ eine ungerade Zahl ist.*

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die Gleichungen ähnlich wie die Gleichungen der Polaren durch die Coefficientenreihe

$$0, \ 1, \ 2, \ 3 \ \ldots$$

erzeugt werden können, doch muss diese Coefficientenreihe in Bezug auf steigende Potenzen von ϱ resp. auf homogene Summen steigenden Grades wie folgt angewendet werden

(0) Grundcurve $\overset{0}{u} + \overset{(1)}{u} + \overset{(2)}{u} + \overset{(3)}{u} + \ldots + \overset{(n)}{u} = 0$

(1) 1te Centrale $1\overset{(1)}{u} + 2\overset{(2)}{u} + 3\overset{(3)}{u} + \ldots + u.\overset{(n)}{u} = 0$

(2) 2te Centrale $1.2\overset{(2)}{u} + 2.3\overset{(3)}{u} + \ldots + (n-1n.\overset{(n)}{u} = 9$

(m) *m*te Centrale $1.2\ldots m\overset{(m)}{u} + 2.3\ldots(m+1)\overset{(m+1)}{u} + \ldots$

$\ldots + (n-m+1)\ldots n.\overset{(n)}{u} = 0$

Ein Vergleich der letztentwickelten Gleichung mit Gleichung m″ zeigt an, dass hier in der Tat die Gleichungen der Centralen vorliegen.

Die Entwickelung mittelst Coefficientenreihe hat auch den Vorzug, die im Pol verschwindenden Elemente in den Teilungsgleichungen mitzuführen wie dies das Beispiel zeigt

$$\overset{(3)}{r} - \varrho \overset{(2)}{r} + \varrho^2 \overset{(1)}{r} - \varrho^3 = 0 \qquad \text{a. C. III. O.}$$

$$\varrho \overset{(2)}{r} - 2\varrho^2 \overset{(1)}{r} + 3\varrho^3 = 0 \qquad \text{1te Centrale}$$

$$1.2\varrho^2 \overset{(1)}{r} - 2.3\varrho^3 = 0 \qquad \text{2te Centrale}$$

$$\varrho^3 = 0 \qquad \text{3te Centrale}$$

XX.

Ueber die Variation der Parallelprojection einer Ellipse mit der Richtung der projicirenden Strahlen und mit der Lage der Projectionsebene.

Von

Herrn Prof. Dr. **Ph. Weinmeister**

in Tharand.

Projicirt man eine Ellipse mittelst paralleler Strahlen auf eine Ebene, so erhält man bekanntlich wieder eine Ellipse. Zu ihrer Bestimmung muss ausser der zu projicirenden Ellipse die Richtung der projicirenden Strahlen gegeben sein und die Projectionsebene. Wir wollen nun im folgenden zunächst (I) von der Strahlenrichtung absehen und die verschiedenen Ellipsen mit einander vergleichen, welche durch Parallelprojection einer gegebenen Ellipse auf eine gegebene Ebene entstehen, und sodann (II) soll von der Lage der Projectionsebene abgesehen werden, und es sollen somit alle Ellipsen mit einander verglichen werden, welche bei gegebener Strahlenrichtung durch Projection einer gegebenen Ellipse entstehen, oder mit anderen Worten, es sollen alle ebenen Schnittfiguren eines gegebenen elliptischen Cylinders untersucht werden.

I.

Es sei (Fig. 1.) M' der Mittelpunkt der festen Ellipse und E die Ebene, auf welche projicirt wird. In dieser können wir den Mittelpunkt M der durch Projection erhaltenen Ellipse, die wir kurz Projectionsellipse nennen wollen, beliebig wählen. $M'M$ ist

dann die Richtung der projicirenden Strahlen. Durchläuft M die Gerade G, so beschreibt $M'M$ eine Ebene, deren Schnittlinie G' mit der Ebene durch M' zu G projectiv zugeordnet ist trotz der Unbestimmtheit der Richtung der projicirenden Strahlen. In gleicher Weise haben die zu G' parallelen Tangenten L_1' und L_2', ebenso wie alle Parallelen zu G' feste Projectionen, ein Satz, dem wir folgende Fassung geben wollen:

„Zwei Projectionsellipsen haben immer zwei Tangenten gemein- „sam, welche ihrer Centrale parallel liegen" . . . . (1)

Dieser Satz verallgemeinert sich zu folgendem:

„Durchläuft der Mittelpunkt der Projectionsellipse eine beliebige „Curve und wird in Folge dessen die Projectionsellipse von einer „Curve umhüllt, so ist für jeden Moment der Bewegung die Tan- „gente der Mittelpunktscurve derjenigen Tangente der Umhüllungs- „curve parallel, welche sie mit der Projectionsellipse gemeinsam „hat" . . . . (2)

Wir wollen von jetzt ab annehmen, dass sich die Ellipsenebenen in der gemeinsamen Tangente T (Fig. 2.) mit dem Berührpunkt B schneiden. Dies ist zulässig, da durch Parallelverschiebung der Ebene E kein neues Projectionsgebilde entsteht. Die Ellipsen müssen ferner in der Länge des zu T parallelen Halbmessers R übereinstimmen. Nimmt man nun wieder M in E beliebig, so sind in seinen Polarcoordinaten $MB = r$ und Wkl. $MBT = \theta$ und der Länge R zwei zugeordnete Halbmesser mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben, und es genügen mithin die Bestimmungen hinsichtlich der Berührung von T in B und der Länge R, um eine in B gelegene Ellipse als Projectionsellipse zu charakterisiren. D. h:

„Sämtliche in E gelegene Ellipsen, welche T in B berühren, „und deren zu T paralleler Halbmesser gleich R ist, sind Pro- „jectionsellipsen" . . . . (3)

Zugleich erkennen wir, dass sich durch zwei im Raume gelegene Ellipsen, welche in einer Tangente, dem Berührpunkt und der Länge des der Tangente parallelen Halbmessers übereinstimmen, immer ein Cylinder legen lässt. Für die vorliegende Entwickelung folgt aus (3), dass die zunächst für den dreifach ausgedehnten Raum angebahnte Untersuchung in die Ebene verlegt werden kann. Man kann nun leicht die zu den Projectionsellipsen gehörenden beiden Kreise aufsuchen, sowie vier congruente Ellipsen, wenn deren Axen der Länge nach gegeben sind In weiterer Folge kann man die Theorie der Projectionsellipsen auf den Raum übertragen, indem man Projectionsellipsoide mit gemeinsamer Tangentialebene einführt.

Projectionsellipsen von gegebener Fläche.

Da die Ellipsenfläche $= \pi R r \sin\theta$ und R bereits bekannt ist, so gilt für alle flächengleichen Projectionsellipsen $r \sin\theta = \text{const.}$ d. h.

„Der Centralort aller flächengleichen Projectionsellipsen besteht aus zwei zu T parallelen Geraden" . . . . (4)

Die Grösse der Ellipse ist hierbei an keine Grenzen gebunden. Ferner ist der Krümmungshalbmesser des Punktes B (Fig. 3)

$$= \frac{R^3}{R r \sin\theta} = \text{const} \quad \text{d. h.}$$

„Alle flächengleichen Projectionsellipsen berühren sich in B in „der zweiten Ordnung" . . . . (5)

Da sonach in B drei der vier Schnittpunkte zusammenfallen, so bleibt nach einer A in isolirter Lage übrig. Zwei gleiche Projectionsellipsen haben hiernach immer und nur zwei verschiedene Schnittpunkte und zwei verschiedene (parallele) Tangenten gemeinsam. Die Lage ihrer gemeinsamen Sehne AB ist mit Hülfe der Mittelpunkte M und M_1 leicht zu bestimmen, da sie die Centrale MM_1 halbirt. Die Fixirung des Punktes A geschieht mittelst der Proportion:

$$BA : AC = 4R^2 : \overline{MM_1}^2 \tag{6}$$

wo C der Schnittpunkt der zweiten Tangente mit AB ist. Ferner schneidet jede zu T parallele Secante beide Ellipsen in gleichen Sehnen. Um die Lage der Axen zu erhalten, errichtet man bekanntlich

$$BW = R$$

senkrecht auf T, beschreibt durch M und W einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf T anzunehmen ist, und verbindet seine auf T gelegenen Punkte U und V mit M. Ist nun im speciellen Falle die Fläche der Ellipse $= \pi R^2$, so wird MW von T halbirt, und es ist $MUWV$ ein Rechteck. Hieraus ergiebt sich:

„Die Axen der Projectionsellipsen von der Fläche πR^2 hüllen „eine Parabel ein, welche W zum Brennpunkt und T zur Scheitel- „tangente hat" . . . . (7)

Projectionsellipsen mit gegebener Quadrantensehne.

Unter „Quadrantensehne" verstehen wir die Verbindungslinie eines Haupt- und Nebenscheitels der Ellipse. Die Bezeichnung ist eingeführt, um die weitläufigere Ausdrucksweise zu vermeiden, dass

die Quadrate der Halbaxen eine gegebene Summe haben sollen. Nun ist die Quadratsumme der Halbaxen

$$= R^2 + r^2$$

Da diese einen gegebenen Wert haben soll, und R bereits bekannt ist, so gilt $r = \text{const}$ d. h.

„Der Centralort aller Projectionsellipsen mit gegebener Qua-„drantensehne ist ein Kreis um den Punkt B“ . . . . (8)

In den Schnittpunkten dieses Kreises mit T entartet die Ellipse zur Strecke.

Sonach bestimmt der Abstand des Mittelpunktes von T die Fläche und sein Abstand von B die Quadrantensehne der Projectionsellipse.

Wir erledigen noch die Frage nach den Umhüllungscurven der hierher gehörigen Ellipsen (Fig. 4.) Man ziehe die zu MB parallelen Tangenten $A\alpha$ und $C\gamma$. Dieselben schneiden auf T die Strecken

$$AB = BC = R$$

ab. Nach (2) erhält man die der Projectionsellipse und der Umhüllungscurve gemeinsame Tangente als Lot XY auf der Verlängerung von MB, da die Tangente des Ortskreises um B auf BM senkrecht steht. Nun ist bekanntlich

$$\alpha X \,.\, \gamma Y = r^2$$

Da aber

$$A\alpha = C\gamma = r$$

so kann diese Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$(AX - r)(CY - r) = r^2$$

Zieht man nun $X'Y'$ parallel XY unter dem Abstand r, so ist dann auch

$$AX' \,.\, CY' = r^2$$

$X'Y'$ hüllt mithin eine Ellipse ein, welche A und C zu Brennpunkten und r zur halben Nebenaxe hat. Dann muss aber XY eine Aequidistante dieser Ellipse einhüllen. Ergänzt man die Betrachtung durch die zu XY parallele Tangente, so ergiebt sich:

„Die Projectionsellipsen mit gleichen Quadrantensehnen werden „von zwei Aequidistanten zu einer Ellipse umhüllt“ . . . . . . (9)

Projectionsellipsen mit gegebenem Halbaxenverhältniss $a : b$.

Lage des Mittelpunktes.

Aus

$$R^2 + r^2 = a^2 + b^2 \quad \text{und} \quad Rr\sin\theta = ab$$

ergiebt sich

$$\frac{R^2 + r^2}{Rr\sin\theta} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2\lambda$$

Hiernach ist $\lambda \left(\geqq 1\right)$ eine gegebene Grösse. Für $\lambda = 1$ ist die Ellipse ein Kreis; je grösser λ, um so grösser die Exentricität. Aus der zuletzt aufgestellten Gleichung geht hervor

$$R^2 - 2\lambda Rr\sin\theta + r^2 = 0$$

oder

$$\lambda^2 R^2 - 2\lambda Rr\sin\theta + r^2 = R^2(\lambda^2 - 1)$$

Trägt man nun (Fig. 5.)

$$LB = \lambda R$$

senkrecht zu T ab, so ist

$$LM = R\sqrt{\lambda^2 - 1} = \text{const}$$

d. h.:

„Der Centralort aller Projectionsellipsen mit gegebenem Halb-„axenverhältniss ist ein Kreis" . . . . (10)

Ferner ist die Potenz des Punktes B in Beziehung auf diesen Kreis

$$= BL^2 - LM^2 = R^2$$

d. h.:

„Der Kreis mit R um B schneidet alle Ortskreise des Mittel-„punktes M senkrecht. Diese haben daher T zur gemeinsamen „Potenzlinie" . . . . (11)

Ist NH der zu T senkrechte Durchmesser des Kreises um L, so sind dessen Endpunkte die Mittelpunkte der grössten und kleinsten (in der Figur nur zur Hälfte gezogen) Ellipse, und zwar ist die Hauptachse der kleinsten gleich der Nebenaxe der grössten = 2R.

Bestimmung der Axen.

Treffen die Linien MH und MN die Tangente T in U und V, so ist

$$UB \,.\, BV = BH \,.\, BN = R^2$$

MU und MV sind sonach zugeordnete Durchmesser und, da sie auf einander senkrecht stehen, Axen. D. h.

„Die Hauptachsen sämtlicher ähnlichen Projectionsellipsen „schneiden sich in H, die Nebenaxen in N“ . . . . (12)

Die Kreise um M, U, V bilden dasjenige Büschel, welches den Kreis um L und alle die, welche mit diesem T zur gemeinsamen Potenzlinie haben, senkrecht schneidet. Die reellen Schnittpunkte dieses Büschels sind die Mittelpunkte der beiden Kreise, welche zu den Projectionsellipsen gehören (Punkt W in Fig. 3.)

Der Satz (12) ergiebt sich übrigens auch aus der Formel:

$$\text{Ellipsennormale } BH = R \cdot \frac{b}{a}$$

Nach (1) ist die Tangente welche die Ellipse um M mit der um N gemeinsam hat, parallel MN. Sie steht also senkrecht auf der Hauptaxe der ersteren Ellipse. D. h.:

„Hat eine Projectionsellipse B zum Hauptscheitel (Nebenschei- „tel), so berührt jede ihrer Tangenten eine ähnliche Projections- „ellipse im Hauptscheitel (Nebenscheitel)“ . . . . (13)

Denken wir uns, dass der Ellipsenmittelpunkt den Kreis um L durchläuft, und dass seine Bewegung in N beginnt, so wird die Ellipse während der Bewegung kleiner und sie dreht sich zugleich. Den Drehungswinkel δ kann man aus der Lage der Nebenaxen bestimmen. Derselbe

$$= \text{Wkl. } NVB = \text{Wkl. } VMP$$

Er ist daher der Winkel, unter welchem

$$R = MP \parallel T$$

gegen die Nebenaxe der Ellipse geneigt ist. R und δ sind sonach die Polarcoordinaten des Punktes P, und es gilt für dieselben die Gleichung:

$$\left(\frac{R \cdot \sin\delta}{a}\right)^2 + \left(\frac{R \cdot \cos\delta}{b}\right)^2 = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

Da ausserdem das Verhältniss $a:b$ gegeben ist, so kann man hieraus die Grösse der Halbaxen in ihrer Abhängigkeit vom Drehungswinkel bestimmen.

Lage der Brennpunkte.

Aus Gleichung (14) ergiebt sich:

$$\left(R \cdot \frac{e}{b}\right)^2 = e^2 + \left(R \cdot \frac{e^2}{ab} \cdot \sin\delta\right)^2$$

Bezeichnet man den Brennpunkt der beweglichen Ellipse mit F, so ist

$$MF = e \quad \text{und} \quad NM = R.\frac{e^2}{ab}.\sin\delta$$

mithin ist

$$NF = R.\frac{e}{b} = \text{const}$$

d. h.

„Die Brennpunkte aller ähnlichen Projectionsellipsen liegen auf „dem Kreise, welcher um N durch die Brennpunkte der grössten „Ellipse gezogen werden kann" . . . . (15)

(In der Figur ist dieser Kreis nur durch einen Bogen angedeutet.) Derselbe gehört mit dem um L zu demjenigen Kreisbüschel, welches T zur gemeinsamen Potenzlinie hat.

Die Umhüllungscurven.

Der Kreis um N durch B ist der Hauptaxenkreis der grössten und der grösste Krümmungskreis der kleinsten Ellipse. Da sein Mittelpunkt auf der Nebenaxe der Ellipse um M liegt, und er dieselbe in B berührt, so muss er sie auch noch in einem zweiten Punkte berühren. Ebenso findet eine doppelte Berührung dieser Ellipse mit dem Kreis um H durch B statt, dem Nebenaxenkreis der kleinsten und dem kleinsten Krümmungskreis der grössten Ellipse. D. h.

„Die ähnlichen Projectionsellipsen werden von den beiden Kreisen „um H und N durch B umhüllt" . . . . (16)

Ueber die Bewegung von Geraden und Punkten, welche mit der veränderlichen Ellipse um M zu einem System von unveränderlicher Gestalt verbunden sind.

Man kann gerade Linien und Punkte mit der beweglichen Ellipse zu einem System von unveränderlicher Gestalt verbinden, indem man beispielsweise hinsichtlich einer Geraden voraussetzt, dass sie die Ellipsenaxen in einem unveränderlichen Verhältniss teilt, und hinsichtlich eines Punktes, dass der durch ihn gehende Halbmesser einen unveränderlichen Winkel mit der Hauptaxe bildet und von dem Punkte in einem unveränderlichen Verhältniss geteilt wird. Betrachten wir zunächst den Fall eines zum System gehörigen Durchmessers (Fig. 6.). Da derselbe mit der Hauptaxe MH einen unveränderlichen Winkel ω bildet, so muss der Punkt M_1, in welchen er den Kreis um L trifft, fest liegen, d. h.

„Die Durchmesser der beweglichen Ellipse drehen sich um feste „Peripheriepunkte des Kreises um L“ . . . . (17)

Die unter dem Winkel ω gegen die Hauptaxe geneigte Tangente τ berührt nach (1) auch die ähnliche Projectionsellipse mit dem Mittelpunkt M_1. D. h.

„Jede Tangente der beweglichen Ellipse hüllt eine ähnliche „Projectionsellipse ein“ . . . . (18)

Es seien P und P_1 die Berührpunkte von τ mit den Ellipsen um M und M_1. G sei eine zu τ parallele Gerade, welche von MP in Q und von M_1P_1 in Q_1 getroffen wird. Nehmen wir nun an, dass G zum System der Ellipse um M gehört, so ändert sich

$$MP : MQ = M_1P_1 : M_1Q_1$$

nicht, d. h.:

„Jede zum System gehörige Gerade hüllt eine Ellipse ein, welche „zu einer der ähnlichen Projectionsellipsen concentrisch und ähn- „lich ist und ähnlich liegt“ . . . . (19)

Diese Curve entartet nur dann zu einem Punkte, wenn G Durchmesser ist. Endlich wähle man den Fusspunkt X des von M auf G gefällten Lotes als zum System gehörigen Punkt. Da sich nun MX um einen festen Punkt dreht (17), und G eine Ellipse einhüllt (19), so gilt der Satz:

„Ein jeder zum System gehörige Punkt durchläuft die Fuss- „punktcurve einer Ellipse“ . . . . (20)

Mittelpunkt und Brennpunkte sind die einzigen Punkte, für welche diese Curve zu einem Kreise entartet.

Ueber die Schnittpunkte P und Q der veränderlichen Ellipse mit der grössten Ellipse.

Um die Schnittpunkte P und Q (Fig. 7.) der Ellipse in der allgemeinen Lage mit der Ellipse um N zu finden, wende man den Satz an: Sind an eine Ellipse zwei Tangenten nebst der zugehörigen Berührsehne gezogen, so stehen für den laufenden Curvenpunkt das Product seiner Abstände von den Tangenten und das Quadrat seines Abstandes von der Berührsehne in einem unveränderlichen Verhältniss. In Figur 7. seien die beiden gemeinsamen Tangenten T oder BO und JSO gezogen. Wir können nun den obigen Satz auf beide Ellipsen anwenden. Da nun aber OB Scheiteltangente der Ellipse um N, OS Scheiteltangente der ähnlichen Ellipse um M ist (13),

und ausserdem der Tangentenwinkel δ (Drehungswinkel s. oben) in beiden Fällen derselbe ist, so erkennt man, dass die Ellipsen mit den Tangenten verbunden ähnliche Systeme bilden. Sonach muss das Verhältniss, von welchem zu Eingang dieses Abschnittes die Rede war, in beiden Fällen dasselbe sein. Hieraus ergiebt sich, dass die Schnittpunkte P und Q von den Berührsehnen BJ und BS um gleichviel abstehen. Oder:

„Die gemeinsamen Sehnen, welche in B zusammenstossen, hal-„biren den Winkel beider Berührsehnen" . . . . (21)

Aus der Aehnlichkeit beider Systeme schliesst man ferner mittelst einfacher Winkelgleichungen, dass

$$\text{Wkl. } PBN = \tfrac{1}{2}\delta, \quad \text{d. h.}$$

„Der Winkel, welchen die gemeinsame Sehne BP mit der Haupt-„axe BN bildet, ist die Hälfte des Drehungswinkels gleich" . . (22)

Zum Schluss dieses Abschnittes sei noch erwähnt, dass wir hier von der Bedeutung der Geraden T als Symmetrieaxe der durch Projection erhaltenen Gebilde der Kürze halber abgesehen haben; eigentlich hätten statt des einen Kreises in (10) deren zwei genannt werden müssen, u. s. w.

Coordinaten der Brennpunkte der Projectionsellipsen.

Die Ortscurven der Brennpunkte sind (abgesehen von (15)) ziemlich verwickelter Art; will man dieselben untersuchen, so empfiehlt es sich ihre Gleichungen aufzustellen und zu dem Zwecke zunächst die Coordinaten der Brennpunkte zu bestimmen. Wählt man T zur x-Axe und B zum Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so genügt der Mittelpunkt und R zur Bestimmung der Brennpunkte. Man bezeichne die Coordinaten des Mittelpunktes mit x_m, y_m und die des einen Brennpunktes mit x, y; alsdann ergeben sich mit Hülfe einfacher Ellipsensätze folgende Formeln:

$$x_m = \tfrac{1}{2}x\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right), \quad y_m = \tfrac{1}{2}y\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der Mittelpunktscurve ein, so erhält man die der Brennpunktcurve.

Allgemeiner Fall: Die Schnittlinie beider Projectionsebenen berührt die Ellipsen nicht.

In diesem Falle sind von der Projectionsellipse ihre beiden reellen oder imaginären Schnittpunkte mit T und dann, wie oben, der zu T parallele Halbmesser R gegeben. Trifft der T zugeord-

nete Durchmesser diese Gerade in O, und wird die Ebene der Projectionsellipsen parallel verschoben, so bewegen sich ihre Mittelpunkte auf geraden Linien durch O und zwar bilden sie hierbei ähnliche Systeme, die in Beziehung auf O ähnlich liegen. Die Projectionsellipsen werden von einander entfernt oder dichter zusammengeschaart, behalten aber ihre gegenseitige Lage, Grösse und Gestalt bei. Hiernach erweitern sich die oben aufgestellten Sätze über Centralörter auch auf den allgemeinen Fall. Untersucht man noch die übrigen Sätze über Umhüllungscurven u. s. w., so findet man, dass auch hier keine bemerkenswerte Aenderung eintritt.

II.

Ueber einer Ellipse mit den Halbaxen a_1, b_1 (Basisellipse) sei ein gerader Cylinder errichtet. Eine unter dem Winkel ω gegen die Basis geneigte Ebene schneide ihn in einer Ellipse (Schnittellipse) mit den Halbaxen a, b. Dann ist bekanntlich

$$a_1 b_1 = ab\cos\omega \qquad (24)$$

Hieraus ergiebt sich:

„Die Ebenen flächengleicher Schnittellipsen mit gemeinsamen „Mittelpunkt hüllen einen Umdrehungskegel ein, welcher die Cylin- „deraxe zur Axe hat“ . . . . (25)

Schnittellipse und Basisellipse mögen M zum gemeinsamen Mittelpunkt (Fig. 8.) und R zum gemeinsamen Halbmesser haben. r sei der R zugeordnete Halbmesser der Schnittellipse, r' seine Projection, und h, die Höhe des elliptischen Hufes, verbinde die Endpunkte von r und r'. Dann ist

$$a_1^2+b_1^2 = R^2+r'^2 \quad \text{und} \quad a^2+b^2 = R^2+r^2$$

folglich

$$a^2+b^2-a_1^2-b_1^2 = h^2 \qquad (26)$$

Da man nun h auffassen kann als die Normalprojection der halben Schnittellipse auf die Axe, so gilt folgender Satz:

„Schnittellipsen mit gleichen Quadrantensehnen haben gleiche „Normalprojectionen auf die Cylinderaxe“ . . . . (27)

Die Basisellipse hat sonach die kleinste Fläche und die kleinste Quadrantensehne. Aus (27) ergeben sich weiter die Sätze:

„Die Ebenen der Schnittellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkt

„und gleichen Quadrantonsehnen hüllen einen geraden elliptischen „Kegel ein, welcher in der Axe und der Basisellipse mit dem Cy- „linder übereinstimmt" . . . . (28)

„Haben die Flächen zweier Schnittellipsen gleiche Neigung gegen „die Axe und gleiche Normalprojectionen auf dieselbe, so sind sie „congruent" . . . . (29)

Aufgabe: Man soll durch einen Punkt M in der Axe eines elliptischen Cylinders eine Ebene legen, deren Schnittellipse die gegebenen Halbaxen a, b hat.

Aufl. Man bestimme zunächst mittelst (24) und (26) ω und h und schneide hierauf die Axe senkrecht durch eine Ebene im Abstand h von M, wodurch man eine der Basis congruente Ellipse erhält. Man ziehe hierauf einen der letzteren concentrischen Kreis mit dem Halbmesser $h.\cot\omega$, lege an Kreis und Ellipse die gemeinsamen Tangenten und durch diese und M Schnittebenen.

Die Bedingung der Lösbarkeit ist

$$a_1 \geqq h \cot \omega \geqq b_1$$

oder mit Benutzung von (24) und (26)

$$a \geqq a_1 \geqq b \geqq b_1 \quad . . . . (30)$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ergiebt sich auch daraus, dass es einen beiden Ellipsen gemeinsamen Halbmesser geben muss.

Man erhält im allgemeinen vier Lösungen, zwei dagegen, wenn sich die beiden Hülfscurven doppelt berühren; im letzteren Falle ist eine der gegebenen Axen einer Axe der Basisellipse gleich. Ist die Basisellipse ein Kreis, so haben nach (30) alle Schnittellipsen seinen Durchmesser zur Nebenaxe; soll aber die Schnittellipse ein Kreis sein, so ist dessen Durchmesser der Hauptaxe der Basisellipse gleich zu nehmen. Die Bedingung (30) ist auch dann notwendig und hinreichend, wenn die beiden Ellipsen demselben Cylinder angehören sollen, ohne dass die Perpendicularität der einen Ellipsenebene zur Axe verlangt wird Ist daher (30) erfüllt, so gilt folgender Satz:

„Sind die Mittelpunkte zweier beliebig im Raume gelegenen „Ellipsen durch eine Gerade verbunden, so lässt sich die eine „von beiden immer durch drei Drehungen in den durch die andere „und jene Verbindungslinie bestimmten Cylinder hineinbewegen . (31)

Hat man nämich mittelst der festen Ellipse und der Cylinderaxe ω und h bestimmt, so gebe man der Ebene der beweglichen Ellipse zunächst die erforderliche Neigung gegen die Axe und drehe hierauf die Ellipse in ihrer Ebene um den Mittelpunkt bis ihre Normalprojection auf die Axe gleich $2h$ ist. Alsdann ist der durch sie bestimmte Cylinder dem durch die feste Ellipse bestimmten congruent und kann mit ihm mittelst einer Drehung um die gemeinsame Axe zur Deckung gebracht werden.

Die Bestimmung des der Schnittellipse und der Basisellipse gemeinsamen Halbmessers R ergiebt sich aus Figur 8. Fällt man nämlich aus den Endpunkten von h Lote auf R, so sind dieselben

$$= \frac{ab}{R} \quad \text{und} \quad = \frac{a_1 b_1}{R}$$

Also ist

$$\left(\frac{ab}{R}\right)^2 - \left(\frac{a_1 b_1}{R}\right)^2 = h^2 = a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2$$

(26) und somit

$$R^2 = \frac{a^2 b^2 - a_1^2 b_1^2}{a^2 + b^2 - a_1^2 - b_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

oder

$$(a^2 - R^2)(R^2 - b^2) = (a_1^2 - R^2)(R^2 - b_1^2)$$

Das Halbaxenverhältniss $a : b$ der Schnittellipse.

Durch einen festen Punkt der Cylinderaxe sei eine Ebene gelegt und dieselbe derart bewegt, dass das Halbaxenverhältniss der Schnittellipse keine Aenderung erleidet. Dass die so entstandene Kegelfläche keine elementare sein kann, zeigt folgende Betrachtung. Wählt man statt des elliptischen Cylinders einen hyperbolischen, so können sich die Gleichungen beider Kegelflächen nur durch ein Vorzeichen unterscheiden; man kann daher aus der Art des einen Kegels auf die des anderen schliessen. Die Untersuchung des hyperbolischen .Cylinders wird aber wesentlich durch die Asymptotenebenen erleichtert.

Aus ihnen ergiebt sich, dass die vorliegende Aufgabe mit der folgenden identisch ist. Durch einen Punkt der Schnittlinie zweier festen Ebenen wird eine bewegliche Ebene gelegt und nach der von ihr umhüllten Fläche gefragt, wenn der Winkel der Schnittlinien der beweglichen Ebene mit den beiden festen seine Grösse beibehält. Legt man nun um den festen Punkt der Schnittlinie als Mittelpunkt

eine Kugel, so kann der Aufgabe auch folgende Fassung gegeben werden: Zwei feste grösste Kreise einer Kugel werden von einem beweglichen so geschnitten, dass der zwischen ihnen liegende Bogen eine unveränderliche Länge hat. Welche Curve hüllt er ein? Oder wenn man endlich aus der Sphärik in die Geometrie der Ebene übergeht: Welche Curve wird von einer an Länge unveränderlichen Strecke eingehüllt, wenn ihre Endpunkte zwei feste gerade Linien durchlaufen? Für den Fall, dass die festen Geraden auf einander senkrecht stehen, ist die Curve bekanntlich eine der Ellipsenevolute affine, die sogenannte Astrois mit der Gleichung

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Da durch einen Punkt ausserhalb der Ellipse vier Normalen gezogen werden können, so ist die Classenzahl ihrer Evolute und mithin auch die der Astrois = 4. Diese Zahl ändert sich nicht, wenn man statt des rechten Winkels einen beliebigen einführt, und auch dann nicht, wenn man statt der Ebene die Kugel wählt. Daher der Satz:

„Bewegt sich eine Ebene um einen festen Punkt der Axe eines „elliptischen Cylinders derart, dass die Schnittellipse ein unveränder- „liches Halbaxenverhältniss hat, so umhüllt sie einen Kegel mit „einer Basiscurve von der 4. Classe" . . . . (33)

Wir denken uns weiter an die Basisellipse eine Tangente gelegt, welche mit der Hauptaxe den spitzen Winkel τ bildet. Es kann nun die Aufgabe gestellt werden: zu untersuchen, in welcher Weise sich die Gestalt der Schnittellipse ändert, wenn sich ihre Ebene um jene Tangente dreht. Zu diesem Zwecke führen wir als Repräsentanten der Gestalt die Winkel α und α_1 ein, indem wir setzen

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{b_1}{a_1} = \operatorname{tang}\frac{\alpha_1}{2}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha : \cos\alpha : 1 &= 2ab : a^2 - b^2 : a^2 + b^2 \\ \sin\alpha_1 : \cos\alpha_1 : 1 &= 2a_1b_1 : a_1^2 - b_1^2 : a_1^2 + b_1^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

α ist der Winkel, unter welchem die Nebenaxe vom Hauptscheitel aus gesehen wird. Er erreicht seinen grössten Wert $\frac{\pi}{2}$, wenn die die Ellipse ein Kreis ist; je kleiner α, um so grösser ist die Excen-

tricität. Der Abstand der unter dem Winkel τ gegen die Hauptaxe geneigten Tangente vom Mittelpunkt ist nun

$$= \sqrt{a_1^2 \sin^2\tau + b_1^2 \cos^2\tau}$$

Andrerseits ist derselbe auch

$$= h \,.\, \cot\omega$$

Setzen wir diese Werte einander gleich, so finden wir mittelst (24), (26) und (34) folgende Gleichung:

$$1 - \frac{\sin\alpha_1 \cos\omega}{\sin\alpha} = \tfrac{1}{2}\sin^2\omega\,(1 + \cos\alpha_1 \cos 2\tau)$$

Wir denken uns hierbei α_1 und τ gegeben und fragen nach der Abhängigkeit des Winkels α von ω. Die Gleichung erhält dann am besten die folgende Form:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha_1 \,.\, \cos^2 2\tau} + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(1 + \cos\alpha_1 \cos 2\tau)\cos\omega} - \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha_1 \cos 2\tau}{\cos\omega}}\right]^2 \;\ldots\ldots\; (35)$$

Die Gestalt der Ellipse kommt nun der Kreisform am nächsten, wenn α grösstmöglich ist, d. h. wenn der Inhalt der Klammer verschwindet, oder wenn

$$\cos^2\omega = \frac{1 - \cos\alpha_1 \cos 2\tau}{1 + \cos\alpha_1 \cos 2\tau} = \frac{\sec\alpha_1 - \cos 2\tau}{\sec\alpha_1 + \cos 2\tau} = B \;\ldots\; (36)$$

eine Gleichung, welche nur befriedigt werden kann, wenn

$$\tau \leqq \frac{\pi}{4}$$

Wir unterscheiden daher folgende Fälle:

1) $\tau \geqq \frac{\pi}{4}$; $\cos^2\omega < B$. Der Inhalt der Klammer in (35) ist stets negativ. α nimmt ab, wenn ω wächst.

2) $\tau < \frac{\pi}{4}$. Wächst ω von null ab, so ist anfangs $\cos^2\omega > B$, der Inhalt der Klammer ist positiv, und es wächst α mit ω. Für

$$\cos^2\omega = B$$

erhält α seinen grössten Wert und nimmt von da an wieder ab. D. h.

„Dreht sich die Ebene der Schnittellipse um eine in der Basis „liegende Gerade bei wachsendem Neigungswinkel, und bildet die „Gerade mit der Hauptaxe der Basisellipse einen Winkel, welcher „kleiner als $\frac{\pi}{4}$, so nähert sich anfangs die Gestalt der Ellipse der „Kreisform bis Gleichung (36) erfüllt ist, von da an weicht sie von „derselben unausgesetzt ab. Ist aber jener Winkel grösser oder „gleich $\frac{\pi}{4}$, so weicht die Gestalt der Ellipse von Anfang an mehr „und mehr von der Kreisform ab" . . . . (37)

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ entartet die Ellipse, ihre Excentricität wird 1.

Ist die Bedingung (36) erfüllt, so gilt

$$\cot\alpha = \cot\alpha_1 . \sin 2\tau$$

Hiernach tritt der Kreis nur für $\tau = 0$ ein, und es entfernt sich die Ellipse umsomehr von der Kreisgestalt, je grösser τ. Für $\tau < \frac{\pi}{4}$ kann man immer eine Schnittellipse finden, welche der Basisellipse ähnlich ist, sie aber an Grösse übertrifft. Für $\tau = 0$ wird dieselbe grösstmöglich. Ihre kleine Halbaxe ist der grossen Halbaxe der Basisellipse und ihre grosse Halbaxe dem grössten Krümmungshalbmesser der Basisellipse gleich.

Construction der Schnittellipse, welche einen gegebenen Punkt F im Innern des Cylinders zum Brennpunkt hat.

Man kann durch einen beliebig im Innern des Cylinders gelegenen Punkt F stets eine Ebene so legen, dass die entstandene Schnittellipse F zum Brennpunkt hat. Legt man nämlich zunächst durch F eine Ebene senkrecht zur Cylinderaxe und bezeichnet in der so entstandenen Basisellipse den Halbmesser des Punktes F mit a' und seinen zugeordneten mit b', so sind $a'b'$ die Normalprojectionen der Halbaxen ab der Schnittellipse. Nun ist aber in der Lage des Punktes F auf a' auch die Excentricität der Schnittellipse und hierdurch das Verhältniss $a:b$ gegeben.

Sonach hat man die Aufgabe zu lösen: Das über $a'b'$ senkrecht errichtete dreiseitige Prisma in einem Dreieck von gegebener Ge-

stalt zu schneiden. Lösungen dieser Aufgabe siehe: Gugler, Lehrbuch der descriptiven Geometrie Nr. 180; Marx: Ueber eine Fläche vierter Ordnung mit reellem Doppelkegelschnitt. In.-Diss. München 1880; S. 6. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, 143. Eine einfachere Construction der gesuchten Schnittellipse ergiebt sich aber aus folgendem Satz (Fig. 9.)

„Legt man durch einen Brennpunkt F einer beliebigen Schnitt-„ellipse eine Ebene senkrecht zur Cylinderaxe, und sind F_1, F_2 die „Brennpunkte der so entstandenen Basisellipse, so halbirt die Schnitt-„linie JH beider Ebenen den Nebenwinkel des Winkels F_1FF_2"
. . . . (38)

Beweis: Sind α und β die Tangenten der Schnittellipse parallel JH, und A und B deren Berührpunkte, α', β', A', B' aber die Normalprojectionen dieser Gebilde auf die Ebene der Basisellipse, so halbirt bekanntlich JH den Winkel AFB. Hieraus ergiebt sich die Congruenz der Ecken F, $AA'H$ und F, $BB'H$, woraus weiter hervorgeht, dass JH auch den Winkel $A'FB'$ halbirt. Man zeichne alsdann das Parallelogramm $A'F_1B'F_2$ (Fig. 9*) und zerlege es durch die Parallelen zu den Seiten CFE und DFG. JH halbirt nun nicht allein den Winkel $A'FB'$, sondern, wie die Parallele durch F_1 zeigt, auch den Winkel EFG. Hieraus geht die Aehnlichkeit der Parallelogramme $A'F$ und $B'F$ hervor, aus dieser die Aehnlichkeit der Parallelogramme FF_1 und FF_2, und mit Hülfe der letzteren ergiebt sich die Behauptung.

Die weitere Festlegung der Ebene durch JH hat keine Schwierigkeit. Man bestimme entweder den Parameter, welcher dem harmonischen Mittel aus JF und FH gleich ist, oder die Hauptaxe, die man findet, indem man das Quadrat des zu JH parallelen Durchmessers durch JH dividirt. Man erhält immer zwei congruente Ellipsen, die nur dann zusammenfallen, wenn F in F_1 oder F_2 liegt.

Sind die Coordinaten x, y des Punktes F in der Ebene der Basisellipse gegeben, so erhält man die Halbaxen a, b aus folgenden beiden Gleichungen:

$$b = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a_1}\right)^2-\left(\frac{y}{b_1}\right)^2} \qquad a^2b^2+a_1^2b_1^2 = a^2(a_1^2+b_1^2-x^2-y^2)$$
. . . . (39)

Die erste Gleichung liefert den Satz, der sich übrigens aus dem zu Anfang dieses Abschnittes Gesagten unmittelbar ergiebt, dass die

Brennpunkte ähnlicher Schnittellipsen auf einer der Basisellipse concentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse liegen.

Ist der gegebene Cylinder ein gerader Kreiscylinder, so findet man bekanntlich den Brennpunkt einer Schnittellipse, indem man in den Cylinder eine Kugel beschreibt, welche die Ebene der Schnittellipse berührt. Der Berührpunkt ist der eine Brennpunkt. Soll dieser Satz auf den allgemeinen elliptischen Cylinder übertragen werden, so kann dies in folgender Weise geschehen (Fig. 10). Ueber einer Ellipse in der Ebene E sei ein beliebiger Cylinder C und ein gerader Kreiscylinder C' errichtet, und in letzterem die Kugel K' construirt, welche E im Ellipsenbrennpunkt F berührt. Man verbinde nun zwei im selben Punkte von E zusammen treffende Kanten beider Cylinder durch eine beliebige Gerade XX', welche E in ξ treffen möge. Ferner lege man durch sämtliche Punkte des Cylinders C' Gerade parallel $X'X$ von solcher Länge, dass sie durch E in einem Verhältniss geteilt werden

$$= X'\xi : \xi X$$

Alsdann bilden die Endpunkte dieser Geraden den Cylinder C. In gleicher Weise, wie sich beide Cylinder entsprechen, entspricht nun der Kugel K' ein Ellipsoid K, welches C in einer Ellipse und E in F berührt. Schneidet sodann eine Ebene parallel E die Kugel in einem Kreis, so entspricht diesem Kreis ein Kreis von derselben Grösse, welcher auf dem Ellipsoid liegt, und dessen Ebene ebenfalls parallel E ist. Sonach schneiden alle parallel zu E gelegenen Ebenen das Ellipsoid in Kreisen. Daher der Satz:

„Construirt man in einen elliptischen Cylinder ein Ellipsoid „und legt an dessen einen Kreispunkt eine Tangentialebene, so hat „die in dieser liegende Schnittellipse den Berührpunkt zum Brenn- „punkt“ . . . . (40)

Ist die Schnittellipse gegeben, so giebt es unendlich viele derartige Ellipsoide, da die Richtung der Geraden XX' keine bestimmte ist. Die Schnittellipse selbst gehört als ein entartetes Ellipsoid mit hinzu. In gleicher Weise kann man den Satz auch vom geraden Kreiskegel auf den Kegel zweiter Ordnung übertragen.

Chasles bringt ihn in seiner Geschichte der Geometrie Note IV, aber ohne Beweis.

Zum Schlusse noch eine kurze Notiz über den cylindrischen Raum, welcher von zwei beliebigen Ebenen abgegrenzt

wird, die sich ausserhalb des elliptischen Cylinders schneiden. Bekanntlich findet man den Inhalt desselben, indem man die Fläche der zur Cylinderaxe senkrechten Ellipse mit der Geraden multiplicirt, welche die Mittelpunkte der beiden Schnittellipsen verbindet. Neu dagegen dürfte die folgende Construction des Schwerpunktes dieses cylindrischen Körpers sein:

„Man bestimme die Schnittlinie der abgrenzenden Ebenen und „hierauf den Pol dieser Geraden in Beziehung auf die eine Schnitt- „ellipse. Alsdann verbinde man den Pol mit dem Ellipsenmittel- „punkt und verlängere die Linie über Letzteren hinaus um den „vierten Teil. Legt man schliesslich durch den Endpunkt der Ver- „längerung eine Gerade den Cylinderkanten parallel bis zur andern „abgrenzenden Ebene und halbirt dieselbe, so erhält man den ge- „suchten Schwerpunkt“.

XXI.

Analytische Untersuchungen der einem Tetraeder zugeordneten Flächen zweiter und dritter Ordnung mittelst numerischer Tetraedercoordinaten *)

Von

Heinrich von Jettmar.

Schneiden vier Ebenen das Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ ab, so ist die Lage jedes Punktes M im Raume durch seine numerischen Coordinaten

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{h_1}, \quad \alpha = \frac{x_2}{h_2}, \quad \alpha_3 = \frac{x_3}{h_3}, \quad \alpha_4 = \frac{x_4}{h_4}$$

bezüglich welcher die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \tag{1}$$

gilt, vollkommen bestimmt. Hierbei bezeichnen x_1, x_2, x_3, x_4 die Abstände des Punktes M von der Ebene

$$A_1 A_3 A_4 = I$$

beziehungsweise

$$A_3 A_4 A_1 = II, \quad A_4 A_1 A_2 = III, \quad A_1 A_2 A_3 = IV$$

ferner h_1, h_2, h_3, h_4 die entsprechenden Tetraederhöhen.

Ist $\alpha_1 =$ const. gegeben, so ist hierdurch eine der Ebene I parallele Ebene bestimmt, welche die Kanten $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ in A_2', A_3', A_4' so schneidet, dass

*) Vgl. Nr. II. S. 13.

$$\frac{A_2' A_2}{A_1 \ A_2} = \frac{A_3' \ A_3}{A_1 \ A_3} = \frac{A_4' \ A_4}{A_1 \ A_4} = \alpha_1$$

wird. Ist noch α_2 gegeben, so erhalten wir in ähnlicher Weise eine der Ebene *II* parallele Ebene $A_3''A_4''A_1''$, welche die Ebene $A_2'A_3'A_4'$ in einer zur Kante $A_3 A_4$ parallelen Geraden — wir wollen sie mit (3, 4) bezeichnen — schneidet. Ist endlich auch α_3 gegeben, so erhalten wir die Ebene $A_4'''A_1'''A_2'''$ parallel zu *III*, welche die Ebene $A_2'A_3'A_4'$ in der zur $A_2 A_4$ parallelen (2, 4) schneidet. Der Durchschnitt der Geraden (3, 4) und (2, 4) bestimmt endgiltig den Punkt M, dessen letzte Coordinate α_4 aus der Gleichung (1) berechnet wird.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{4}$$

bezeichnet den Schwerpunkt S des Tetraeders;

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

bezeichnet einen Punkt in der Schwerlinie $A_1 S$ oder die Schwerlinie selbst;

$$\alpha_3 = \alpha_4$$

bezeichnet einen Punkt in der Schwerebene $A_1 A_2 S$ oder die Schwerebene selbst

Liegt der Punkt M (Fig. 1.), dessen Tetraedercoordinaten mit α_1, α_2, α_3, α_4 bezeichnet werden, in einer zur Tetraederfläche *I* parallelen Ebene $A_2'A_3'A_4'$, so sind seine numerischen Coordinaten α_2', α_3', α_4' in Beziehung auf das Dreieck $A_2'A_3'A_4'$ folgendermassen erbracht. Aus der Figur erkennt man

$$\alpha_2' = \frac{MB_2'}{A_2'B_2'} = \frac{B_1 \ D}{A_2 \ D}$$

Beziehen wir aber die Coordinaten $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ des Punktes M auf das Coordinatendreieck $A_1 A_2 D$, so ist die Gleichung der Transversale $A_1 M$

$$\mu_3 \xi_2 - \mu_2 \xi_3 = 0$$

wobei ξ_1, ξ_2, ξ_3 die veränderlichen numerischen Coordinaten eines in dieser Transversale liegenden Punktes sind. Setzen wir in dieser Gleichung

$$\xi_1 = 0 \quad \text{also} \quad \xi_3 = 1 - \xi_2$$

so kommt

$$\xi_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3}, \quad \xi_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3}$$

Diese sind sonach die Coordinaten des Fusspunktes B_1 der Transversale und namentlich

$$\xi_2 = \frac{B_1 D}{A_2 D}$$

In Beziehung auf das Coordinatendreieck $A_1 A_2 D$ hat aber M die Coordinaten

$$\mu_1 = \alpha_1, \quad \mu_2 = \alpha_2, \quad \mu_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$$

folglich ist

$$\frac{B_1 D}{A_2 D} = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}$$

also auch

$$\alpha_2' = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}$$

und analog

$$\alpha_3' = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}, \quad \alpha_4' = \frac{\alpha_4}{1 - \alpha_1}$$

Liegt der Punkt M in der Schwerebene $A_1 A_2 D$, ist also

$$A_3 D = D A_4$$

so sind die Coordinaten des Punktes in Beziehung auf das Dreieck $A_1 A_2 D$

$$\sigma_1 = \alpha_1, \quad \sigma_2 = \alpha_2, \quad \sigma_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_3 = 2\alpha_4$$

Die symmetrische und homogene Gleichung des $n$ten Grades zwischen α_1, α_2, α_3, α_4 bestimmt eine dem Tetraeder zugeordnete Fläche der $n$ten Ordnung, in welcher stets 24 Punkte insofern einander ensprechen, als ihre Coordinaten dieselben Werte, doch nicht in gleicher Reihenfolge besitzen. Denn da sich in der Gleichung nichts ändert, wenn α_1, α_2, α_3, α_4 beliebig vertauscht werden, so sind durch vier Zahlenwerte, deren Summe 1 bildet, und welche als Coordinaten in die Gleichung eingeführt derselben genügen, ebenso viel Flächenpunkte bestimmt, als es Permutationen zwischen vier Elementen giebt, also 24. Diese Punkte sind paarweise den Schwerebenen des Tetraeders, d. i. den Ebenen, welche durch eine Kante und durch den Schwerpunkt gelegt werden, symmetrisch. Ich nenne aber zwei Punkte einer Schwerebene gegenüber symmetrisch liegend, wenn ihre Verbindungslinie der gegenüberliegenden Kante parallel läuft und durch die Schwerlinie halbirt wird.

Die symmetrische und homogene Gleichung des zweiten Grades ist

$$A(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + B(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_5 + \alpha_3\alpha_4) = 0$$

Wir führen statt dessen die abkürzende Schreibweise

$$A\,\Sigma\alpha_1^2 + B\,\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0$$

ein, welcher wir uns auch in Zukunft bedienen wollen.

Bringen wir diese Gleichung auf die Form

$$(A - \tfrac{1}{3}B)\,\Sigma\alpha_1^2 + \tfrac{1}{3}B(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 0$$

so erkennen wir auch in

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = n \qquad (2)$$

die allgemeine Form der symmetrischen Gleichung des zweiten Grades.

Diese Gleichung bestimmt offenbar ein dem Tetraeder symmetrisch zugeordnetes Ellipsoid, dessen Mittelpunkt im Schwerpunkt des Tetraeders liegt. Je nach der Grösse der Zahl n entscheiden sich die absoluten Dimensionen des Ellipsoids; ihre relativen Dimensionen bleiben bei veränderlichen n dieselben; die Ellipsoide sind concentrisch, einander ähnlich und ähnlich liegend.

Die Schnitte des Ellipsoids mit den Grundebenen des Tetraeders sind durch die Gleichungen

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = n \quad \text{u. s. w.}$$

gegeben; sie sind somit den Grunddreiecken des Tetraeders symmetrisch zugeordnete Ellipsen. Doch findet ein derartiger Schnitt nur statt, wenn

$$n \geqq \tfrac{1}{3}$$

ist[1]) Bei $n = \frac{1}{3}$ berührt das Ellipsoid die Grundflächen des Tetraeders in ihren Schwerpunkten. Bei $n = \frac{1}{2}$ berührt das Ellipsoid die Kanten des Tetraeders in ihren Mittelpunkten. Bei $n = 1$ geht das Ellipsoid durch die Eckpunkte des Tetraeders, es ist diesem umgeschrieben.

Legen wir durch den Schwerpunkt des Tetraeders eine Ebene parallel I, so wird der Schnitt des Ellipsoids mit der neuen Ebene durch die Gleichung

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = n - \frac{1}{16}$$

bestimmt. Beziehen wir aber die Coordinaten auf das Dreieck $A_2'A_3'A_4'$, in welchem die neue Ebene das Tetraeder schneidet, so resultirt als Gleichung der Schnittcurve

$$\alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 + \alpha_4'^2 = \frac{16n - 1}{9}$$

indem

1) Vgl. T. X. S. 15.

$$\alpha'_2 = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3}\alpha_2$$

u. s. w. zu setzen ist.

Die Fläche (2) ist reell, so lange

$$\frac{16n-1}{9} \geqq \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad n \geqq \tfrac{1}{4}$$

ist. Bei $n = \frac{1}{4}$ reducirt sich die Fläche auf einen Punkt, den Schwerpunkt des Tetraeders.

Jede Schwerlinie des Tetraeders ist ein Durchmesser des symmetrischen Ellipsoids, welcher der der gegenüberliegenden Grundfläche parallelen Diametralebene conjugirt ist. Wenn wir in der zur Ebene 1 parallelen Diametralebene irgend zwei conjugirte Durchmesser mit $2b'$, $2c'$, den in der Schwerlinie A_1S liegenden Durchmesser mit $2a'$, endlich die Halbachsen des Ellipsoids mit a, b, c bezeichnen, so gilt zunächst die Gleichung

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Wenn sodann die Schwerlinie A_1S gegen die Grundfläche I des Tetraeders um den Winkel φ geneigt ist und die conjugirten Durchmesser $2b'$ und $2c'$ den Winkel ψ einschliessen, so gilt die Gleichung

$$a'b'c' \sin\varphi \sin\psi = abc$$

Als Coordinaten der Endpunkte des Durchmessers a' finden wir

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{3}(1-\alpha_1)$$

und

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{4} \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3(n-\tfrac{1}{4})}$$

somit

$$a' = \frac{h_1}{2\sin\varphi}\sqrt{3(n-\tfrac{1}{4})} = A'\sqrt{n-\tfrac{1}{4}}$$

Aus der Gleichung

$$\alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4' = \tfrac{1}{9}(16n-1)$$

resultirt ferner [1])

$$b' = B'\sqrt{n-\tfrac{1}{4}}, \quad c' = C'\sqrt{n-\tfrac{1}{4}}$$

wobei A', B', C' von n unabhängige und nur von den Dimensionen des Tetraeders abhängige Grösse darstellen. Da sonach die einander conjugirten Durchmesser $2a'$, $2b'$, $2c'$ ohne ihre Richtungen zu ändern, ihre wechselseitigen Verhältnisse, nämlich

1) Vgl. T. X. Seite 16.

$$a' : b' : c' = A' : B' : C'$$

beibehalten, welchen Wert immer n annehmen mag, so ist der Beweis erbracht, dass die durch Gl. (2) ausgedrückten Ellipsoide unter einander ähnlich sind und in Aehnlichkeitslage sich befinden. Der gemeinsame Aehnlichkeitspunkt ist natürlich der Schwerpunkt des Tetraeders.

Die symmetrische Gleichung des dritten Grades ist

$$A\Sigma\alpha_1^3 + B\Sigma\alpha_1^2(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) + C\Sigma\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4) = 0$$

Schreiben wir statt dessen

$$(A-\tfrac{1}{3}B)\Sigma\alpha_1^3 + \tfrac{1}{3}B(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^3 + (C-B)\Sigma\alpha_1\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4) = 0$$

und setzen

$$A - \tfrac{1}{3}B = m, \quad 2(C-B) = n, \quad -\tfrac{1}{3}B = p$$

so erhalten wir einfacher

$$\begin{aligned} &m(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3) + \\ &\quad + n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) = p \end{aligned} \tag{3}$$

als allgemeine Form der symmetrischen Gleichung des dritten Grades.

Die Schnittcurven der durch diese Gleichung ausgedrückten Fläche dritter Ordnung mit den Coordinatenebenen sind

$$m(\alpha_2^3+\alpha_3^3+\alpha_4^3) + n\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = p \quad \text{u. s. w.}$$

daher den Grunddreiecken des Tetraeders zugeordnete symmetrische Curven der dritten Ordnung.

Nehmen wir etwa α_1 constant an und setzen

$$\alpha_2 = (1-\alpha_1)\alpha_2', \quad \alpha_3 = (1-\alpha_1)\alpha_3', \quad \alpha_4 = (1-\alpha_1)\alpha_4'$$

so verwandelt sich die Gleichung (3), nachdem sie homogen gemacht wurde, in

$$m(1-\alpha_1)\Sigma\alpha_2'^3 + n\alpha_1\Sigma\alpha_2'^2(\alpha_3'+\alpha_4') + n(1+2\alpha_1)\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' = \frac{p-m\alpha_1^3}{(1-\alpha_1)^2}$$

Setzen wir ferner

$$m(1-\alpha_1) - \tfrac{1}{3}n\alpha_1 = m', \quad n(1+2\alpha_1) - 2n\alpha_1 = n = n'$$

$$\frac{p-m\alpha_1^3}{(1-\alpha_1)^2} - \frac{n\alpha_1}{3} = p'$$

so vereinfacht sich die obere Gleichung und erhält die Form

$$m'(\alpha_2'^3 + \alpha_3'^3 + \alpha_4'^3) + n'\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' = p'$$

Diese Gleichung zeigt uns den Schnitt der Fläche (3) mit einer im Abstande α_1 zur Tetraederfläche I parallelen Ebene an. Die Curve ist symmetrisch zugeordnet dem Dreieck, in welchem das Tetraeder von der zu I parallelen Ebene geschnitten wird.

Diese Curve hat zu Asymptoten die Geraden[1])

$$\alpha_2' = \frac{3m'}{3m'+n'} = \frac{3m(1-\alpha_1)-n\alpha_1}{(1-\alpha_1)(3m+n)}, \quad \alpha_3' = \frac{3m'}{3m'+n'}$$

$$\alpha_4' = \frac{3m'}{3m'+n'}$$

Ersetzen wir wieder α_2', α_3', α_4' durch $\alpha_2:(1-\alpha_1)$, $\alpha_3:(1-\alpha_1)$, $\alpha_4:(1-\alpha_1)$, so erhalten wir die Gleichung

$$\alpha_2 = \frac{3m(1-\alpha_1)-n\alpha_1}{3m+n}$$

oder

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3m}{3m+n}$$

ebenso

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \frac{3m}{3m+n} \quad \text{u. s. w.}$$

Diese Gleichungen, offenbar in der Anzahl sechs, bestimmen sechs Ebenen, welche der Fläche (3) gegenüber als Asymptotenebenen auftreten. Um über die Lage derselben eine Vorstellung zu gewinnen, bedenken wir, dass die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = k$$

eine Ebene darstellt, welche die Ebene $A_1A_2A_3$ in der zur A_1A_2 parallelen Geraden

$$\alpha_3 = 1 - k$$

ebenso die Ebene $A_1A_2A_4$ in der zur A_1A_2 parallelen

$$\alpha_4 = 1 - k$$

schneidet. Die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = k$$

ist aber gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\alpha_3 + \alpha_4 = 1 - k$$

aus welcher wir erkennen, dass diese Ebene die Tetraederflächen $A_3A_4A_1$ und $A_3A_4A_2$ in den zur A_3A_4 parallelen Geraden

---

1) Vgl. T. X. Seite 18 u. 19.

$$\alpha_1 = k \quad \text{und} \quad \alpha_2 = k$$

schneidet. Die Gleichung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = k$$

bestimmt sonach eine den Gegenkanten $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ parallele Ebene, welche das Tetraeder in einem Parallelogramm schneidet.

Von den oberen sechs Gleichungen nun bestimmen paarweise je zwei Gleichungen wie

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3m}{3m+n} \quad \text{und} \quad \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{3m}{3m+n}$$

oder in anderer Form

$$\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{n}{3m+n} \quad \text{und} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{n}{3m+n}$$

zwei Ebenen, welche zweien Gegenkanten des Tetraeders, daher auch wechselseitig einander parallel liegen, so dass sämtliche sechs Asymptotenebenen der Fläche (3) ein Parallelepiped abgrenzen, dessen Form und Dimensionen von der Form und Dimension des Tetraeders, dessen Form zwar nicht, aber dessen Dimensionen wol auch von der Wahl der Zahlen m und n, keineswegs aber von p abhangen. Von den Eckpunkten des Parallelepipeds befinden sich je zwei gegenüberliegende in einer Schwerlinie, von den Kanten des Parallelepipeds je zwei gegenüberliegende in einer Schwerebene des Tetraeders. (Fig. 2.)

Suchen wir einen Eckpunkt $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ des Parallelepipeds aus den Gleichungen

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3m}{3m+n}, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{3m}{3m+n}, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{3m}{3m+n}$$

so finden wir als Coordinaten desselben

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \frac{3m}{2(3m+n)}, \quad \beta_1 = \frac{-3m+2n}{2(3m+n)}$$

Den gegenüberliegenden Eckpunkt $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ finden wir aus den Gleichungen

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{n}{3m+n}, \quad \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{n}{3m+n}, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{n}{3m+n}$$

mit seinen Coordinaten

$$\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \frac{n}{2(3m+n)}, \quad \gamma_1 = \frac{6m-n}{2(3m+n)}$$

Der Mittelpunkt des Parallelepipeds ist natürlich der Schwerpunkt des Tetraeders; man erhält

$$\tfrac{1}{2}(\beta_1+\gamma_1)=\tfrac{1}{4}$$

Die Länge der Diagonale ist durch

$$\gamma_1-\beta_1=\frac{3(3m-n)}{2(3m+n)}$$

in Einheiten der Schwerlinie A_1SB_1 gegeben.

Wählen wir $m=\frac{1}{3}n$, so wird die Diagonale gleich null; das Parallelepiped reducirt sich auf einen Punkt. den Schwerpunkt. Die Gleichungen der Asymptoten in einer der Tetraederflächen werden alsdann

$$\alpha_2'=\tfrac{1}{2},\quad \alpha_3'=\tfrac{1}{2},\quad \alpha_4'=\tfrac{1}{2}$$

Die sechs Asymptotenebenen, von denen je zwei zusammenfallen, schneiden daher aus dem Tetraeder ein Oktaeder heraus, dessen Eckpunkte in den Mittelpunkten der Tetraederkanten liegen.

Die Asymptoten der Schnittcurve unserer Fläche in der Tetraederfläche I sind

$$\alpha_2'=\frac{3m}{3m+n},\quad \alpha_3'=\frac{3m}{3m+n},\quad \alpha_4'=\frac{3m}{3m+n}$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$n=3mr$$

so kommt

$$\alpha_2'=\frac{1}{1+r},\quad \alpha_3'=\frac{1}{1+r},\quad \alpha_4'=\frac{1}{1+r}$$

Für einen zweiten Fall sei ebenso

$$\alpha_2'=\frac{1}{1+r'},\quad \alpha_3'=\frac{1}{1+r'},\quad \alpha_4'=\frac{1}{1+r'}$$

und bestehe zwischen r und r' die Gleichung

$$rr'=1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r'}=1$$

so wird in dem ersten Falle

$$\beta_1=\frac{2r-1}{2(1+r)},\quad \gamma_1=\frac{2-r}{2(1+r)}$$

im zweiten Falle

$$\beta_1'=\frac{2r'-1}{2(1+r')}=\frac{2-r}{2(1+r)},\quad \gamma_1'=\frac{2-r'}{2(1+r')}=\frac{2r-1}{2(1+r)}$$

Die Asymptotenebenen sind in beiden Fällen dieselben; der Unterschied besteht darin, dass in dem einen Falle die Schnittlinien dreier bestimmten in einer Ecke zusammenstossenden Flächen des Parallelepipeds mit der Tetraederfläche I die Asymptoten der Schnittcurve bilden, in dem andern Falle jene der andern drei Flächen.

So wird, wenn man $r = 2$ setzt,

$$\alpha_2' = \tfrac{1}{3}, \quad \beta_1 = \tfrac{1}{3}, \quad \gamma_1 = 0$$

vier Eckpunkte des Parallelepipeds liegen in den Schwerpunkten der Schwerlinien des Tetraeders. Die Asymptoten der Schnittpunkte in den Tetraederflächen gehen durch den Schwerpunkt derselben. — Setzen wir $r = \tfrac{1}{2}$, so wird

$$\alpha_2' = \tfrac{2}{3}, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2}$$

die Asymptotenebenen sind dieselben wie vorhin; die Asymptoten der Schnittcurve in den Tetraederflächen gehen in dem Abstande von zwei Dritteilen der Höhe den Dreiecksseiten parallel.

Nehmen wir $r = 0$ oder — was dasselbe ist — $n = 0$ an, so wird

$$\alpha_2' = 1, \quad \beta_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \gamma_1 = 1$$

vier Eckpunkte des Parallelepipeds liegen in den Ecken des Tetraeders. Die Asymptoten der Schnittcurve in den Tetraederflächen gehen durch die Eckpunkte des Dreiecks den Gegenseiten parallel. — Setzen wir $r = \infty$, d. i. $m = 0$, so wird

$$\alpha_2' = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = -\tfrac{1}{2}$$

das Parallelepiped ist mit dem vorherigen identisch; die Asymptoten der Schnittcurve in den Tetraederflächen gehen durch die Dreiecksseiten. —

Kehren wir zur Gleichung (3) der symmetrischen Fläche zurück. Setzen wir hierin

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{3}(1 - \alpha_1)$$

so gelangen wir zur kubischen Gleichung

$$8(3m+n)\alpha_1^3 + 3(3m-5n)\alpha_1^2 - 3(3m-2n)\alpha_1 - (27p-3m-n) = 0$$

deren Wurzeln die in den Schwerlinien des Tetraeders liegenden Flächenpunkte erkennen lassen. Hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, so gehören zwei Wurzeln einer allseits geschlossenen, im Innern des von den Asymptotenebenen abgeschnittenen Parallelepipeds liegenden Fläche an.

„Die symmetrische Fläche der dritten Ordnung besteht daher „aus vier getrennten, ins Unendliche verlaufenden Flächen, von denen „jeder zwischen dreien der sechs Asymptotenebenen sich verbreitet. „Ausserdem kann noch zwischen diesen Flächenteilen ein fünfter „geschlossener Teil auftreten.“

Bezeichnen wir eine der beiden zur Kante $A_1 A_2$ parallele Asymptotenebene mit $E_{1,2}$ und erteilen in ähnlicher Weise auch den andern Asymptotenebenen die ihrer Lage entsprechenden Zeichen, so können wir die Lage der offenen Teile der Fläche (3) folgendermassen bestimmen. Es verbreitet sich der

erste Flächenteil zwischen	$E_{1,2}$, $E_{1,3}$, $E_{1,4}$		$E_{2,3}$, $E_{2,4}$, $E_{3,4}$
zweite „ „	$E_{1,2}$, $E_{2,3}$, $E_{2,4}$	oder	$E_{1,3}$, $E_{1,4}$, $E_{3,4}$
dritte „ „	$E_{1,3}$, $E_{2,3}$, $E_{3,4}$		$E_{1,2}$, $E_{1,4}$, $E_{2,4}$
vierte „ „	$E_{1,4}$, $E_{2,4}$, $E_{3,4}$		$E_{1,2}$, $E_{1,3}$, $E_{2,3}$

je nachdem $m \gtrless \frac{1}{3}n$ ist.

Zur Erläuterung wurde die Fläche (3) für die specielle Annahme

$$m = 0, \quad n = 1, \quad p = \frac{1}{27}$$

näher bestimmt und auf Grund der Rechnungsresultate die Figur 3 hergestellt.

Für obige Annahme lautet die Gleichung der Fläche

$$\Sigma \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \frac{1}{27}$$

Die Schwerlinien werden geschnitten in den Punkten

$$0, \quad \frac{15}{16} \pm \frac{1}{16} \sqrt{33} = 0 \cdot 578, \ 1 \cdot 297$$

Der geschlossene Flächenteil berührt also die Tetraederflächen in ihren Schwerpunkten. Die Schnittfigur in der Tetraederfläche I ist

$$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = \frac{1}{27}$$

Die Asymptoten gehen durch die Dreiecksseiten. Die Scheitelpunkte der Curve liegen in

$$\alpha_2 = \tfrac{4}{3}, \quad \alpha_3 = \alpha_2 = -\tfrac{1}{6} \quad \text{u. s. w.}$$

ausserdem genügt, wie schon bemerkt, der Schwerpunkt.

Setzen wir $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, so erhalten wir als Gleichung der zur Fläche I parallelen Schnittcurve

$$\Sigma \alpha_2'^3 - 12\,\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \frac{17}{81} = 0$$

deren Scheitelpunkte 2·269, 0·720, 0·011; deren Asymptoten α_2', α_3', $\alpha_4' = -\frac{1}{3}$.

Ebenso für

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2},\quad \Sigma \alpha_2'^3 - 6\,\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \tfrac{1}{9} = 0$$

Scheitelpunkte 4·315, 0·616, 0·070; Asymptoten α_2', α_3', $\alpha_4' = -1$.

Endlich für

$$\alpha_1 = \tfrac{3}{2},\quad \Sigma \alpha_2'^3 - 2\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \frac{19}{27} = 0$$

Scheitelpunkte 0·891, −0·267, −7·624; Asymptoten α_2', α_3', $\alpha_4' = 3$.

In der Figur 3 sind die hier berechneten Schnittcurven in perspectivischer Zeichnung durch die punktirten Linien dargestellt, und zwar die geschlossenen Curven für $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, die offenen Curven nur an der Kante $A_1 A_4$ für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_1 = \frac{1}{4}$, sowie für $\alpha_2 = 0$ und $\alpha_3 = 0$, doch ebenfalls der Deutlichkeit halber nur an der Ecke A_4.

Die Linien K_2, K_3, K_4 geben die Kanten der der Ecke A_1 gegenüberliegenden Asymptoten an und sind bis zur Ebene $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ fortgeführt, in welcher Ebene auch die Asymptoten $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ gezeichnet sind.

Die auf der Schwerlinie $A_1 S$ liegenden Scheitelpunkte der krummen Fläche sind durch Sternchen gekennzeichnet.

Einachsige Flächen. — Ist die Gleichung zwischen α_1, α_2, α_3, α_4 so gebildet, dass sich bei beliebiger Vertauschung der Coordinaten α_2, α_3, α_4 nichts ändert, so entspricht sie einer krummen Fläche, welche sich symmetrisch um die Schwerlinie $A_1 S$ und um die durch diese gelegten Schwerebenen $A_1 A_2 S$, $A_1 A_3 S$, $A_1 A_4 S$ verbreitet. Unter den zahllosen dieser Bedingung genügenden Gleichungen mögen die folgenden einer nähern Untersuchung unterzogen werden.

1) $\alpha_1^2 = \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1$. Die Schnittcurve in der Tetraederfläche $A_1 A_2 A_3$ hat die Gleichung ($\alpha_4 = 0$)

$$\alpha_1^2 = \alpha_2\alpha_3$$

und ist[1]) eine Ellipse, welche durch den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, ferner durch A_2 und A_3 und durch den Scheitelpunkt jener über $A_2 A_3$ errichteten Dreiecks geht, dessen Schenkel zu den Seiten $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ parallel laufen. Die Schnittcurve in der Tetraederfläche $A_2 A_3 A_4$ hat die Gleichung

$$\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 1$$

und ist die um $A_2 A_3 A_4$ beschriebene Ellipse von kleinstem Flächeninhalt. Für

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{3}(1 - \alpha_1) \quad \text{folgt} \quad \alpha_1 = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Die Fläche ist von zweiter Ordnung und geschlossen, daher ein Ellipsoid, welches durch die Punkte A_2, A_3, A_4 hindurchgeht, dessen Mittelpunkt in

$$\alpha_1 = -\tfrac{1}{2}$$

liegt und dessen in der Schwerlinie $A_1 S$ liegender Durchmesser die Länge $\sqrt{3}$ in Einheiten dieser Schwerlinie besitzt.

2) $\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2)$. Die Schnittcurve in der Tetraederfläche $A_1 A_2 A_3$ hat die Gleichung

$$\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) = 2\alpha_2 \alpha_3$$

und ist[2]) eine Hyperbel, von welcher ein Bogen durch den Schwerpunkt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$, sowie durch die Punkte A_2 und A_3, der andere durch A_1 geht. Die Schnittcurve in der Tetraederfläche $A_2 A_3 A_4$ ist wieder der Gleichung

$$\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_2 = 0$$

entsprechend die dem Dreieck $A_2 A_3 A_4$ umgeschriebene Ellipse von kleinstem Flächeninhalt. Für

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{3}(1 - \alpha_1) \quad \text{folgt} \quad \alpha_1 = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha_1 = \tfrac{2}{5}$$

Die Fläche ist ein geteiltes Hyperboloid, von welchem ein Teil durch die Punkte A_2, A_3, A_4, der andere durch A_1 hindurchgeht. Der Mittelpunkt liegt in $\alpha_1 = \frac{7}{10}$, der Durchmesser in $A_1 S$ beträgt $\frac{3}{5}$ der Schwerlinie.

3) $\alpha_1^3 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Die Gleichung der Schnittfigur in der Tetraederfläche I ist

$$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 0$$

---

1) Vgl. T. X. Seite 24 u. 25.

2) Vgl. T. X. Seite 25.

und bezeichnet die Seiten des Dreiecks $A_2 A_3 A_4$. Setzen wir aber etwa $\alpha_4 = 0$, so kommt $\alpha_1 = 0$, woraus wir ersehen, dass die krumme Fläche die Tetraederfläche $A_1 A_2 A_3$ nur in der Geraden $A_2 A_3$ schneidet. Die Schnittcurve in einer zu *I* parallelen Ebene hat zur Gleichung

$$\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = \left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^3$$

Die Asymptoten der Curve sind die Seiten der Schnittfläche des Tetraeders. Daraus ist ersichtlich, dass die Tetraederflächen *II*, *III*, *IV* Asymptotenebenen sind.

Wird nun

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} = \tfrac{1}{3}, \quad \text{somit } \alpha_1 = \tfrac{1}{4}$$

so reducirt sich die geschlossene Curve zwischen den Asymptoten auf einen Punkt; dieser ist der Schwerpunkt des Tetraeders.

Die Bedingung, unter welcher eine geschlossene Curve zwischen den Asymptoten auftritt, fällt zusammen mit der Bedingung, dass die kubische Gleichung

$$\alpha_2'^3 - 2\alpha_2'^2 + \alpha_2' - 4\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^3 = 0$$

drei reelle Wurzel aufweise, nämlich $0 < \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} < \frac{1}{3}$ oder $0 < \alpha_1 < \frac{1}{4}$.

Für $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ wird $\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = \frac{1}{27}$ (bekannte Curve)

„ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ „ $\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = 1$, Scheitelpunkt $\alpha_2' = 2{\cdot}583$

„ $\alpha_1 = \frac{3}{4}$ „ $\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = 27$, „ $\alpha_2' = 5{\cdot}428$

„ $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$ „ $\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = -\frac{1}{125}$, „ $\alpha_2' = -0{\cdot}030$

„ $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ „ $\alpha_2' \alpha_3' \alpha_4' = -\frac{1}{27}$, „ $\alpha_2' = -0{\cdot}118$

u. s. w.

Betrachten wir noch die Schnittcurve in einer der durch A_1 gelegten Schwerebenen, etwa $A_1 A_2 S$. Wir setzen

$$\sigma_1 = \alpha_1, \quad \sigma_2 = \alpha_2, \quad \sigma_3 = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha_3 = 2\alpha_4$$

und erhalten als Gleichung der Schnittcurve

$$4\sigma_1^3 = \sigma_2 . \sigma_3^2 \quad \text{oder} \quad 4\sigma_1^3 = \sigma_3^2(1 - \sigma_1 - \sigma_3)$$

Für $\sigma_3 = 0$ wird $\sigma_1^3 = 0$. Dieser Gleichung entsprechen drei gleiche Wurzeln. Setzen wir

$$\sigma_3 = \pm \Delta\sigma_3$$

so wird

$$4\sigma_1^3 = \Delta\sigma_3^2(1-\alpha_1 \mp \Delta\sigma_3)$$

Vernachlässigen wir hierin $\mp \Delta\sigma_3^3$, so erhalten wir gleiche und zwar positive Wurzeln für σ_1. Hieraus ist zu erkennen, dass in A_2 die Curve eine Spitze bildet, zu welcher die Kante A_1A_2 als Tangente führt.

Für $\sigma_3 = 1$ wird $\sigma_1 = 0$ (einzige reelle Wurzel). Wir finden

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} = \frac{12\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{\sigma_3[2(1-\sigma_1) - 3\sigma_3]}$$

Setzen wir hierin $\sigma_3 = 1$, $\sigma_1 = 0$, so kommt

$$d\sigma_3 : d\sigma_1 = -1$$

woraus wir erkennen, dass A_1D (Fig. 4) Tangente an der Curve ist. Setzen wir aber

$$\sigma_3 = 1 \pm \Delta\sigma_3$$

und vernachlässigen die zweiten und höhern Potenzen von $\Delta\sigma_3$, so erhalten wir zunächst

$$4\sigma_1^3 = (1 \pm 2\Delta\sigma_3)(-\sigma_1 \mp \Delta\sigma_3) = -\sigma_1(1 \pm 2\Delta\sigma_3) \mp \Delta\sigma_3$$

und da σ_1 in diesem Falle auch gegen null convergirt, weshalb man σ_1^3 vernachlässigen kann,

$$\sigma_1 = \frac{\mp \Delta\sigma_3}{1 \pm 2\Delta\sigma_3} = \mp \Delta\sigma_3$$

somit

$$\frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} = \frac{1 \pm 2\Delta\sigma_3}{(1 \pm \Delta\sigma_3)(-1 \mp \Delta\sigma_3)} = \frac{1 \pm 2\Delta\sigma_3}{-1 \mp 2\Delta\sigma_3} = -1$$

d. h. der erste Differentialquotient ist für die Umgebung des Punktes D constant, somit der zweite Differentialquotient $= 0$, also besitzt die Curve in D einen Wendepunkt.

In der Figur 4 bezeichnen die stärker ausgeführten Linien Teile der Schnittcurven in den Schwerebenen, die punktirten Linien die Schnittcurven in den zur Ebene $A_2A_3A_4$ parallelen Ebenen im Abstande $\alpha_1 = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$. Der Deutlichkeit halber ist die Entwickelung der krummen Fläche in den ausserhalb des Tetraeders liegenden Raume nur an der Kante A_1A_2 dargestellt.

4) $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4}\right)$ oder

$$\alpha_1(\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_4\alpha_2) = 3\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

Für $\alpha_1 = 0$ wird

$$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = 0$$

die krumme Fläche schneidet die Grundfläche I des Tetraeders in den Kanten $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_2$. Ebenso wird

$$\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 = 0$$

wenn $\alpha_2 = 0$ angenommen wird u. s. w.; die krumme Fläche schneidet daher überhaupt die Grundflächen des Tetraeders in den ihnen entsprechenden Grundkanten.

Als Gleichung der Schnittcurve in einer zur Fläche I parallelen Ebene erhalten wir

$$3(1-\alpha_1)\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \alpha_1(\alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_4' + \alpha_4'\alpha_2') = 0$$

oder

$$3(1-\alpha_1)\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \alpha_1(\alpha_2' + \alpha_3' + \alpha_4')(\alpha_2'\alpha_3' + \alpha_3'\alpha_4' + \alpha_4'\alpha_2') = 0$$

d. i.

$$3(1-2\alpha_1)\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' - \alpha_1 \Sigma[\alpha_2'^2(\alpha_3' + \alpha_4')] = 0$$

Eine bekannte Umformung führt zur Gleichung

$$\tfrac{1}{3}\alpha_1 \Sigma \alpha_2'^3 + (3-4\alpha_1)\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' = \tfrac{1}{3}\alpha_1$$

Die Schnittcurve ist eine dem Schnittdreieck des Tetraeders symmetrisch zugeordnete Curve der dritten Ordnung mit den Asymptoten

$$\alpha_2' = \frac{\alpha_1}{3(1-\alpha_1)} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir wieder

$$\alpha_2' = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} \quad \text{u. s. w.,}$$

so erhalten wir die Asymptotenebenen der krummen Fläche

$$3\alpha_2 - \alpha_1 = 0, \quad 3\alpha_3 - \alpha_1 = 0, \quad 3\alpha_4 - \alpha_1 = 0$$

Die erste dieser Gleichungen giebt

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{und}$$
$$\alpha_1 = \tfrac{1}{4} \quad \text{für} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{3}(1-\alpha_1)$$

Analoges ergeben die beiden andern Gleichungen. Die Asymptotenebenen gehen also durch je eine Kante der Grundfläche I und durch den Punkt $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ der Schwerlinie $A_1 S$.

Das Auftreten einer geschlossenen Curve in der zur Fläche I parallelen Schnittfigur der krummen Fläche ist bedingt durch das Vorhandensein von drei reellen Wurzeln in der Gleichung

$$\alpha_2'^3 - \frac{2-3\alpha_1}{1-\alpha_1}\alpha_2'^2 + \frac{3-5\alpha_1}{3(1-\alpha_1)}\alpha_2' - \frac{\alpha_1}{3(1-\alpha_1)} = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist aber stets $\alpha_2' = 1$; dann bleibt

$$\alpha_2'^2 - \frac{1-2\alpha_1}{1-\alpha_1}\alpha_2' + \frac{\alpha_1}{3(1-\alpha_1)} = 0$$

mit den Wurzeln

$$\alpha_2' = \frac{1-2\alpha_1}{2(1-\alpha_1)} \pm \frac{1}{2(1-\alpha_1)}\sqrt{1-\frac{16}{3}\alpha_1+\frac{16}{3}\alpha_1^2}$$

Diese Wurzeln sind aber reell, wenn $\frac{1}{4} > \alpha_1 > \frac{3}{4}$; diese ist also die Bedingung des Auftretens einer geschlossenen Curve in der Schnittfigur. —

Berechnet wurde

$\alpha_1 = \frac{1}{4}$, Asymptoten $\alpha_2' = \frac{1}{9}$, Scheitelpunkte $\alpha_2' = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$
$\alpha_1 = \frac{1}{2}$; Asymptoten $\alpha_2' = \frac{1}{3}$; Scheitelpunkt $\alpha_2' = 1$
$\alpha_1 = \frac{3}{4}$; Asymptoten $\alpha_2' = 1$; Scheitelpunkte $\alpha_2' = 1, -1, -1$

Die Curve degenerirt in die Asymptoten.

$\alpha_1 = \frac{7}{8}$; Asymptoten $\alpha_2' = \frac{7}{3}$; Scheitelpunkte $\alpha_2' = 1$,
$-3 \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}} = -0\cdot418, \; -5\cdot582$

$\alpha_1 = \frac{5}{4}$; Asymptoten $\alpha_2' = -\frac{5}{3}$; Scheitelpunkte $\alpha_2' = 1$,
$3 \mp 4\sqrt{\frac{3}{2}} = -0\cdot266, \; 6\cdot266$

$\alpha_1 = -\frac{1}{4}$; Asymptoten $\alpha_2' = -\frac{1}{15}$; Scheitelpunkte $\alpha_2' = 1$,
$\frac{3}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{\frac{2}{3}} = 1\cdot253, \; -0\cdot053$

Der Gleichung genügt $\sigma_3 = 0$ oder die Kante $A_1 A_2$, wie bekannt. Die Gleichung

$$\sigma_1(4\sigma_2 + \sigma_3) - 3\sigma_2\sigma_3 = 0$$

bestimmt eine Hyperbel, welche durch die Punkte A_1, A_2, S, D hindurchgeht. Ausserdem ist die durch S gelegte und zu $A_2 D$ parallele Gerade eine Tangente an der Hyperbel, somit die durch S gehende und zu $A_1 A_2$ parallele Gerade ein Durchmesser der Hyperbel. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind S und der oben bestimmte Punkt

$$\alpha_1 = \tfrac{3}{4}, \quad \alpha_2' = -1 \quad \text{oder} \quad \alpha_2 = -\tfrac{1}{4}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \tfrac{1}{4}$$

Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt daher offenbar in der Mitte der Strecke $A_1 D$, welche letztere also auch Durchmesser der Hyperbel ist.

In der Fig. 5. sind wieder die in den Schwerebenen $A_1 A_2 S$

und $A_1 A_4 S$ liegenden Schnittcurven (Hyperbeln) ausgezogen, die an den Kanten $A_1 A_2$ und $A_1 A_4$ liegenden der Fläche I parallelen Schnittcurven punktirt.

5) $\alpha_1 = \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$. Für $\alpha_1 = 0$ wird

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 0$$

die Fläche I des Tetraeders wird nicht geschnitten. Die Schnittcurve parallel I, welche der Gleichung

$$\alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 + \alpha_4'^2 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

entspricht, ist eine Ellipse unter der Voraussetzung

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} > \tfrac{1}{3} \quad \text{oder} \quad 1 > \alpha_1 > \tfrac{1}{4}$$

und reducirt sich auf einen Punkt in der Schwerlinie $A_1 S$ für $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_1 = \frac{1}{4}$; die gesuchte Fläche ist somit ein Ellipsoid, $A_1 S$ Durchmesser, der Mittelpunkt liegt in $\alpha_1 = \frac{5}{8}$. Für $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ wird

$$\alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 + \alpha_4'^2 = \tfrac{1}{3}$$

die Schnittcurve ist dem Schnittdreieck des Tetraeders eingeschrieben. Für $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ wird

$$\alpha_2'^2 + \alpha_3'^2 + \alpha_4'^2 = 1$$

die Schnittcurve ist dem Schnittdreieck umgeschrieben.

Setzen wir übrigens in die ursprüngliche Gleichung

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \beta_1), \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}\beta_2, \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}\beta_3, \quad \alpha_4 = \tfrac{1}{2}\beta_4$$

so beziehen wir die Coordinaten β_1, β_2, β_3, β_4 auf das Tetraeder $A_1 B_2 B_3 B_4$, wobei B_2, B_3, B_4 die Mittelpunkte der Kanten $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ bezeichnen, und wir erhalten

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 = 1$$

als Gleichung der gesuchten Fläche, woraus wir sofort erkennen, dass dieselbe identisch ist mit dem dem Tetraeder $A_1 B_2 B_3 B_4$ umgeschriebenen Ellipsoid von kleinstem Volumen.

6) $\alpha_1^3 = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \cdot \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \cdot \frac{\alpha_4 + \alpha_2}{2}$. Für $\alpha_1 = 0$ wird entweder

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_4 + \alpha_2 = 0$$

in anderer Form

$$\alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 1$$

hieraus ersieht man, dass die gesuchte Fläche die Grundfläche I des Tetraeders in den drei Geraden schneidet, welche durch A_2, A_3, A_4 zu den Gegenseiten parallel gezogen werden. Diese Geraden mögen einander beziehungsweise in B_2, B_3, B_4 schneiden. Der zur Tetraederfläche I parallelen Schnittcurve entspricht die Gleichung

$$(\alpha_2' + \alpha_3')(\alpha_3' + \alpha_4')(\alpha_4' + \alpha_2') = \left(\frac{2\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^3$$

oder

$$\Sigma \alpha_2'^2 (\alpha_3' + \alpha_4') + 2\alpha_2'\alpha_3'\alpha_4' = \left(\frac{2\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)$$

Eine bekannte Umformung führt zu

$$\alpha_2'^3 + \alpha_3'^3 + \alpha_4'^3 = 1 - 3\left(\frac{2\alpha_1}{1-\alpha_1}\right)^3$$

Hieraus erkennen wir, dass die Asymptoten der Schnittcurve durch die Eckpunkte des Schnittdreiecks zu den Gegenseiten desselben parallel laufen, und dass somit die Asymptotenebenen der zu untersuchenden Fläche in die Seitenflächen $A_1 B_2 B_3$, $A_1 B_3 B_4$, $A_1 B_4 B_2$ des Tetraeders $A_1 B_2 B_3 B_4$ fallen.

Beziehen wir die Coordinaten β_2', β_3', β_4' eines Punktes in der zur Tetraederfläche I parallelen Schnittcurve auf das durch die Asymptoten abgeschnittene Dreieck $B_2' B_3' B_4'$, so ist

$$\alpha_2' = 1 - 2\beta_2', \quad \alpha_3' = 1 - 2\beta_3', \quad \alpha_4' = 1 - 2\beta_4'$$

zu setzen. Beziehen wir aber die Coordinaten β_1, β_2, β_3, β_4 auf das Tetraeder $A_1 B_2 B_3 B_4$, so haben wir

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = (1-\alpha_1)\alpha_2', \quad \beta_2 = (1-\beta_1)\beta_2'$$

somit

$$\alpha_2 = 1 - \beta_1 - 2\beta_2$$

ebenso

$$\alpha_3 = 1 - \beta_1 - 2\beta_3, \quad \alpha_4 = 1 - \beta_1 - 2\beta_4$$

ferner

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} = 1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = \beta_4 \quad \text{u. s. w.}$$

und endlich

$$\beta_1^3 = \beta_2 . \beta_3 . \beta_4$$

als Gleichung der Fläche. Die Fläche ist somit identisch mit der in 3) untersuchten Fläche, wenn man an die Stelle des Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ das Tetraeder $A_1 B_2 B_3 B_4$ setzt.

7) Zum Schlusse mögen noch zwei Flächen untersucht werden, welche die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenkanten des Tetraeders zur Achse und die beiden durch dieselbe gelegten Schwerebenen zu Symmetrieebenen besitzen. Wenn $A_1 A_2 D$ und $A_3 A_4 E$ die Symmetrieebenen sind, sonach DE Achse der zu untersuchenden Fläche vorstellt, so muss die Gleichung der letzten so gebaut sein, dass eine Vertauschung der Coordinaten α_1 und α_2 einerseits, der Coordinaten α_3 und α_4 andrerseits nichts ändert.

Das einfachste Beispiel ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$$

Die gesuchte Fläche ist eine Ebene und zwar jene, welche den Tetraederkanten $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$ parallel ist und die übrigen Kanten halbirt. Denn für $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4 = 0$ wird beziehungsweise

$$\alpha_2,\ \alpha_1,\ \alpha_4,\ \alpha_3 = \tfrac{1}{2}$$

8) $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3 \alpha_4$. Sowol für $\alpha_1 = 0$ als für $\alpha_2 = 0$ wird

$$\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0$$

und umgekehrt. Die Fläche geht somit durch die Tetraederkanten $A_1 A_3$, $A_1 A_4$ $A_2 A_3$, $A_2 A_4$, keineswegs aber durch $A_1 A_2$ und $A_3 A_4$.

Die Gleichung der Schnittfigur in einer zur Tetraederfläche I parallelen Ebene ist

$$\alpha_2' = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} \alpha_3' \alpha_4'$$

oder

$$\alpha_3' = \frac{1-\alpha_4'}{\dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\alpha_4' + 1}$$

Für $\alpha_4' = -\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$ wird

$$\alpha_3' = \infty;$$

ebenso wird für

$$\alpha_3' = -\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

andererseits

$$\alpha_4' = \infty$$

die Gleichungen

$$\alpha_3' = -\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} \quad \text{und} \quad \alpha_4' = -\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}$$

bestimmen somit Asymptoten der Schnittcurve, diese selbst ist aber offenbar eine Hyperbel. Da der Mittelpunkt derselben in der Schwerebene $A_1 A_2 S$ liegen muss, so setzen wir

$$\alpha_3' = \alpha_4' = \tfrac{1}{2}(1 - \alpha_2')$$

in die Gleichung der Schnittcurve ein und finden

$$\alpha_2' = \frac{1 \pm 2\sqrt{\alpha_1} + \alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

als die Coordinaten der in der Schwerebene $A_1 A_2 S$ liegenden Hyperbelpunkte. Der Mittelpunkt der Verbindungslinie dieser beiden Curvenpunkte ist Mittelpunkt der Hyperbel und seine Coordinate ist

$$\alpha_2' = \frac{1 + \alpha_1}{1 - \alpha_1}$$

Setzen wir aber

$$\alpha_2' = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}$$

so bestimmt die Gleichung

$$\alpha_2 = 1 + \alpha_1$$

die Verbindungslinie der Mittelpunkte sämtlicher zur Fläche I parallelen Hyperbelschnitte. Diese Linie ist aber eine Gerade, welche durch A_2 hindurchgeht und die Tetraederfläche $A_1 A_3 A_4$ in einem Punkte schneidet, welcher in Beziehung auf $A_3 A_4$ als Symmetrieachse dem Punkte A_1 gegenüber symmetrisch liegt.

Die Gleichung der Schnittcurve in der Schwerebene $A_1 A_2 S$ ist

$$\sigma_3^2 = 4\sigma_1 \sigma_2 \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sigma_3) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2\sigma_3}$$

Wir finden Curvenpunkte nur unter der Bedingung

$$\sigma_3 \leqq \tfrac{1}{2}$$

Für $\sigma_3 = \frac{1}{2}$ wird übrigens $\sigma_1 = \frac{1}{4}$ und sonach der Schwerpunkt des Tetraeders bezeichnet. Die Schnittcurve ist eine Parabel, welche durch S, A_1 und A_2 hindurchgeht, da $\sigma_3 = 0$ wird zugleich für $\sigma_1 = 0$ als für $\sigma_2 = 0$. Die durch den Schwerpunkt gelegte zur $A_1 A_2$ parallele Gerade ist Tangente an der Parabel; ebenso sind die Schnittlinien $A_1 D$ und $A_2 D$ der Schwerebene mit den Tetraederflächen I und II Tangenten.

Einen ähnlichen Parabelschnitt, der ebenfalls durch den Schwerpunkt des Tetraeders hindurchgeht, findet man als Schnittcurve in der Schwerebene $A_3 A_4 S$.

Die Gleichung der Schnittlinie in der Schwerebene $A_1 A_3 S$ ist

$$\sigma_3(\sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

Die Gleichung bestimmt zwei Geraden

$\sigma_2 = 0$ bestimmt die Kante $A_1 A_3$;

$\sigma_1 = \sigma_3$

die durch den Schwerpunkt hindurchgehende Verbindungslinie der Mittelpunkte der Tetraederkanten $A_1 A_3$ und $A_2 A_4$. Diese letztre Linie liegt natürlich auch in der Ebene $A_2 A_4 S$, in welcher $A_2 A_4$ als die zweite Schnittlinie der zu untersuchenden Fläche erkannt wird.

Endlich sind die Kanten $A_1 A_4$ und $A_2 A_3$, sowie die Verbindungslinie der Mittelpunkte dieser Kanten die Schnittlinien der Fläche in den Ebenen $A_1 A_4 S$ und $A_2 A_3 S$.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen legen deutlich dar, dass die gesuchte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist, dessen Scheitel im Schwerpunkt des Tetraeders liegt, und welches von den Tetraederflächen in $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_2 A_3$ und $A_2 A_4$ geradlinig geschnitten wird.

XXII.

Bemerkungen zum Rationalmachen der Nenner.

Von

Eduard Janisch.

Die hier folgenden Erörterungen werden in erster Linie dem Zwecke dienen, zu zeigen, wie bei Verwendung des Grebe'schen Verfahrens zum Rationalisiren der Nenner, welches im XIII. Teile dieses Archivs veröffentlicht worden ist[1]), bei Gebrauch von Determinanten das Verfahren selber ein Mittel an die Hand gibt auf rein rechnerischem Wege Beziehungen festzustellen zwischen den ersten Minoren der auftretenden Determinante eines Systems linearer Gleichungen. — Grebe hat seine Methode nur auf das bekannte Problem der Elementar-Mathematik angewendet und zwar ohne Benutzung von Determinanten. Wir werden aber sehen, dass sie sich auch heranziehen lässt zur Behandlung des entsprechenden Problems aus der Theorie der algebraischen Gleichungen und werden bei der Gelegenheit mit Leichtigkeit eine Vorschrift zur Berechnung gewisser symmetrischen Functionen der Wurzeln finden, nebstdem noch auf einige Identitäten stossen.

I.

Wir beginnen mit einem Beispiele, in welchem die Irrationalität des Nenners nur von Quadratwurzeln herrührt.

Es sei

---

1) Grebe, über das Rationalmachen von Nennern mit unbestimmt vielen irrationalen Gliedern. T. XIII., S. 68 flg. 1849.

$$\frac{b_0+b_1\sqrt{\varrho_1}+b_2\sqrt{\varrho_2}+b_3\sqrt{\varrho_3}+b_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+b_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+b_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+b_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}}{a_0+a_1\sqrt{\varrho_1}+a_2\sqrt{\varrho_2}+a_3\sqrt{\varrho_3}+a_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+a_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+a_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+a_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}} = F \quad (1)$$

mit rationalem Nenner darzustellen.

Dies wird erreicht sein, wenn man die x_i in dem Ausdrucke

$$x_0+x_1\sqrt{\varrho_1}+x_2\sqrt{\varrho_2}+x_3\sqrt{\varrho_3}+x_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+x_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+x_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+x_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3} = F \quad (2)$$

als rationale Functionen der a_i, b_i und ϱ_k darstellen kann, was in der Tat möglich ist, denn multiplicirt man die linke Seite von (2) mit dem Nenner der linken Seite von (1), und setzt das erhaltene Product, welches in die Form jedes seiner Factoren gebracht werden kann, dem Zähler der linken Seite von (1) gleich, so ergibt die Coefficientenvergleichung genau so viele in den x_i lineare Gleichungen (hier 8) als x_i vorhanden sind, und somit können diese im allgemeinen eindeutig derart bestimmt werden, wie es verlangt wurde.

Diese Gleichungen lauten im vorliegenden Falle:

$$\left.\begin{array}{l}
a_0x_0+\varrho_1a_1x_1+\varrho_2a_2x_2+\varrho_3a_3x_3+\varrho_1\varrho_2a_4x_4+\varrho_1\varrho_3a_5x_5+\varrho_2\varrho_3a_6x_6 \\
\qquad +\varrho_1\varrho_2\varrho_3a_7x_7 = b_0 \\
a_1x_0+a_0x_1+\varrho_2a_4x_2+\varrho_3a_5x_3+\varrho_2a_2x_4+\varrho_3a_3x_5+\varrho_2\varrho_3a_7x_6 \\
\qquad +\varrho_2\varrho_3a_6x_7 = b_1 \\
a_2x_0+\varrho_1a_4x_1+a_0x_2+\varrho_3a_6x_3+\varrho_1a_1x_4+\varrho_1\varrho_3a_7x_5+\varrho_3a_3x_6 \\
\qquad +\varrho_1\varrho_3a_5x_7 = b_2 \\
a_3x_0+\varrho_1a_5x_1+\varrho_2a_6x_2+a_0x_3+\varrho_1\varrho_2a_7x_4+\varrho_1a_1x_5+\varrho_2a_2x_6 \\
\qquad +\varrho_1\varrho_2a_4x_7 = b_3 \\
a_4x_0+a_2x_1+a_1x_2+\varrho_3a_7x_3+a_0x_4+\varrho_3a_6x_5+\varrho_3a_5x_6 \\
\qquad +\varrho_3a_3x_7 = b_4 \\
a_5x_0+a_3x_1+\varrho_2a_7x_2+a_1x_3+\varrho_2a_6x_4+a_0x_5+\varrho_2a_4x_6 \\
\qquad +\varrho_2a_2x_7 = b_5 \\
a_6x_0+\varrho_1a_7x_1+a_3x_2+a_2x_3+\varrho_1a_5x_4+\varrho_1a_4x_5+a_0x_6 \\
\qquad +\varrho_1a_1x_7 = b_6 \\
a_7x_0+a_6x_1+a_5x_2+a_4x_3+a_3x_4+a_2x_5+a_1x_6 \\
\qquad +a_0x_7 = b_7
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Die symmetrische Determinante Δ dieses Systems ist also:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_0, & \varrho_1 a_1, & \varrho_2 a_2, & \varrho_3 a_3, & \varrho_1\varrho_2 a_4, & \varrho_1\varrho_3 a_5, & \varrho_2\varrho_3 a_6, & \varrho_1\varrho_2\varrho_3 a_7 \\ a_1, & a_0, & \varrho_2 a_4, & \varrho_3 a_5, & \varrho_2 a_2, & \varrho_3 a_3, & \varrho_2\varrho_3 a_7, & \varrho_2\varrho_3 a_6 \\ a_2, & \varrho_1 a_4, & a_0, & \varrho_3 a_6 & \varrho_1 a_1, & \varrho_1\varrho_3 a_7, & \varrho_3 a_3, & \varrho_1\varrho_3 a_5 \\ a_3, & \varrho_1 a_5, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_1\varrho_2 a_7, & \varrho_1 a_1, & \varrho_2 a_2, & \varrho_1\varrho_2 a_4 \\ a_4, & a_2, & a_1, & \varrho_3 a_7, & a_0, & \varrho_3 a_6, & \varrho_3 a_5, & \varrho_3 a_3 \\ a_5, & a_3, & \varrho_2 a_7, & a_1, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_2 a_4, & \varrho_2 a_2 \\ a_6, & \varrho_1 a_7, & a_3, & a_2, & \varrho_1 a_5, & \varrho_1 a_4, & a_0, & \varrho_1 a_1 \\ a_7, & a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & a_0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Bezeichnen wir nun die Subdeterminante des in der $i$ten Zeile und $k$ten Colonne stehenden Elementes mit $\varDelta_{i,k}$, dann erhalten wir für die x Auflösungen aus:

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta . x_0 &= b_0\varDelta_{1,1}+b_1\varDelta_{2,1}+b_2\varDelta_{3,1}+b_3\varDelta_{4,1}+b_4\varDelta_{5,1}+b_5\varDelta_{6,1} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,1}+b_7\varDelta_{8,1} \\
\varDelta . x_1 &= b_0\varDelta_{1,2}+b_1\varDelta_{2,2}+b_2\varDelta_{3,2}+b_3\varDelta_{4,2}+b_4\varDelta_{5,2}+b_5\varDelta_{6,2} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,2}+b_7\varDelta_{8,2} \\
\varDelta . x_2 &= b_0\varDelta_{1,3}+b_1\varDelta_{2,3}+b_2\varDelta_{3,3}+b_3\varDelta_{4,3}+b_4\varDelta_{5,3}+b_5\varDelta_{6,3} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,3}+b_7\varDelta_{8,3} \\
\varDelta . x_3 &= b_0\varDelta_{1,4}+b_1\varDelta_{2,4}+b_2\varDelta_{3,4}+b_3\varDelta_{4,4}+b_4\varDelta_{5,4}+b_5\varDelta_{6,4} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,4}+b_7\varDelta_{8,4} \\
\varDelta . x_4 &= b_0\varDelta_{1,5}+b_1\varDelta_{2,5}+b_2\varDelta_{3,5}+b_3\varDelta_{4,5}+b_4\varDelta_{5,5}+b_5\varDelta_{6,5} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,5}+b_7\varDelta_{8,5} \\
\varDelta . x_5 &= b_0\varDelta_{1,6}+b_1\varDelta_{2,6}+b_2\varDelta_{3,6}+b_3\varDelta_{4,6}+b_4\varDelta_{5,6}+b_5\varDelta_{6,6} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,6}+b_7\varDelta_{8,6} \\
\varDelta . x_6 &= b_0\varDelta_{1,7}+b_1\varDelta_{2,7}+b_2\varDelta_{3,7}+b_3\varDelta_{4,7}+b_4\varDelta_{5,7}+b_5\varDelta_{6,7} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,7}+b_7\varDelta_{8,7} \\
\varDelta . x_7 &= b_0\varDelta_{1,8}+b_1\varDelta_{2,8}+b_2\varDelta_{3,8}+b_3\varDelta_{4,8}+b_4\varDelta_{5,8}+b_5\varDelta_{6,8} \\ &\qquad +b_6\varDelta_{7,8}+b_7\varDelta_{8,8}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und unsere Aufgabe ist erledigt. Jetzt werden wir aber zeigen, dass es überflüssig ist alle 36 $\left(= 8 + \frac{64-8}{2}\right)$ Subdeterminanten in diese Ausdrücke einzuführen, denn sie lassen sich sämtlich sehr einfach durch die Subdeterminanten der ersten Zeile darstellen.

Wenn wir nämlich

$$\frac{1}{a_0+a_1\sqrt{\varrho_1}+a_2\sqrt{\varrho_2}+a_3\sqrt{\varrho_3}+a_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+a_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+a_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+a_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}}$$
$$=$$
$$\alpha_0+\alpha_1\sqrt{\varrho_1}+\alpha_2\sqrt{\varrho_2}+\alpha_3\sqrt{\varrho_3}+\alpha_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+\alpha_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+\alpha_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+\alpha_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$$

setzen und diesen Ausdruk mit

$$b_0+b_1\sqrt{\varrho_1}+b_2\sqrt{\varrho_2}+b_3\sqrt{\varrho_3}+b_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+b_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+b_6\sqrt{\varrho_2\varrho_3}+b_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$$

multipliciren, so müssen wir

$$x_0+x_1\sqrt{\varrho_1}+x_2\sqrt{\varrho_2}+x_3\sqrt{\varrho_3}+x_4\sqrt{\varrho_1\varrho_2}+x_5\sqrt{\varrho_1\varrho_3}+x_6\sqrt{\varrho_3\varrho_3}+x_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$$

zum Product erhalten. — Die Werte α ergeben sich ohne weiteres aus dem System (5) an Stelle der x, wenn darin

$$b_0=1,\quad b_1=b_2=b_3=\ldots=b_7=0$$

substituirt wird, also haben wir:

$$\begin{aligned}&\Delta.\alpha_0=\Delta_{1,1},\quad \Delta.\alpha_1=\Delta_{1,2},\quad \Delta.\alpha_2=\Delta_{1,3},\quad \Delta.\alpha_3=\Delta_{1,4}\\ &\Delta.\alpha_4=\Delta_{1,5},\quad \Delta.\alpha_5=\Delta_{1,6},\quad \Delta,\alpha_6=\Delta_{1,7},\quad \Delta.\alpha_7=\Delta_{1,8}\end{aligned}$$

Die Relation

$$\begin{aligned}\Delta.(\alpha_0+\alpha_1\sqrt{\varrho_2}+\ldots+\alpha_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3})(b_0+b_1\sqrt{\varrho_1}+\ldots+b_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3})\\ =\Delta.(x_0+x_1\sqrt{\varrho_1}+\ldots+x_7\sqrt{\varrho_1\varrho_2\varrho_3})\end{aligned}$$

liefert hierauf, wenn linker Hand entwickelt wird, durch Coefficientenvergleichung, das sehr leicht aus (3) ableitbare System[1]):

$$\left.\begin{aligned}\Delta.x_0&=b_0.\Delta_{1,1}+b_1.\varrho_1\Delta_{1,2}+b_2.\varrho_2\Delta_{1,3}+b_3.\varrho_3\Delta_{1,4}\\ &\quad+b_4.\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,5}+b_5.\varrho_1\varrho_3\Delta_{1,6}+b_6.\varrho_2\varrho_3\Delta_{1,7}+b_7.\varrho_1\varrho_2\varrho_3\Delta_{1,8}\\ \Delta.x_1&=b_0.\Delta_{1,2}+b_1.\quad\Delta_{1,1}+b_2.\varrho_2\Delta_{1,5}+b_3.\varrho_3\Delta_{1,6}\\ &\quad+b_4.\quad\varrho_2\Delta_{1,3}+b_5\quad\varrho_3\Delta_{1,4}+b_6.\varrho_2\varrho_3\Delta_{1,8}+b_7.\varrho_2\varrho_3\Delta_{1,7}\\ \Delta.x_2&=b_0.\Delta_{1,3}+b_1.\varrho_1\Delta_{1,5}+b_2.\quad\Delta_{1,1}+b_3\;\varrho_3\Delta_{1,7}\\ &\quad+b_4.\quad\varrho_1\Delta_{1,2}+b_5.\varrho_1\varrho_3\Delta_{1,8}+b_6.\varrho_3\Delta_{1,4}+b_7.\varrho_1\varrho_3\Delta_{1,6}\\ \Delta.x_3&=b_0.\Delta_{1,4}+b_1.\varrho_1\Delta_{1,6}+b_2.\varrho_2\Delta_{1,7}+b_3.\Delta_{1,1}\\ &\quad+b_4.\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,8}+b_5.\quad\varrho_1\Delta_{1,2}+b_6.\varrho_2\Delta_{1,3}+b_7.\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,5}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

1) Man hat nämlich blos für a, b, x überall beziehungsweise die entsprechenden α, x, b zu setzen.

$$\left.\begin{aligned}
\Delta . x_4 &= b_0 . \Delta_{1,5} + b_1 . \Delta_{1,3} + b_2 \;\Delta_{1,2} + b_3 . \varrho_3 \Delta_{1,8} \\
&\quad + b_4 . \quad \Delta_{1,1} + b_5 . \varrho_3 \Delta_{1,7} + b_6 . \varrho_3 \Delta_{1,6} + b_7 . \varrho_3 \Delta_{1,4} \\
\Delta . x_5 &= b_0 . \Delta_{1,6} + b_1 . \Delta_{1,4} + b_2 . \varrho_2 \Delta_{1,8} + b_3 . \Delta_{1,2} \\
&\quad + b_4 . \; \varrho_2 \Delta_{1,7} + b_5 . \Delta_{1,1} + b_6 . \varrho_2 \Delta_{1,5} + b_7 . \varrho_2 \Delta_{1,3} \\
\Delta . x_6 &= b_0 . \Delta_{1,7} + b_1 . \varrho_1 \Delta_{1,8} + b_2 . \Delta_{1,4} + b_3 . \Delta_{1,3} \\
&\quad + b_4 . \; \varrho_1 \Delta_{1,6} + b_5 . \varrho_1 \Delta_{1,5} + b_6 . \Delta_{1,1} + b_7 . \varrho_1 \Delta_{1,2} \\
\Delta . x_7 &= b_0 . \Delta_{1,8} + b_1 . \Delta_{1,7} + b_2 . \Delta_{1,6} + b_3 . \Delta_{1,5} \\
&\quad + b_4 . \Delta_{1,4} + b_5 . \Delta_{1,3} + b_6 \;\Delta_{1,2} + b_7 . \Delta_{1,1}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

und unsere Behauptung ist eigentlich schon bewiesen, denn in das vorstehende System (6) gehen tätsächlich nur die Subdeterminanten der ersten Zeile der Determinaute Δ ein und durch Vergleich mit (5) erfahren wir alsdann, mit welcher $\Delta_{1,m}$, beziehungsweise mit welchem Vielfachen eine $\Delta_{1,m}$ eine $\Delta_{i,k}$ übereinstimmt

So findet man

$$\Delta_{8,1} = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \Delta_{1,8}$$

das ist:

$$\begin{vmatrix}
\varrho_1 a_1, & \varrho_2 a_2, & \varrho_3 a_3, & \varrho_1 \varrho_2 a_4, & \varrho_1 \varrho_3 a_5, & \varrho_2 \varrho_3 a_6, & \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 a_7 \\
a_0, & \varrho_2 a_4, & \varrho_3 a_5, & \varrho_2 a_2, & \varrho_3 a_3, & \varrho_2 \varrho_3 a_7, & \varrho_2 \varrho_3 a_6 \\
\varrho_1 a_4, & a_0, & \varrho_3 a_6, & \varrho_1 a_1, & \varrho_1 \varrho_3 a_7, & \varrho_3 a_3, & \varrho_1 \varrho_3 a_5 \\
\varrho_1 a_5, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_1 \varrho_2 a_7, & \varrho_1 a_1, & \varrho_2 a_2, & \varrho_1 \varrho_2 a_4 \\
a_2, & a_1, & \varrho_3 a_7, & a_0, & \varrho_3 a_6, & \varrho_3 a_5, & \varrho_3 a_3 \\
a_3, & \varrho_2 a_7, & a_1, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_2 a_4, & \varrho_2 a_2 \\
\varrho_1 a_7, & a_3, & a_2, & \varrho_1 a_5, & \varrho_1 a_4, & a_0, & \varrho_1 a_1
\end{vmatrix} =$$

$$\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \begin{vmatrix}
a_1, & a_0, & \varrho_2 a_4, & \varrho_3 a_5, & \varrho_2 a_2, & \varrho_3 a_3, & \varrho_2 \varrho_3 a_7 \\
a_2, & \varrho_1 a_4, & a_0, & \varrho_3 a_6, & \varrho_1 a_1, & \varrho_1 \varrho_3 a_7, & \varrho_3 a_3 \\
a_3, & \varrho_1 a_5, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_1 \varrho_2 a_7, & \varrho_1 a_1, & \varrho_2 a_2 \\
a_4, & a_2, & a_1, & \varrho_3 a_7, & a_0, & \varrho_3 a_6, & \varrho_3 a_5 \\
a_5, & a_3, & \varrho_2 a_7, & a_1, & \varrho_2 a_6, & a_0, & \varrho_2 a_4 \\
a_6, & \varrho_1 a_7, & a_3, & a_2, & \varrho_1 a_5, & \varrho_1 a_4, & a_0 \\
a_7, & a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1
\end{vmatrix}$$

ein Resultat, welches leicht verificirt werden kann. Man braucht nur in der ersen Determinante die 2te, 3te, 4te, 5te, 6te, 7te

Zeile folgeweise zu multipliciren mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_1\varrho_3$, $\varrho_2\varrho_3$ und hiernach ebenso die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 6te Colonne durch ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, $\varrho_1\varrho_2$, $\varrho_1\varrho_3$, $\varrho_2\varrho_3$ zu dividiren um eine mit der zweiten augenscheinlich gleichwertige Determinante zu erhalten. — Wir müssen hervorheben, dass auf dieselbe Art offenbar jede der übrigen aus dem Vergleich von (5) und (6) hervorgehenden, der obigen analogen Relationen bestätigt werden können. Viele unter ihnen sind übrigens selbstverständlich, so diejenigen, welche besagen, dass

$$\Delta_{i,k} = \Delta_{8-k,\,8-i}$$

ist, was unmittelbar aus der Symmetrie von Δ folgt. Noch verdient folgendes bemerkt zu werden: 1. Die Subdeterminanten aller Elemente a_0 in der einen Diagonale sind untereinander gleich, allgemeiner sind die Subdeterminanten der Elemente mit demselben a_i ihren adjungirten Elementen umgekehrt proportional und 2. die Determinante der Subdeterminanten zeigt analogen Bau; man erhält sie, wenn in Δ an die Stelle jedes a_i die $\Delta_{1,i+1}$ tritt.

II.

Zu mit den voranstehenden vollkommen übereinstimmenden Resultaten wird uns auch das Beispiel führen', welches wir in diesem Abschnitte behandeln wollen, in welchem Beispiele die Irrationalität von Kubikwurzeln herstammen mag.

Es sei

$$\frac{b_0+b_1\sqrt[3]{\varrho_1}+b_2\sqrt[3]{\varrho_2}+b_3\sqrt[3]{\varrho_1^2}+b_4\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2}+b_5\sqrt[3]{\varrho_2^2}+b_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}+b_7\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2}+b_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}}{a_0+a_1\sqrt[3]{\varrho_1}+a_2\sqrt[3]{\varrho_2}+a_3\sqrt[3]{\varrho_1^2}+a_4\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2}+a_5\sqrt[3]{\varrho_2^2}+a_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}+a_7\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2}+a_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}}$$

in der Form

$$x_0+x_1\sqrt[3]{\varrho_1}+x_2\sqrt[3]{\varrho_2}+x_3\sqrt[3]{\varrho_1^2}+x_4\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2}+x_5\sqrt[3]{\varrho_2^2}+x_6\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2}+x_7\sqrt[3]{\varrho_1\varrho_2^2}+x_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}$$

darzustellen. Hiezu ist nach der Grebe'schen Methode die Auflösung des folgenden in den x_i linearen Gleichungssystemes erforderlich.

$$\left.\begin{array}{l}
a_0x_0+\varrho_1a_3x_1+\varrho_2a_5x_2+\varrho_1a_1x_3+\varrho_1\varrho_2a_8x_4+\varrho_2a_2x_5+\varrho_1\varrho_2a_7x_6\\
\qquad+\varrho_1\varrho_2a_6x_7+\varrho_1\varrho_2a_4x_8=b_0\\[1ex]
a_1x_0+a_0x_1+\varrho_2a_7x_2+\varrho_1a_3x_3+\varrho_2a_5x_4+\varrho_2a_4x_5+\varrho_1\varrho_2a_8x_6\\
\qquad+\varrho_2a_2x_7+\varrho_1\varrho_2a_6x_8=b_1\\[1ex]
a_2x_0+\varrho_1a_6x_1+a_0x_2+\varrho_1a_4x_3+\varrho_1a_3x_4+\varrho_2a_5x_5+\varrho_1a_1x_6\\
\qquad+\varrho_1\varrho_2a_8x_7+\varrho_1\varrho_2a_7x_8=b_2\\[1ex]
a_3x_0+a_1x_1+\varrho_2a_8x_2+a_0x_3+\varrho_2a_7x_4+\varrho_2a_5x_5+\varrho_2a_5x_6\\
\qquad\varrho_2a_4x_7+\varrho_2a_2x_8=b_3\\[1ex]
a_4x_0+a_2x_1+a_1x_2+\varrho_1a_6x_3+a_0x_4+\varrho_2a_7x_5+\varrho_1a_3x_6\\
\qquad+\varrho_2a_5x_7+\varrho_1\varrho_2a_8x_8=b_4\\[1ex]
a_5x_0+\varrho_1a_8x_1+a_2x_2+\varrho_1a_7x_3+\varrho_1a_6x_4+a_0x_5+\varrho_1a_4x_6\\
\qquad+\varrho_1a_3x_7+\varrho_1a_1x_8=b_5\\[1ex]
a_6x_0+a_4x_1+a_3x_2+a_2x_3+a_1x_4+\varrho_2a_8x_5+a_0x_6\\
\qquad+\varrho_2a_7x_7+\varrho_2a_5x_8=b_6\\[1ex]
a_7x_0+a_5x_1+a_4x_2+\varrho_1a_8x_3+a_2x_4+a_1x_5+\varrho_1a_6x_6\\
\qquad+a_0x_7+\varrho_1a_3x_8=b_7\\[1ex]
a_8x_0+a_7x_1+a_6x_2+a_5x_3+a_4x_4+a_3x_5+a_2x_6\\
\qquad+a_1x_7+a_0x_8=b_8
\end{array}\right\}\quad(1)$$

Die Determinante $\varDelta$ dieses Systems ist wiederum symmetrisch:

$$\varDelta=\begin{vmatrix}
a_0, & \varrho_1a_3, & \varrho_2a_5, & \varrho_1a_1, & \varrho_1\varrho_2a_8, & \varrho_2a_2, & \varrho_1\varrho_2a_7, & \varrho_1\varrho_2a_6, & \varrho_1\varrho_2a_4\\
a_1, & a_0, & \varrho_2a_7, & \varrho_1a_3, & \varrho_2a_5, & \varrho_2a_4, & \varrho_1\varrho_2a_8, & \varrho_2a_2, & \varrho_1\varrho_2a_6\\
a_2, & \varrho_1a_6, & a_0, & \varrho_1a_4, & \varrho_1a_3, & \varrho_2a_5, & \varrho_1a_1, & \varrho_1\varrho_2a_8, & \varrho_1\varrho_2a_7\\
a_3, & a_1, & \varrho_2a_8, & a_0, & \varrho_2a_7, & \varrho_2a_6, & \varrho_2a_5, & \varrho_2a_4, & \varrho_2a_2\\
a_4, & a_2, & a_1, & \varrho_1a_6, & a_0, & \varrho_2a_7, & \varrho_1a_3, & \varrho_2a_5, & \varrho_1\varrho_2a_8\\
a_5, & \varrho_1a_8, & a_2, & \varrho_1a_7, & \varrho_1a_6, & a_0, & \varrho_1a_4, & \varrho_1a_3, & \varrho_1a_1\\
a_6, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & \varrho_2a_8, & a_0, & \varrho_2a_7, & \varrho_2a_5\\
a_7, & a_5, & a_4, & \varrho_1a_8, & a_2, & a_1, & \varrho_1a_6, & a_0, & \varrho_1a_3\\
a_8, & a_7, & a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & a_0
\end{vmatrix}\quad(2)$$

Wenn wir nun mit $\varDelta_{i,k}$, wie oben, die Subdeterminante des in der $i$ten Zeile und $k$ten Colonne stehenden Elementes der Determinante $\varDelta$ bezeichnen würden, so liessen sich für die x_i Ausdrücke aufschreiben, die denen in (3) von Abschn. I. natürlich ganz analog wären. Davon stehen wir jedoch ab, ebenso wie auch von der Aufstellung des den Gleichungen (6) entsprechenden Systems. Wir be-

gnügen uns diesmal damit, die aus dem Vergleich von den (5) und (6) analogen Formel-Reihen hervorgehenden Determinanten-Relationen hier anzusetzen.

Man wird finden, wenn

$$\frac{1}{a_0+a_1\sqrt[3]{\varrho_1}+\ldots+a_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}}=\alpha_0+\alpha_1\sqrt[3]{\varrho_1}+\ldots+\alpha_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}$$

gesetzt wird, zunächst

$$\begin{array}{llll} \Delta.\alpha_0=\Delta_{1,1}, & \Delta.\alpha_1=\Delta_{1,2}, & \Delta.\alpha_2=\Delta_{1,3}, & \Delta.\alpha_3=\Delta_{1,4}, \\ \Delta.\alpha_4=\Delta_{1,5}, & \Delta.\alpha_5=\Delta_{1,6}, & \Delta.\alpha_6=\Delta_{1,7}, & \Delta.\alpha_7=\Delta_{1,8} \end{array}$$
$$\Delta.\alpha_8=\Delta_{1,9}$$

und hernach durch den erwähnten Vergleich der aus der Multiplication von

$$(\alpha_0+\alpha_1\sqrt[3]{\varrho_1}+\ldots+\alpha_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2}) \quad \text{mit}$$
$$(x_0+x_1\sqrt[3]{\varrho_1}+\ldots+x_8\sqrt[3]{\varrho_1^2\varrho_2^2})$$

zu gewinnenden Werte für die x_i mit denen, welche aus der Auflösung des Gleichungssystems (1) entspringen:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\Delta_{2,1}=\varrho_1\Delta_{1,4}, & \Delta_{3,1}=\varrho_2\Delta_{1,6}, & \Delta_{4,1}=\varrho_1\Delta_{1,2} & \Delta_{5,1}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,9} \\
 & \Delta_{6,1}=\varrho_2\Delta_{1,3}, & \Delta_{7,1}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,8}, & \Delta_{8,1}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,7} \\
 & \Delta_{9,1}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,5} & & \\[6pt]
\Delta_{2,2}=\Delta_{1,1}, & \Delta_{3,2}=\varrho_2\Delta_{1,8}, & \Delta_{4,2}=\varrho_1\Delta_{1,4}, & \Delta_{5,2}=\varrho_2\Delta_{1,6} \\
 & \Delta_{6,2}=\varrho_2\Delta_{1,5}, & \Delta_{7,2}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,9}, & \Delta_{8,2}=\varrho_2\Delta_{1,3} \\
 & \Delta_{9,2}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,7} & & \\[6pt]
\Delta_{2,3}=\varrho_1\Delta_{1,7}, & \Delta_{3,3}=\Delta_{1,1}, & \Delta_{4,3}=\varrho_1\Delta_{1,5}, & \Delta_{5,3}=\varrho_1\Delta_{1,4} \\
 & \Delta_{6,3}=\varrho_2\Delta_{1,6}, & \Delta_{7,3}=\varrho_1\Delta_{1,2}, & \Delta_{8,3}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,9} \\
 & \Delta_{9,3}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,8} & & \\[6pt]
\Delta_{2,4}=\Delta_{1,2}, & \Delta_{3,4}=\varrho_2\Delta_{1,9}, & \Delta_{4,4}=\Delta_{1,1}. & \Delta_{5,4}=\varrho_2\Delta_{1,8} \\
 & \Delta_{6,4}=\varrho_2\Delta_{1,7}, & \Delta_{7,4}=\varrho_2\Delta_{1,6}, & \Delta_{8,4}=\varrho_2\Delta_{1,5} \\
 & \Delta_{9,4}=\varrho_2\Delta_{1,3} & & \\[6pt]
\Delta_{2,5}=\Delta_{1,3}, & \Delta_{3,5}=\Delta_{1,2}, & \Delta_{4,5}=\varrho_1\Delta_{1,7}, & \Delta_{5,5}=\Delta_{1,1} \\
 & \Delta_{6,5}=\varrho_2\Delta_{1,8}, & \Delta_{7,5}=\varrho_1\Delta_{1,4}, & \Delta_{8,5}=\varrho_2\Delta_{1,6} \\
 & \Delta_{9,5}=\varrho_1\varrho_2\Delta_{1,9}, & &
\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{llll}
\Delta_{2,6}=\varrho_1\Delta_{1,9}, & \Delta_{3,6}=\Delta_{1,3}, & \Delta_{4,6}=\varrho_1\Delta_{1,8}, & \Delta_{5,6}=\varrho_1\Delta_{1,7} \\
 & \Delta_{6,6}=\Delta_{1,1}, & \Delta_{7,6}=\varrho_1\Delta_{1,5}, & \Delta_{8,6}=\varrho_1\Delta_{1,4} \\
 & \Delta_{9,6}=\varrho_1\Delta_{1,2} & & \\
\Delta_{2,7}=\Delta_{1,5} & \Delta_{3,7}=\Delta_{1,4}, & \Delta_{4,7}=\Delta_{1,3}, & \Delta_{5,7}=\Delta_{1,2} \\
 & \Delta_{6,7}=\varrho_2\Delta_{1,9}, & \Delta_{7,7}=\Delta_{1,1}, & \Delta_{8,7}=\varrho_2\Delta_{1,8} \\
 & \Delta_{9,7}=\varrho_2\Delta_{1,6} & & \\
\Delta_{2,8}=\Delta_{1,6}, & \Delta_{3,8}=\Delta_{1,5}, & \Delta_{4,8}=\varrho_1\Delta_{1,9}, & \Delta_{5,8}=\Delta_{1,3} \\
 & \Delta_{6,8}=\Delta_{1,2}, & \Delta_{7,8}=\varrho_1\Delta_{1,7}, & \Delta_{8,8}=\Delta_{1,1} \\
 & \Delta_{9,8}=\varrho_1\Delta_{1,4} & & \\
\Delta_{2,9}=\Delta_{1,8}, & \Delta_{3,9}=\Delta_{1,7}, & \Delta_{4,9}=\Delta_{1,6}, & \Delta_{5,9}=\Delta_{1,5} \\
 & \Delta_{6,9}=\Delta_{1,4}, & \Delta_{7,9}=\Delta_{1,3}, & \Delta_{8,9}=\Delta_{1,2} \\
 & \Delta_{9,9}=\Delta_{1,1} & &
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Auf Grund dieses Schemas können die Bemerkungen erfolgen: 1) sind die Subdeterminanten zweier Elemente von Δ, die dasselbe a_i enthalten, ihren adjungirten Elementen umgekehrt proportional, insbesondere sind also die Subdeterminanten aller Elemente der einen Diagonale (mit den a_0) untereinander gleich, und 2) ist die Determinante der Subdeterminanten mit Δ übereinstimmend gebaut, es erscheinen die a_i durch die $\Delta_{1,i+1}$ vertreten.

Somit hat die Determinante Δ dieses Abschnittes die zwei nämlichen Eigenschaften, wie die gleichbezeichnete Determinante des vorigen. Ueberhaupt steht zu erwarten, dass dies allgemein gilt für jede solche Δ, die sich ergibt beim Rationalmachen eines Nenners mit beliebig vielen $n$ten Wurzeln. Ein Beweis hiefür dürfte nicht gar einfach ausfallen, in erster Linie deshalb nicht, weil eine zweckmässige Bezeichnung der a_i Schwierigkeiten begegnet.

III.

Wir gehen nunmehr über zur Anwendung der Methode zum Beweise eines Satzes aus der Theorie der Gleichungen — nämlich des folgenden: Jede gebrochene rationale Function einer oder mehrerer Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade n

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0 \ldots$$

kann stets als ganze rationale Function derselben Wurzeln dargestellt werden und zwar lässt sich diese ganze rationale Function so

umformen, dass keine Wurzel in einem höheren als dem $(n-1)$ten Grade darin vorkommt [1]).

Es genügt bekanntlich der Nachweis der Richtigkeit des Satzes für eine Function nur einer Wurzel.

Sei also, wenn z. B. ω eine Wurzel der Gleichung

$$x^5 + p_1 x^4 + p_2 x^3 + p_3 x^2 + p_4 x + p_5 = 0$$

bedeutet,

$$\frac{b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2 + b_3 \omega^3 + b_4 \omega^4}{a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_3 \omega^3 + a_4 \omega^4}$$

(eine Form auf die in dem Falle jede rationale Function von ω gebracht werden werden kann) in eine ganze rationale Function von ω zu verwandeln:

$$x_0 + x_1 \omega + x_2 \omega^2 + x_3 \omega^3 + x_4 \omega^4$$

sodass mithin die Gleichung besteht:

$$\frac{b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2 + b_3 \omega^3 + b_4 \omega^4}{a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_3 \omega^3 + a_4 \omega^4} = x_0 + x_1 \omega + x_2 \omega^2 + x_3 \omega^3 + x_4 \omega^4 \tag{1}$$

aus welcher unmittelbar folgt:

$$b_0 + b_1 \omega + b_2 \omega^2 + b_3 \omega^3 + b_4 \omega^4$$
$$= (a_0 + a_1 \omega + a_2 \omega^2 + a_3 \omega^3 + b_4 \omega^4)(x_0 + x_1 \omega + x_2 \omega^2 + x_3 \omega^3 + x_4 \omega^4) \tag{1*}$$

Multiplicirt man rechter Hand aus, so findet man

$$\left.\begin{array}{l} a_0 x_0 + a_1 x_0 \omega + a_2 x_0 \omega^2 + a_3 x_0 \omega^3 + a_4 x_0 \omega^4 \\ \quad + a_0 x_1 \omega + a_1 x_1 \omega^2 + a_2 x_1 \omega^3 + a_3 x_1 \omega^4 + a_4 x_1 \omega^5 \\ \qquad + a_0 x_2 \omega^2 + a_1 x_2 \omega^3 + a_2 x_2 \omega^4 + a_3 x_2 \omega^5 + a_4 x_2 \omega^6 \\ \qquad\quad + a_0 x_3 \omega^3 + a_1 x_3 \omega^4 + a_2 x_3 \omega^5 + a_3 x_3 \omega^6 + a_4 x_3 \omega^7 \\ \qquad\quad + a_0 x_4 \omega^4 + a_1 x_4 \omega^5 + a_2 x_4 \omega^6 + a_3 x_4 \omega^7 + a_4 x_4 \omega^8 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Nun lassen sich aber bekanntlich die höheren als die vierten Potenzen von ω in die Gestalt von Polynomen vierten Grades in ω bringen. Man hat also, beziehungsweise kann man setzen:

1) Man vergl. hiezu etwa Serret (Wertheim), Handbuch der höheren Algebra, 1. Bd., S. 332, Art. 182.

$$\left.\begin{aligned}
\omega^5 &= -p_1\omega^4 - p_2\omega^3 - p_3\omega^2 - p_4\omega - p_5 \\
\omega^6 &= -p_{11}\omega^4 - p_{21}\omega^3 - p_{31}\omega^2 - p_{41}\omega - p_{51} \\
\omega^7 &= -p_{12}\omega^4 - p_{22}\omega^3 - p_{32}\omega^2 - p_{42}\omega - p_{52} \\
\omega^8 &= -p_{13}\omega^4 - p_{23}\omega^3 - p_{33}\omega^2 - p_{43}\omega - p_{53}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und findet für die $p_{i,k}$ mit Leichtigkeit ihre Werte (ausgedrückt in den p_i) durch Auflösung des folgenden Gleichungssystemes (mit ω^5, ω^6, ω^7, ω^8 als Unbekannten):

$$\left.\begin{aligned}
\omega^5 \qquad\qquad\qquad &= -p_1\omega^4 - p_2\omega^3 - p_3\omega^2 - p_4\omega - p_5 \\
p_1\omega^5 + \omega^6 \qquad\qquad &= -p_2\omega^4 - p_3\omega^3 - p_4\omega^2 - p_5\omega \\
p_2\omega^5 + p_1\omega^6 + \omega^7 \qquad &= -p_3\omega^4 - p_4\omega^3 - p_5\omega^2 \\
p_3\omega^5 + p_2\omega^6 + p_1\omega^7 + \omega^8 &= -p_4\omega^4 - p_5\omega^3
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
p_{11} &= -p_1^2 + p_2, \quad p_{12} = p_1^3 - 2p_1p_2 + p_3 \\
p_{13} &= -p_1^4 + 3p_1^2p_2 - 2p_1p_3 - p_2^2 + p_4 \\
p_{21} &= -p_1p_2 + p_3, \quad p_{22} = p_1^2p_2 - p_1p_3 - p_2^2 + p_4 \\
p_{23} &= -p_1^3p_2 + p_1^2p_3 + 2p_1p_2^2 - p_1p_4 - 2p_2p_3 + p_5 \\
p_{31} &= -p_1p_3 + p_4, \quad p_{32} = p_1^2p_3 - p_1p_4 - p_2p_3 + p_5 \\
p_{33} &= -p_1^3p_3 + p_1^2p_4 + 2p_1p_2p_3 - p_1p_5 - p_2p_4 - p_3^2 \\
p_{41} &= -p_1p_4 + p_5, \quad p_{42} = p_1^2p_4 - p_1p_5 - p_2p_4 \\
p_{43} &= -p_1^3p_4 + p_1^2p_5 + 2p_1p_2p_4 - p_2p_5 - p_3p_4 \\
p_{51} &= -p_1p_5, \quad p_{52} = p_1^2p_5 - p_2p_5 \\
p_{53} &= -p_1^3p_5 + 2p_1p_2p_5 - p_3p_5
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Mit Benutzung der Relationen (3) kann sonach das Aggregat (2) umgeformt werden in das Polynom vierten Grades in ω:

(6)

a_0x_0	$+ a_1x_0$	ω	$+ a_2x_0$	ω^2	$+ a_3x_0$	ω^3	$+ a_4x_0$	ω^4
$-p_5\, a_4x_1$	$+ a_0x_1$ $-p_4\, a_4x_1$		$+ a_1x_1$ $-p_3\, a_4x_1$		$+ a_2x_1$ $-p_2\, a_4x_1$		$+ a_3x_1$ $-p_1\, a_4x_1$	
$-p_5a_3x_2$ $-p_{51}a_4x_2$	$-p_4\, a_3x_2$ $-p_{41}a_4x_2$		$+ a_0x_2$ $-p_3\, a_3x_2$ $-p_{31}a_4x_2$		$+ a_1x_2$ $-p_2\, a_3x_2$ $-p_{21}a_4x_2$		$+ a_2x_2$ $-p_1\, a_3x_2$ $-p_{11}a_4x_2$	

(6)

$$
\begin{array}{l|l|c|l|c|l|c|l|c}
 & & \omega & & \omega^2 & +\ a_3x_3 & \omega^3 & +\ a_1x_3 & \omega^4 \\
-p_5\,a_2x_3 & -p_4\,a_2x_3 & & -p_3\,a_2x_3 & & -p_2\,a_2x_3 & & -p_1\,a_2x_3 & \\
-p_{51}a_3x_3 & -p_{41}a_3x_3 & & -p_{31}a_3x_3 & & -p_{21}a_3x_3 & & -p_{11}a_3x_3 & \\
-p_{52}a_4x_3 & -p_{42}a_4x_3 & & -p_{32}a_4x_2 & & -p_{22}a_4x_3 & & -p_{12}a_4x_3 & \\
\hline
 & & & & & & & +\ a_0x_4 & \\
-p_5\,a_1x_4 & -p_4\,a_1x_4 & & -p_3\,a_1x_4 & & -p_2\,a_1x_4 & & -p_1\,a_1x_4 & \\
-p_{51}a_2x_4 & -p_{41}a_2x_4 & & -p_{31}a_3x_4 & & -p_{21}a_2x_4 & & -p_{11}a_2x_4 & \\
-p_{52}a_3x_4 & -p_{42}a_3x_4 & & -p_{32}a_3x_4 & & -p_{22}a_3x_4 & & -p_{12}a_3x_4 & \\
-p_{53}a_3x_4 & -p_{43}a_4x_4 & & -p_{33}a_4x_4 & & -p_{23}a_4x_4 & & -p_{13}a_4x_4 &
\end{array}
$$

Nun soll nach (1*) der Wert dieses Polynoms übereinstimmen mit dem des Ausdruckes

$$b_0+b_1\omega+b_2\omega^2+b_3\omega^3+b_4\omega^4$$

für fünf Werte von ω, nämlich für die fünf Wurzeln ω, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 der Gleichung

$$x^5+p_1x^4+p_2x^3+p_3x^2+p_4x+p_5=0$$

folglich sind die beiden Polynome nach einem bekannten Satze identisch und man erhält durch Vergleichung ihrer Coefficienten zur Bestimmung der x_i das Gleichungssystem:

(7)

$$
\begin{array}{l|c|r|c|r|c}
b_0 = a_0 & x_0 & -p_5a_4 & x_1 & -p_5a_3-p_{51}a_4 & x_2 \\
b_1 = a_1 & & a_0-p_4a_4 & & -p_4a_3-p_{41}a_4 & \\
b_2 = a_2 & & a_1-p_3a_4 & & a_0-p_3a_3-p_{31}a_4 & \\
b_3 = a_3 & & a_2-p_2a_4 & & a_1-p_2a_3-p_{21}a_4 & \\
b_4 = a_4 & & a_3-p_1a_4 & & a_2-p_1a_3-p_{11}a_4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|c|r|c}
-p_5a_2-p_{51}a_3-p_{52}a_4 & x_3 & -p_5a_1-p_{51}a_2-p_{52}a_3-p_{53}a_4 & x_4 \\
-p_4a_2-p_{41}a_3-p_{42}a_4 & & -p_4a_1-p_{41}a_2-p_{42}a_3-p_{43}a_4 & \\
-p_3a_2-p_{31}a_3-p_{32}a_4 & & -p_3a_1-p_{31}a_2-p_{32}a_3-p_{33}a_5 & \\
a_0-p_2a_2-p_{21}a_3-p_{22}a_4 & & -p_2a_1-p_{21}a_2-p_{22}a_3-p_{23}a_4 & \\
a_1-p_1a_2-p_{11}a_3-p_{12}a_4 & & a_0-p_1a_1-p_{11}a_2-p_{12}a_3-p_{13}a_4 &
\end{array}
$$

IV.

Es ist nun bemerkenswert, dass die Determinante Δ des eben hingeschriebenen Gleichungssystemes (7) des Abschnittes III. dazu dienen kann alle diejenigen symmetr. Functionen der Wurzeln ω, $\omega_1, \ldots \omega_4$ zu berechnen, in denen keine dieser Wurzeln in einer höheren als der vierten Potenz erscheint. Wir beabsichtigen dies im vorliegenden Abschnitte zu zeigen, noch bevor wir auf die auch hier bestehenden Relationen zwischen den Subdeterminanten jener Determinante eingehen.

Wir haben für Δ den Ausdruck: (El. d. 5. Col. unter d. 4ten):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0, & -p_5a_4, & -p_5a_3-p_{51}a_4, & -p_5a_2-p_{51}a_3-p_{52}a_4 \\ & & & -p_5a_1-p_{51}a_2-p_{52}a_3-p_{53}a_4 \\ a_1, & a_0-p_4a_4, & -p_4a_3-p_{41}a_4, & -p_4a_2-p_{41}a_3-p_{42}a_4 \\ & & & -p_4a_1-p_{41}a_2-p_{42}a_3-p_{43}a_4 \\ a_2, & a_1-p_3a_4, & a_0-p_3a_3-p_{31}a_4, & -p_3a_2-p_{31}a_3-p_{32}a_4 \\ & & & -p_3a_1-p_{31}a_2-p_{32}a_3-p_{33}a_4 \\ a_3, & a_2-p_2a_4, & a_1-p_2a_3-p_{21}a_4, & a_0-p_2a_2-p_{21}a_3-p_{22}a_4 \\ & & & -p_2a_1-p_{21}a_2-p_{22}a_3-p_{23}a_4 \\ a_4, & a_3-p_1a_4, & a_2-p_1a_3-p_{11}a_4, & a_1-p_1a_2-p_{11}a_3-p_{12}a_4 \\ & & & a_0-p_1a_1-p_{11}a_2-p_{12}a_3-p_{13}a_4 \end{vmatrix} \quad (1)$$

welcher entwickelt offenbar eine in den $a_0, a_1, \ldots a_4$ ganze homogene Function vom fünften Grade gibt. Die Coefficienten der einzelnen Terme sind im allgemeinen ganze Functionen der p_{ik}; der Anfangsterm a_0^5 macht eine Ausnahme, sein Coefficient ist 1.

Es ist leicht hiefür auch ein Product anzugeben, indem wir unser Beispiel auf eine andere Art behandeln. Multipliciren wir nämlich [1]) Zähler und Nenner von

$$\frac{b_0+b_1\omega+\ldots+b_4\omega^4}{a_0+a_1\omega+\ldots+a_4\omega^4}$$

mit

$$\Pi_{\lambda=1,2,3,4}(a_0+a_1\omega_\lambda+\ldots+a_4\omega_\lambda^4)$$

so wird der Nenner eine symmetr. Function von ω, $\omega_1 \ldots \omega_4$ und zugleich eine homogene Function der a mit a_0^0 als Anfangsglied. während der Zähler, da sich

---

1) Serret, Handbuch, l. c.

$$\Pi(a_0 + a_1\omega\lambda + \ldots + a_4\omega\lambda^4)$$

als symmetr. Function der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^5 + p_1x^4 + \ldots p_5}{x - \omega} = 0$$

als ganze Function von ω und der Grössen p darstellen lässt, eine ganze Function von ω wird, die offenbar, wenn reducirt, von

$$\Delta.(x_0 + x_1\omega + \ldots + x_4\omega^4)$$

nicht verschieden sein kann, denn man muss bekommen

$$\frac{(b_0 + b_1\omega + \ldots + b_4\omega^4).\Pi(a_0 + a_1\omega\lambda + \ldots + a_4\omega\lambda^4)}{(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_4\omega^4).\Pi(a_0 + a_1\omega\lambda + \ldots + a_4\omega\lambda^4)}$$
$$= x_0 + x_1\omega + \ldots + x_4\omega^4$$

Wie wir wissen, ist aber der gemeinsame Nenner aller x die Determinante Δ, und linker Hand steht als Nenner

$$(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_4\omega^4).\Pi(a_0 + a_1\omega\lambda + \ldots + a_4\omega\lambda^4)$$

der von dem rechter Hand, also von Δ, nur um einen constanten Factor differiren könnte. Dieser constante Factor muss aber hier die Einheit sein, da in beiden Nennern der Coefficient des Anfangsgliedes a_0^5 gleich eins ist.

Aus der eben bewiesenen Identität

$$(a_0 + a_1\omega + \ldots + a_4\omega^4).\prod_{\lambda=1,2,3,4}(a_0 + a_1\omega\lambda + \ldots + a_4\omega\lambda^4) = \Delta$$

folgt nun ohne weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung, denn die hier zweifelsohne gestattete Coefficientenvergleichung liefert für jede symmetr. Function der ω, welche als Coefficient links auftritt, den Wert derselben ausgedrückt durch die p_{ik} in dem analogen Coefficienten rechts.

Wir lassen hierzu einige Beispiele folgen, in welchen die Rechnung nicht weitläufig wird. Vorher führen wir noch für die Determinante Δ die Bezeichnung ein [1])

$$\Delta = (\alpha_4,\ \alpha_3 - \alpha_4\pi,\ \alpha_2 - \alpha_3\pi - \alpha_4\pi_1,\ \alpha_1 - \alpha_2\pi - \alpha_3\pi_1 - \alpha_4\pi_2,$$
$$\alpha_0 - \alpha_1\pi - \alpha_2\pi_1 - \alpha_3\pi_2 - \alpha_4\pi_3)$$

und bemerken, dass es unter Beibehaltung dieses Modus der Be-

1) Die α und π stehen für die Colonnen von Δ, beziehungsweise für deren Bestandteile.

zeichnung leicht wäre die sämtlichen Partialdeterminanten von Δ anzugeben.

Es sei nun als erstes Beispiel etwa $\Sigma\omega^4\omega_1$ zu berechnen, Man erkennt zunächst unschwer, dass diese symmetr. Function in der Entwicklung von

$$(a_0+a_1\omega+\ldots+a_4\omega^4).\Pi(a_0+a_1\omega\lambda+\ldots+a_4\omega\lambda^4)$$

Coefficient von $a_0^3a_1a_4$ ist; folglich sind von uns alle Glieder von Δ, oder besser der Partialdeterminanten von Δ zu entwickeln, die $a_0^3a_1a_4$ enthalten. Die Summe der Coefficienten dieser Glieder gibt dann den Wert von $\Sigma\omega^4\omega_1$.

In Betracht kommen demgemäss hier nur die folgenden nicht verschwindenden Partialdeterminanten, denn nur diese enthalten je wenigstens ein Glied mit $a_0^3a_1a_4$ [1]):

$$\left.\begin{array}{ll}(\underline{\alpha_4},\ \underline{\alpha_3},\ \underline{\alpha_2},\ \alpha_1,\ -a_4\pi_3), & (\underline{\alpha_4},\ \alpha_3,\ \alpha_2.\ -a_4\pi_2,\ -a_1\pi)\\ (\underline{\alpha_4},\ \underline{\alpha_3}.\ -a_4\pi_1,\ \alpha_1,\ -a_1\pi). & (\underline{\alpha_4},\ \alpha_3,\ \alpha_2,\ -a_4\pi_2,\ \underline{\alpha_0})\\ (\alpha_4,\ \alpha_3,\ -a_4\pi_1,\ \underline{\alpha_1},\ \underline{\alpha_0}), & (\alpha_4,\ \alpha_3,\ \underline{\alpha_2},\ \alpha_1,\ -a_1\pi)\\ (\alpha_4,\ -a_4\pi,\ \underline{\alpha_2},\ \underline{\alpha_1},\ \underline{\alpha_0}) & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Die Coefficienten dieser Glieder sind nun der Reihe nach:

$$p_{23},\ p_1p_{22}-p_2p_{12},\ p_1p_{31}-p_3p_{11},\ p_{32},\ p_{41},\ p_5,\ p_5 \qquad (3)$$

Mithin hat man:

$$\Sigma\omega^4\omega_1=p_{23}+(p_1p_{22}-p_2p_{12})+(p_1p_{31}-p_3p_{11})+p_{32}+p_{41}+2p_5 \quad (4)$$

Nun ist aber nach III., (5):

$$\begin{array}{rl}p_{23}= & -p_1^3p_2+p_1^2p_3+2p_1p_2^2-p_1p_4-2p_2p_3+p_5\\ p_1p_{22}-p_2p_{12}= & \qquad\quad -p_1^2p_3+p_1p_2^2+p_1p_4-p_2p_3\\ p_1p_{31}-p_3p_{11}= & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +p_1p_4-p_2p_3\\ p_{32}= & \qquad\quad +p_1^2p_3 \qquad\qquad -p_1p_4-p_2p_3+p_5\\ p_{41}= & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -p_1p_4 \qquad\quad +p_5\\ 2p_5= & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2p_5\end{array}$$

Daher

$$\Sigma\omega^4\omega_1=-p_1^3p_2+p_1^2p_3+3p_1p_2^2-p_1p_4-5p_2p_3+5p_5 \qquad (5)$$

---

1) Diejenigen Colonnen, denen das Element a_0 entnommen werden soll, sind unterstrichen.

Ebenso berechnen wir noch $\Sigma\omega^4\omega_1\omega_2$, $\Sigma\omega^4\omega_1\omega_2\omega_3$, $\Sigma\omega^4\omega_1\omega_2 . \omega_3\omega_4$, die Coefficienten von beziehungsweise $a_0^2a_1^2a_4$, $a_0a_1^3a_4$, $a_1^4a_4$.

Es kommt vor [1])

$a_0^2a_1^2a_4$ in: $(\underline{\alpha_4}, \underline{\alpha_3}, \alpha_2, \alpha_1, -a_4\pi_3)$, $(\underline{\alpha_4}, \underline{\alpha_3}, \alpha_2, -a_4\pi_2, -a_1\pi)$,

$(\underline{\alpha_4}, \underline{\alpha_3}, -a_4\pi_1, \alpha_1, -a_1\pi)$, $(\underline{\alpha_4}, \alpha_3, -a_4\pi_1, \underline{\alpha_1}, -a_1\pi)$,

$(\underline{\alpha_4}, \alpha_3, \alpha_2, -a_4\pi_2, \underline{\alpha_0})$, $(\alpha_4, \alpha_3, -\alpha_4\pi_1, \underline{\alpha_1}, \underline{\alpha_0})$

$a_0a_1^3a_4$ in: $(\underline{\alpha_4}, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, -a_4\pi_3)$, $(\underline{\alpha_4}, \alpha_3, \alpha_2, -a_4\pi_2, -a_1\pi)$,

$(\underline{\alpha_4}, \alpha_3, -a_4\pi_1, \alpha_1, -a_1\pi)$, $(\alpha_4, \alpha_3, -a_4\pi_1, \underline{\alpha_1}, -a_1\pi)$,

$(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, -a_4\pi_2, \underline{\alpha_0})$

$a_1^4a_4$ in: $(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, -a_4\pi_3)$, $(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2 -a_4\pi_2, -a_1\pi)$,

$(\alpha_4, \alpha_3, -a_4\pi_1, \alpha_1, -a_1\pi)$

und zwar ist der Gesammtcoefficient von

$a_0^2a_1^2a_4 \ldots \Sigma\omega^4\omega_1\omega_2$

$$= - p_{33} - (p_1p_{32} - p_3p_{12}) - (p_2p_{31} - p_3p_{21}) - (p_1p_{41} - p_4p_{11}) - p_{42} - p_{51}$$
$$= p_1^3p_3 - p_1^2p_4 - 3p_1p_2p_3 + p_1p_5 + 2p_2p_4 + 3p_3^2;$$

$a_0a_1^3a_4 \ldots \Sigma\omega^4\omega_1\omega_2\omega_3$

$$= p_{43} + (p_1p_{42} - p_4p_{12}) + (p_2p_{41} - p_4p_{21}) + (p_1p_{51} - p_5p_{11}) + p_{52}$$
$$= - p_1^3p_4 + p_1^2p_5 + 3p_1p_2p_4 - 2p_2p_5 - 3p_3p_4$$

$a_1^4a_4 \ldots \Sigma\omega^4\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$

$$= - p_{53} - (p_1p_{52} - p_5p_{12}) - (p_2p_{51} - p_5p_{21})$$
$$= p_1^3p_5 - 3p_1p_2p_5 + 3p_3p_5$$

An der letzten dieser drei Gleichungen fällt auf, dass rechts p_5 als Factor heraustritt. Dies muss notwendig so sein, denn es ist

$$\Sigma\omega^4\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 = \omega\,\omega_1\omega_2\omega_1\omega_4\Sigma\omega^3 = - p_5\Sigma\omega^3$$

Man hätte demnach den Ausdruck für jene Summe auch erhalten, wenn man in der Determinante Δ den Coefficienten von $a_0^4a_3(=\Sigma\omega^3)$ bestimmt und mit $-p_5$ multiplicirt hätte. Wir können dies übrigens noch nachträglich tun, umsoeher, da besagter Coefficient in den $p\alpha$ auf der Stelle hingeschrieben werden kann. Man hat nämlich:

---

1) Diejenigen Colonnen, denen das Element a_0 entnommen werden soll, sind unterstrichen.

$$\Sigma\omega^2 = -p_{12} - p_{21} - p_{31}$$

also

$$-p_5 \cdot \Sigma\omega^3 = p_5 p_{12} + p_5 p_{21} + p_3 p_5 = p_1^3 p_5 - 3p_1 p_2 p_5 + 3p_3 p_5$$

wie oben. Nebenbei ergibt sich:

$$-p_{53} - (p_1 p_{52} - p_5 p_{12}) - (p_2 p_{51} - p_5 p_{21}) = p_5 p_{12} + p_5 p_{21} + p_3 p_5$$

oder

$$p_3 p_5 + p_1 p_{52} + p_2 p_{51} + p_{53} = 0$$

eine Identität der $p_{\ddot{\alpha}}$, wie deren auf ähnliche Art sehr viele abgeleitet werden könnten.

Die Beispiele, die wir hier behandelt haben, erforderten, wie ersichtlich, wirklich nur sehr wenig Rechnung. Dasselbe wird noch von manch anderen Beispielen gelten, aber es ist doch leicht abzusehen, dass es auch Fälle geben muss, von denen das Gleiche nicht mehr behauptet werden kann. Wenn nämlich die Aufgabe vorliegt in der Entwickiung von Δ den Coefficienten eines Gliedes zu bestimmen, welches höhere Potenzen von a_3 und a_4 oder selbst nur $a_3 a_4$ als Factor enthält, so ist hiezu die Auswertung von Determinanten zweiten und höheren Grades mit den p_{α} als Elementen notwendig — und das ist offenbar eine ziemlich langwierige Sache.

Nun noch die Bemerkung, dass die Werte einiger jener Coefficienten sofort angegeben werden können, nämlich die von a_2^5, a_3^5, a_4^5. Sie sind der Reihe nach:

$$p_5^2 = \Sigma(\omega\,\omega_1 \ldots \omega_4)^2, \quad -p_5^3 = \Sigma(\omega\,\omega_1 \ldots \omega_4)^3$$
$$p_5^4 = \Sigma(\omega\,\omega_1 \ldots \omega_4)^4$$

Man findet dann zur Vergleichung mit den für dieselben resultirenden Werten aus Δ die Formeln:

(7)

$$p_5^2 = \begin{vmatrix} p_5, & p_{51} \\ p_4, & p_{41} \end{vmatrix}, \quad p_5^3 = \begin{vmatrix} p_5, & p_{51}, & p_{52} \\ p_4, & p_{41}, & p_{42} \\ p_3, & p_{31}, & p_{32} \end{vmatrix}$$

$$p_5^4 = \begin{vmatrix} p_5, & p_{51}, & p_{52}, & p_{53} \\ p_4, & p_{41}, & p_{42}, & p_{43} \\ p_3, & p_{31}, & p_{32}, & p_{33} \\ p_2, & p_{21}, & p_{22}, & p_{23} \end{vmatrix}$$

V.

In diesem letzten Abschnitte geben wir endlich die, wie schon oben bemerkt wurde, auch hier bestehenden Relationen zwischen den Subdeterminanten von Δ. Der Weg zu deren Herleitung ist mit dem bereits früher zum gleichen Zwecke eingeschlagenen übereinstimmend.

Wir setzen

$$\frac{1}{a_0+a_1\omega+a_2\omega^2+a_3\omega^3+a_4\omega^4}=\alpha_0+\alpha_1\omega+\alpha_2\omega^2+\alpha_3\omega^3+\alpha_4\omega^4$$

bilden das Product

$$(\alpha_0+\alpha_1\omega+\ldots+\alpha_4\omega^4)(b_0+b_1\omega+\ldots+b_4\omega^4)$$

dessen Wert gegeben ist durch

$$x_0+x_1\omega+\ldots+x_4\omega^4$$

und erhalten wegen

(1)

$$\begin{aligned}
&(\alpha_0+\alpha_1\omega+\ldots+\alpha_4\omega^4)(b_0+b_1\omega+\ldots+b_4\omega^4)\\
&=[\alpha_0b_0-p_5\alpha_4b_1-(p_5\alpha_3+p_{51}\alpha_4)b_2-(p_5\alpha_2+p_{51}\alpha_3+p_{52}\alpha_4)b_3\\
&-(p_5\alpha_1+p_{51}\alpha_2+p_{52}\alpha_3+p_{53}\alpha_4)b_4]+[\alpha_1b_0+(\alpha_0-p_4\alpha_4)b_1\\
&-(p_4\alpha_3+p_{41}\alpha_4)b_2-(p_4\alpha_2+p_{41}\alpha_3+p_{42}\alpha_4)b_3\\
&-(p_4\alpha_1+p_{41}\alpha_2+p_{42}\alpha_3+p_{43}\alpha_4)b_4]\omega+[\alpha_2b_0+(\alpha_1-p_3\alpha_4)b_1\\
&+(\alpha_0-p_3\alpha_3-p_{31}\alpha_4)b_2-(p_3\alpha_2+p_{31}\alpha_3+p_{32}\alpha_4)b_3\\
&-(p_3\alpha_1+p_{31}\alpha_2+p_{32}\alpha_3+p_{33}\alpha_4)b_4]\omega^2+[\alpha_3b_0+(\alpha_2-p_2\alpha_4)b_1\\
&+(\alpha_1-p_2\alpha_3-p_{21}\alpha_4)b_2+(\alpha_0-p_2\alpha_2-p_{21}\alpha_3-p_{22}\alpha_4)b_3\\
&-(p_2\alpha_1+p_{21}\alpha_2+p_{22}\alpha_3+p_{23}\alpha_4)b_4]\omega^3+[\alpha_4b_0+(\alpha_3-p_1\alpha_4)b_1\\
&+(\alpha_2-p_1\alpha_3-p_{21}\alpha_4)b_2+(\alpha_1-p_1\alpha_2-p_{11}\alpha_3-p_{12}\alpha_4)b_3\\
&+(\alpha_0-p_1\alpha_1-p_{11}\alpha_2-p_{12}\alpha_3-p_{13}\alpha_4)b_4]\omega^4\\
&=x_0+x_1\omega+x_2\omega^2+x_3\omega^3+x_4\omega^4
\end{aligned}$$

da, wofern unter $\Delta_{i,k}$ die Subdeterminante des der $i$ten Zeile und $k$ten Colonne angehörigen Elementes von Δ verstanden wird,

(2)

$$\Delta . \alpha_0=\Delta_{1,1},\quad \Delta . \alpha_1=\Delta_{1,2},\quad \Delta . \alpha_2=\Delta_{1,3},\quad \Delta . \alpha_3=\Delta_{1,4},\quad \Delta . \alpha_4=\Delta_{1,5}$$

ist, und die Relationen bestehen:

$$\begin{aligned}
\Delta . x_0&=\Delta_{1,1}b_0+\Delta_{2,1}b_1+\Delta_{3,1}b_2+\Delta_{4,1}b_3+\Delta_{5,1}b_4\\
\Delta . x_1&=\Delta_{1,2}b_0+\Delta_{2,2}b_1+\Delta_{3,2}b_2+\Delta_{4,2}b_3+\Delta_{5,2}b_4\\
\Delta . x_2&=\Delta_{1,3}b_0+\Delta_{2,3}b_1+\Delta_{3,3}b_2+\Delta_{4,3}b_3+\Delta_{5,3}b_4\\
\Delta . x_3&=\Delta_{1,4}b_0+\Delta_{2,4}b_1+\Delta_{3,4}b_2+\Delta_{4,4}b_3+\Delta_{5,4}b_4\\
\Delta . x_4&=\Delta_{1,5}b_0+\Delta_{2,5}b_1+\Delta_{3,5}b_2+\Delta_{4,5}b_3+\Delta_{5,5}b_4
\end{aligned}$$

durch Vergleichung der Coefficienten das folgende System:

$$\left.\begin{array}{ll}
\Delta_{2,1} = -p_5\Delta_{1,5}, & \Delta_{3,1} = -p_5\Delta_{1,4} - p_{51}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{4,1} = -p_5\Delta_{1,3} - p_{51}\Delta_{1,4} - p_{52}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{5,1} = -p_5\Delta_{1,2} - p_{51}\Delta_{1,3} - p_{52}\Delta_{1,4} - p_{53}\Delta_{1,5} \\
\Delta_{2,2} = \Delta_{1,1} - p_4\Delta_{1,5}, & \Delta_{3,2} = -p_4\Delta_{1,4} - p_{41}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{4,2} = -p_4\Delta_{1,3} - p_{41}\Delta_{1,4} - p_{42}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{5,2} = -p_4\Delta_{1,2} - p_{41}\Delta_{1,3} - p_{42}\Delta_{1,4} - p_{43}\Delta_{1,5} \\
\Delta_{2,3} = \Delta_{1,2} - p_3\Delta_{1,5}, & \Delta_{3,3} = \Delta_{1,1} - p_3\Delta_{1,4} - p_{31}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{4,3} = -p_3\Delta_{1,3} - p_{31}\Delta_{1,4} - p_{32}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{5,3} = -p_3\Delta_{1,2} - p_{31}\Delta_{1,3} - p_{32}\Delta_{1,4} - p_{33}\Delta_{1,5} \\
\Delta_{2,4} = \Delta_{1,3} - p_2\Delta_{1,5}, & \Delta_{3,4} = \Delta_{1,2} - p_2\Delta_{1,4} - p_{21}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{4,4} = \Delta_{1,1} - p_2\Delta_{1,3} - p_{21}\Delta_{1,4} - p_{22}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{5,4} = -p_2\Delta_{1,2} - p_{21}\Delta_{1,3} - p_{22}\Delta_{1,4} - p_{23}\Delta_{1,5} \\
\Delta_{2,5} = \Delta_{1,4} - p_1\Delta_{1,5}, & \Delta_{3,5} = \Delta_{1,3} - p_1\Delta_{1,4} - p_{11}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{4,5} = \Delta_{1,2} - p_1\Delta_{1,3} - p_{11}\Delta_{1,4} - p_{12}\Delta_{1,5} \\
& \Delta_{5,5} = \Delta_{1,1} - p_1\Delta_{1,2} - p_{11}\Delta_{1,3} - p_{12}\Delta_{1,4} - p_{13}\Delta_{1,5}
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Jede dieser zwanzig Gleichungen gibt, wenn sowol links, wie auch rechts entwickelt wird, auf beiden Seiten eine ganze homogene Function vierten Grades in den a, deren einzelne Terme ganze Functionen der p_{ik} zu Coefficienten haben, und zwar muss offenbar der Coefficient irgend eines Termes links dem Werte nach gleich sein dem des nämlichen Termes rechts. Wir finden auf diese Weise für die Grössen p_{ik} eine beträchtliche Menge von Identitäten; die Rechnung, welche zu deren Aufstellung notwendig ist, ist nicht verschieden von der im vorigen Abschnitt zur Bestimmung der symmetr. Functionen durchgeführten, wie dies aus den nachstehenden Beispielen ersichtlich sein wird.

Wir stellen unsere Betrachtungen an der letzten dieser zwanzig Gleichungen an:

$$\Delta_{5,5} = \Delta_{1,1} - p_1\Delta_{1,2} - p_{11}\Delta_{1,3} - p_{12}\Delta_{1,4} - p_{13}\Delta_{1,5}$$

deren rechte Seite wir als Determinante fünften Grades schreiben können, die aus Δ hervorgeht, wenn darin die Elemente der ersten Zeile der Reihe nach ersetzt werden durch:

$$1, \quad -p_1, \quad -p_{11}, \quad -p_{12}, \quad -p_{13}$$

so dass wir also haben:

$$\Delta_{5,5} = \begin{vmatrix} a_0, & -p_5a_4, & -p_5a_3-p_{51}a_4, & -p_5a_2-p_{51}a_3-p_{52}a_4 \\ a_1, & a_0-p_4a_4, & -p_4a_3-p_{41}a_4, & -p_4a_2-p_{41}a_3-p_{42}a_4 \\ a_2, & a_1-p_3a_4, & a_0-p_3a_3-p_{31}a_4, & -p_3a_2-p_{31}a_3-p_{32}a_4 \\ a_3, & a_2-p_2a_4, & a_1-p_2a_3-p_{21}a_4, & a_0-p_2a_2-p_{21}a_3-p_{22}a_4 \end{vmatrix} = \Delta'$$

wobei (d. El. d. 5. Col. stehen unter denen d. 4ten)

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1, & -p_1, & -p_{11}, & -p_{12} & \\ & & & & -p_{13} \\ a_1, & a_0-p_4a_4, & -p_4a_3-p_{41}a_4, & -p_4a_2-p_{41}a_3-p_{42}a_4 & \\ & & & & -p_4a_1-p_{41}a_2-p_{42}a_3-p_{43}a_4 \\ a_2, & a_1-p_3a_4, & a_0-p_3a_3-p_{31}a_4, & -p_3a_2-p_{31}a_3-p_{32}a_4 & \\ & & & & -p_3a_1-p_{31}a_2-p_{32}a_3-p_{33}a_4 \\ a_3, & a_2-p_2a_4, & a_1-p_2a_3-p_{21}a_4, & a_0-p_2a_2-p_{21}a_3-p_{22}a_4 & \\ & & & & -p_2a_1-p_{21}a_2-p_{22}a_3-p_{23}a_4 \\ a_4, & a_3-p_1a_4, & a_2-p_1a_3-p_{11}a_4, & a_1-p_1a_2-p_{11}a_3-p_{12}a_4 & \\ & & & & a_0-p_1a_1-p_{11}a_2-p_{12}a_3-p_{13}a_4 \end{vmatrix}$$

Wir bestimmen nun der Reihe nach in der Entwicklung dieser beiden Determinanten die Coefficienten von $a_0^2a_1^2$, $a_0^2a_1a_2$, $a_0^2a_1a_3$ und $a_0^2a_1a_4$ und setzen hernach die für jeden dieser vier Terme gefundenen Coefficientenpaare einander gleich.

Es wird sich ergeben:

(5)

Coeff. v.:	in $\Delta_{5,5}$	in Δ'
$a_0^2a_1^2$	0	$p_2-p_1^2-p_{11}$
$a_0^2a_1a_2$	p_3	$p_{21}-p_1p_{11}+p_3-p_{12}+p_3-p_1p_{11}-p_{12}-p_1p_2$
$a_0^2a_1a_3$	$p_{31}+p_4$	$-p_{13}+p_{22}-p_1p_{12}+(p_1p_{21}-p_2p_{11})+p_{31}-p_{13}$ $-p_1p_{12}+p_4-p_1p_{21}-p_1p_3+p_4$
$a_0^2a_1a_4$	$p_{32}+p_{41}+p_5$	$p_{23}+p_2p_{12}+(p_1p_{22}-p_2p_{12})+p_2p_{11}+(p_1p_{31}-p_3p_{11})$ $+p_{32}+p_1p_4+p_2p_{12}-p_1p_{22}+p_3p_{11}-p_1p_{31}+p_{41}$

Die in dieser Aufschreibung herrschende Unübersichtlichkeit findet darin ihre Entschuldigung, dass die Grössen p so aufeinander folgen,

wie sie die systematisch durchgeführte Rechnung liefert. Es wurde z. B. bei Bestimmung des Coefficienten von $a_0^2 a_1 a_3$ in $\Delta' \ldots -p_{13}$ gefunden als Factor desjenigen Termes $a_0^2 a_1 a_3$, dessen a_0^2 herstammt aus dem Product zweier Elemente von Δ', deren eines in der zweiten und das andere in der dritten Colonne steht, nämlich aus dem Product von $(a_0 - p_4 a_4)(a_0 - p_3 a_3 - p_{31} a_4)$ und dessen a_1 und a_3 beziehungsweise sich aus den Gliedern $(a_1 - p_1 a_2 - p_{11} a_3 - p_{12} p_4)$ und a_3 der dritten und ersten Colonne von Δ' ergab, während $+p_{22}$ als Coefficient von $a_0^2 a_1 a_3$ in dem Determinantengliede

$$1 . (a_0 - p_4 a_4)(a_0 - p_3 a_3 - p_{31} a_4)(a_1 - p_1 a_2 - p_{11} a_3 - p_{12} a_4)(-p_2 a_1 - p_{21} a_2 - p_{22} a_3 - p_{23} a_4)$$

vorkommt. Die folgenden Grössen p und deren multiplicative Verbindungen sind dann der Reihe nach Coefficienten von Gliedern $a_0^2 a_1 a_3$, deren a_0^2 aus den Determinantenelementen $(a_0 - p_4 a_4)$ und $(a_0 - p_2 a_2 - p_{21} a_3 - p_{22} a_4)$, $(a_0 - p_4 a_4)$ und $(a_0 - p_1 a_1 - p_{11} a_2 - p_{12} a_3 - p_{13} a_4)$ etc. herrührt.

Reducirt man nun die Ausdrücke der obigen Tabelle für die Coefficienten in Δ' und setzt dann die Werte der entsprechenden Coefficientenpaare einander gleich, so erhält man endlich:

$$p_2 = p_1^2 + p_{11}, \quad p_3 = p_1 p_2 + 2p_1 p_{11} + 2p_{12} - p_{21}, \tag{6}$$
$$p_4 = p_1 p_3 + p_2 p_{11} + 2p_1 p_{12} + 2p_{13} - p_{22}, \; p_5 = p_1 p_4 + p_3 p_{11} + p_2 p_{12} + p_{23}$$

Es ist klar, dass sich weit weniger einfache Identitäten ergeben haben würden, wenn wir die Coefficienten von Gliedern verglichen hätten, in welchen a_3 und a_4 zusammen im dritten oder vierten Grade vorkommen, also beispielsweise von $a_3^2 a_4^2$, $a_1 a_3^3$, $a_3 a_4^3$ etc. Aber auch in diesen Fällen kann man, allerdings nur in unentwickelter Form, d. h. mit nicht ausgerechneten Determinanten, jene Identitäten ebenso leicht darstellen.

Zum Schlusse verdient noch erwähnt zu werden, dass es auch vorkommt, dass der Coefficient irgend eines Termes in der Entwicklung der linken Seite einer der zwanzig Gleichungen (4) nicht nur dem Werte nach, sondern auch der Form nach übereinstimmt mit dem Coefficienten des analogen Terms der Entwicklung rechts. So ist z. B. der Coefficient von $a_0^3 a_3$ in $\Delta_{5,5}$: $-p_{21} - p_3$ und in Δ': $-p_{12} - p_{21} - p_3 + p_{12}$, also auch gleich $-p_{21} - p_3$.

Was endlich die Determinante der Subdeterminanten von Δ betrifft, so gilt bezüglich derselben offenbar wiederum, dass sie gleichartig ist mit jener Determinante, in welche Δ übergeht, wenn darin jedes a_i durch $\Delta_{1,i+1}$ ersetzt wird.

Wien, im October 1890.

XXIII.

Miscellen.

1.

Dreiteilung jedes beliebigen Winkels mittelst einer festen Hyperbel.
(Fortsetzung).

Vorbemerkung. Dass die Hyperbel, deren lineare Excentricität gleich der doppelten Hauptachse ist, bereits früher (1877) zur Dreiteilung jedes beliebigen Winkels benutzt worden ist, war dem Verfasser bei der Veröffentlichung des ersten Teiles seiner Abhandlung leider nicht bekannt. Er ist daher erst jetzt nach weiteren Studien in der Litteratur über das Trisectionsproblem in der Lage, auf zwei Schriften hinzuweisen, welche fast gleichzeitig erschienen sind, und in welchen die erste der von ihm angegebenen Constructionen bereits veröffentlicht worden ist, nämlich auf: „Günther, Winkelteilung, speciell Trisection“ im Programm der höheren Bürgerschule zu Delitzsch 1877, und auf „Garbieri, Trisezione dell' angolo. Battaglini. G. XV. pag. 111—112. Januar 1877.“ Der Verfasser wird an anderer Stelle [1]) die Gelegenheit ergreifen, ausführlicher auf diese Schriften einzugehen; hier hält er nur die Angabe derselben für notwendig, im übrigen den Hinweis auf die eigenartige Entwicklung seines Gedankenganges, sowie auf die weiteren Erörterungen im ersten Teile seiner Abhandlung für ausreichend zur Berechtigung, eine Fortsetzung derselben folgen zu lassen.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine weitere Construction für die Dreiteilung des Winkels α mittelst derselben Hyperbel kurz besprochen, da sie nicht minder einfach ist als die bisherigen und in keiner der genannten Abhandlungen angegeben ist, obwol sie auch aus „Günther's Winkelteilung etc.“ hergeleitet werden kann.

---

[1]) In einer Abhandlung: „Ueber die Lösungen des Trisectionsproblems mittelst fester Kegelschnitte“ im nächsten Osterprogramm des Falkrealgymnasiums zu Berlin.

Beschreibt man nämlich um das Dreieck BMC (Figur I) den Kreis, dessen Mittelpunkt N heisse, und dessen Centriwinkel BNC daher gleich 2α ist, so wird auch dieser Kreis nach Anmerkung 1. im Teil I. durch dieselbe Hyperbel ausser in C in den drei Punkten T_1, T_2 und T_3 derartig geschnitten, dass Winkel

$$BNT_1 = \frac{2\alpha}{3}$$

Winkel

$$BNT_2 = 120^0 - \frac{2\alpha}{3}$$

und Winkel

$$BNT_3 = 120^0 + \frac{2\alpha}{3}$$

ist. Der Peripheriewinkel BMT_1, welcher mit dem zuerst genannten Winkel BNT_1 auf gleichem Bogen steht, ist daher gleich $\frac{\alpha}{3}$; da aber nach Beweis 1. (Teil I.) der Winkel BMP_1 auch gleich $\frac{\alpha}{3}$ ist, so ergiebt sich, dass der Punkt P_1 auf der Geraden MT_1 liegen muss. Andererseits ist der Peripheriewinkel CBP_1 (auf dem Bogen CP_1 des Kreises um M) gleich $\frac{\alpha}{3}$ und der Peripheriewinkel CBT_1 (auf dem Bogen CT_1 des Kreises um N) gleich $\frac{2\alpha}{3}$, daher ist auch Winkel T_1BP_1 gleich $\frac{\alpha}{3}$. Legt man nunmehr an den Kreis um N im Punkte B die Tangente BJ, so wird der hierdurch entstandene Winkel CBJ, welcher als Sehnen- und Tangentenwinkel gleich α ist, durch die Geraden BT_1 und BP_1 trisecirt. In entsprechender Weise lässt sich zeigen, dass der Punkt P_3 auf der Geraden MT_2, der Punkt P_2 auf der Geraden MT_3 liegen muss, und dass BT_2 und BP_3 die Trisectionslinien des concaven Winkels $CBK(180^0 - \alpha)$, BT_3 und BP_2 die Trisectionslinien des convexen Winkels $CBK(180^0 + \alpha)$ sind.

Hat man daher die Hyperbel, deren lineare Excentricität gleich der doppelten Hauptachse ist, für eine beliebige Strecke BC in der früher angegebenen Weise einmal construirt, so braucht man nur den zu trisecirenden Winkel α an CB im Punkte B anzutragen, auf dem Schenkel BJ in B das Lot zu errichten und um den Schnittpunkt N desselben mit dem Mittellote der Strecke BC einen Kreis mit dem Radius NB zu schlagen, um sofort die Punkte T_1, T_2 und T_3 zu erhalten. (Fortsetzung später.)

W. Panzerbieter.

2.

Ueber die sphärische Darstellung der asymptotischen Linien einer Fläche.

Die asymptotischen Linien haben mit den Krümmungslinien die Eigenschaft gemein, dass, wenn man sie als Parameterlinien annimmt, die Fundamentalgrössen 1. Ordnung den entsprechenden auf der Kugelfläche vom Radius 1 bei unveränderter Normalenrichtung nach absolutem Werte proportional sind. Ist das Quadrat des Linienelements auf der Urfläche

$$\partial s^2 = e\partial u^2 + 2f\partial u\partial v + g\partial v^2$$

und bezeichnet der Index 1 die Beziehung auf die Kugelfläche, ist also

$$\partial s_1^2 = e_1\partial u^2 + 2f_1\partial u\partial v + g_1\partial v^2$$

so hat man für asymptotische Parameter:

$$e_1 = \frac{F}{t^2}e; \quad f_1 = -\frac{F}{t^2}f; \quad g_1 = \frac{F}{t^2}g$$

Hier ist

$$t^2 = eg - f^2; \quad t_1^2 = e_1 g_1 - f_1^2 = \frac{F^2}{t^4}t^2 = \frac{F^2}{t^2}$$

und es seien p, q, r die Richtungscosinus der Normale, mithin auch die dem Punkte (xyz) der Urfläche entsprechenden Coordinaten auf der Kugelfläche, ferner

$$E = p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \ldots; \quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \ldots; \quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \ldots$$

wo für asymptotische Parameter

$$E = 0; \quad G = 0 \tag{1}$$

ist.

Indem wir einer Untersuchung von C. Guichard in Ann. de l'École Normale VI. 333 folgen, wollen wir die Bedingung herleiten, unter der einem Liniensysteme auf der genannten Kugel ein asymptotisches Liniensystem auf der Urfläche entspricht. Zufolge Gl. (1) hat man:

$$\left.\begin{array}{ll} p\frac{\partial x}{\partial u} + \ldots = 0 & p\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \ldots = 0 & \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = -F \\ \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \ldots = -F & \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + \ldots = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Definirt man das Vorzeichen von t_1 durch die Gleichungen

$$pt_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

so wird die gemeinsame Coefficientendeterminante beider Gleichungssysteme $= t_1$, und ihre Auflösung ergibt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{F}{t_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & q \\ \frac{\partial r}{\partial u} & r \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F}{t_1} \begin{vmatrix} q & \frac{\partial q}{\partial v} \\ r & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{3}$$

In diesen Ausdrücken ist F die einzige Grösse, welche durch das sphärische Liniensystem nicht bestimmt wird. Es entsteht nun die Frage, ob unbedingt oder unter welcher Bedingung durch Bestimmung von F die Forderung erfüllt werden kann, dass die Grösse

$$\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial v}\partial v = \partial x \tag{4}$$

und ihre Analogen Differentiale werden.

Sei

$$\frac{F}{t_1} = e^{\lambda}; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u\, \partial v} = M\frac{\partial p}{\partial u} + N\frac{\partial p}{\partial v} + Pp \tag{5}$$

letzte Gleichung noch gültig nach Substitution von q und r für p. Eliminirt man x durch Differentiation zwischen den Gl. (3), so kommt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v}\begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & q \\ \frac{\partial r}{\partial u} & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M\frac{\partial q}{\partial u} + N\frac{\partial q}{\partial v} & q \\ M\frac{\partial r}{\partial u} + N\frac{\partial r}{\partial v} & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\begin{vmatrix} q & \frac{\partial q}{\partial v} \\ r & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q & M\frac{\partial q}{\partial u} + N\frac{\partial q}{\partial v} \\ r & M\frac{\partial r}{\partial u} + N\frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & \frac{\partial q}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial u} & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{6}$$

oder:

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} + 2M\right)\begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u} & q \\ \frac{\partial r}{\partial u} & r \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + 2N\right)\begin{vmatrix} q & \frac{\partial q}{\partial v} \\ r & \frac{\partial r}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Multiplicirt man die Gleichung erst mit $\frac{\partial p}{\partial v}$, dann mit $\frac{\partial p}{\partial u}$, so gibt bzhw. die Summe der drei analogen:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} + 2M = 0; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} + 2N = 0 \tag{8}$$

Diese 2 Gleichungen können durch λ, also durch F immer und nur erfüllt werden, wenn

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial v} \tag{9}$$

ist. Sie geben dann:

$$\lambda = -2\int (N\partial u + M\partial v) \tag{10}$$

Hat man nun auf der Kugel vom Radius 1 zwei Scharen von Linien, für welche Gl. (9) gilt, und bestimmt den Wert von λ gemäss Gl. (10), welcher einen willkürlichen constanten Addenden, entsprechend einem willkürlichen constanten Factor von F, enthält, so ist Gl. (4) erfüllt, und jede von beiden Seiten von Gl. (6) drückt nach Multiplication mit e^λ den Wert von $\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$ aus. Die ersten Integrale davon sind durch die Werte (3) bekannt. Um jenem Werte zu entsprechen, würde jedes dieser Integrale einen willkürlichen constanten Addenden zulassen. Damit aber $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ auch den Gl. (2) genügen, müssten die Normalen einer festen Fläche parallel sein. Abgesehen von cylindrischen Flächen sind also den Werten (2) keine Constanten hinzuzufügen.

Aus den Werten (3) ergibt sich:

$$x = a\int e^\lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial u}\partial u - \frac{\partial q}{\partial v}\partial v & q \\ \frac{\partial r}{\partial u}\partial u - \frac{\partial r}{\partial v}\partial v & r \end{vmatrix} + c \tag{11}$$

und die analogen Werte für y und z als Gleichungen der allgemeinsten Fläche von der gegebenen sphärischen Darstellung. Alle darin begriffenen Flächen sind einander ähnlich und von gleicher Stellung im Raume. Ihre Dimensionen sind vermöge der gemeinsamen Constanten a willkürlich; die 3 Constanten c lassen beliebige Parallelverschiebung zu.

Zur Bestimmung von M, N, P multiplicire man die 2te Gl. (5) einzeln mit $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial p}{\partial v}$, p; dann gibt bzhw. die Summe der Analogen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial e_1}{\partial v} = Me_1 + Nf_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial g_1}{\partial u} = Mf_1 + Ng_1; \quad -f_1 = P$$

woraus:

$$M = \frac{1}{2t_1}\left(g_1 \frac{\partial e_1}{\partial v} - f_1 \frac{\partial g_1}{\partial u}\right); \quad N = \frac{1}{2t_1}\left(e_1 \frac{\partial g_1}{\partial u} - f_1 \frac{\partial e_1}{\partial v}\right) \tag{12}$$

Die vorstehenden Resultate sind sämtlich in der Arbeit von Guichard schon enthalten. Die Herleitung unterscheidet sich dadurch, dass sie direct auf das von ihm bezeichnete Ziel ausgeht, während die seinige, obgleich sie über unausgesprochene Zwischenglieder der Deduction öfters schnell hinweggeht, doch infolge von Umwegen, die kaum motivirt scheinen möchten, sich mehr in die Länge zieht. Namentlich ist nicht zu ersehen, wozu die im Anfang entwickelte Formel, die, wenn man für die Zeichen ihre Werte setzt, nichts weiter gibt als den Gauss'schen Ausdruck der Flächenkrümmung durch Fundamentalgrössen 1. Ordnung, daher hier, wo sie auf die Kugel angewandt wird, nur sagt, dass die Krümmung constant ist, dienen kann. Dies bewog mich seine höchst interessante Entdeckung in einfachstem natürlichem Zusammenhang darzustellen, indem ich unmittelbar die Coordinaten der Fläche in sphärischen Elementen ausgedrückt einführte, während Guichard nur mit sphärischen Coordinaten rechnet und deren Bedeutung für die Fläche erst vermittelt durch die Grundrelationen gewinnt.

Es liegt nun die Frage nahe, ob auf Grund der Bedingung (9) es möglich ist das Gebiet derjenigen Flächen, deren asymptotische Linien man kennt, zu erweitern. Der Weg ist natürlich ein sehr weiter. Die allgemeine Integration der Gl (9) nach Einführung der Werte (12) zeigt sich viel schwieriger als die, welche die Berechnung der asymptotischen Linien selbst verlangt. Specielle Lösungen fand ich zwar manche, doch ergaben sich daraus stets Flächen innerhalb des genannten Gebietes. Um also brauchbare Lösungen zu finden, würde man erst sämtliche Normalensysteme innerhalb des Gebietes aufzustellen, und dann nur ausserhalb desselben Versuche zu machen haben. R. Hoppe.

3.

Construction von Tangenten an einige höhere Curven mittelst Kegelschnitte.

Bei einigen höheren Curven, deren Erzeugungsweise ein Kreis zu Grunde liegt, kann die Construction der Tangente in einem ge-

gebenen Punkte auf die Zeichnung einer Kegelschnittstangente zurückgeführt werden, wenn dieselbe Erzeugungsweise auf eine Gerade statt auf den Kreis angewendet auf einen Kegelschnitt führt, wie im folgenden an der Strophoide gezeigt werden soll.

Die Strophoide, eine Curve dritter Ordnung, hat bekanntlich folgendes Bildungsgesetz: Ist AB der auf der Tangente T des Kreises K (siehe die Fig.) senkrecht stehende Durchmesser, und zieht man durch A einen beliebigen Strahl, der T in D und K in C trifft, und macht man $CP = CD$, so ist P ein Punkt der Strophoide.

Zieht man durch A unter einem unendlich kleinen Winkel zu AD einen neuen Strahl, der T in D', K in C' schneidet, und macht man $C'P' = C'D'$, so ist die Verbindungslinie PP' die Tangente t in P an die Strophoide. Des unendlich kleinen Winkels DAD' wegen, liegt aber C' als unendlich nahe zu C auch auf der Kreistangente L des Punktes C, es sind also PP' auch Punkte jener Hyperbel, die entsteht, wenn die Strophoidenconstruction statt mittelst A, K und T mit A, L und T durchgeführt wird. Strophoide und Hyperbel haben also in P dieselbe Tangente.

Zur Erkenntniss der Hyperbel bedarf man des Hilfssatzes: „Sind zwei feste Strahlen OA und OB gegeben, und bestimmt man zu einem durch O gezogenen variirenden Strahl OC einen vierten Strahl OC' so, dass OC' und OA von OC und OB harmonisch getrennt werden, so bilden OC und OC' zwei concentrische, projectivische Strahlenbüschel mit den Doppelstrahlen OA und OB."

Beweis. Macht man auf OA die Strecken OP und PQ einander gleich, zieht man durch Q eine Parallele zu OC, die OB in 1 schneidet, verbindet man ferner 1 mit P, wodurch man auf OC den Schnittpunkt 2 erhält, so ist P die Mitte von 12 und demnach die durch O zu 12 gezogene Parallele OC' der vierte harmonische Strahl zu OA in Bezug auf OC und OB.

Nimmt man daher auf OB einen beliebigen Punkt x an, und zieht man durch O Parallele zu den Verbindungslinien Px und Qx, so erhält man wieder 2 neue Strahlen OD und OD' von obiger Beschaffenheit. Nun ist Strahlenbüschel $P(1x\ldots)\,\overline{\wedge}\,Q(1x\ldots)$ weil perspectivisch, und daher auch die zu ihnen congruenten Strahlenbüschel $O(C'D'\ldots)$ und $O(CD\ldots)$ projectivisch. Kommt x nach O, so fallen die homologen Strahlen mit OA, fällt x in's Unendliche, mit OB zusammen.

Verbindet man in d. Fig. O mit P, und zieht man durch O eine Parallele OE zu AD, so sind die letztere, OP, OC und OD vier

harmonische Strahlen, denn sie projiciren die Endpunkte P und D, den Mittelpunkt C und den unendlich fernen Punkt einer Strecke. Variirt AD und hiemit auch OE, so ist nach dem Hilfssatze das Strahlenbüschel $O(E \ldots)$ projectivisch $O(P \ldots)$, und demnach auch das zu ersterem congruente Büschel $A(D \ldots)$. Das Erzeugniss von $A(D \ldots)$ und $O(P \ldots)$ d. i. der Ort des Punktes P ist demnach ein Kegelschnitt, und zwar eine Hyperbel mit den Asymptotenrichtungen T und L, wie man leicht erkennt. Da die Hyperbel ausserdem durch die Punkte A, P und O geht, so ist sie hinreichend bestimmt, und es kann ihre Tangente t in P, die zugleich Strophoidentangente ist, mittelst des Pascal'schen Satzes, wie es auch in der Figur der Fall ist, und worauf sich die Numerirung 1 bis 6 bezieht, gezeichnet werden.

Bei der Cissoide ist der zu benutzende Kegelschnitt auch eine Hyperbel, beim folium cartesii eine Parabel.

Wien, November 1890.

Wilhelm Rulf.

INHALT.

Seite

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

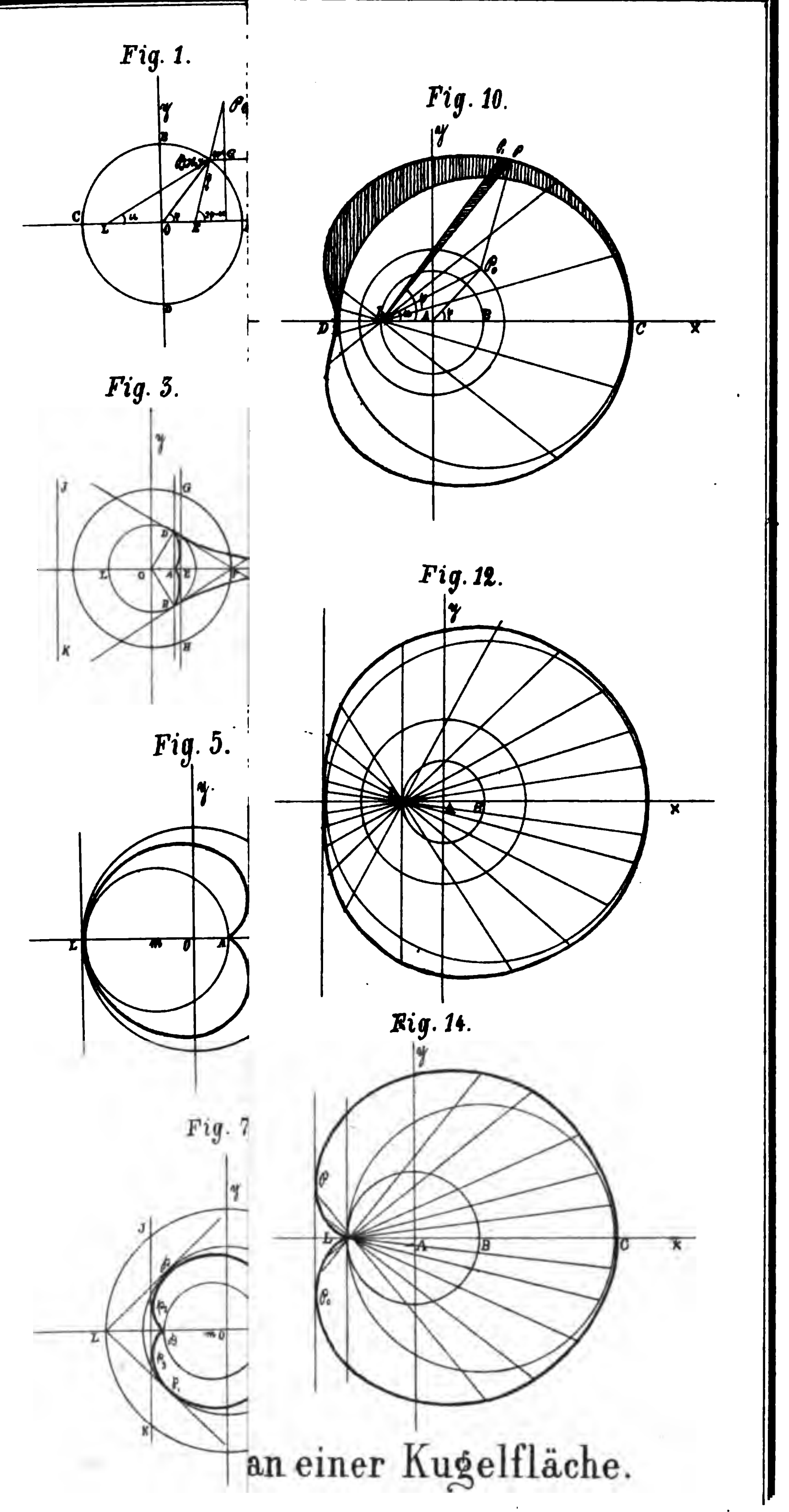
Fig. 1.

Fig. 4.

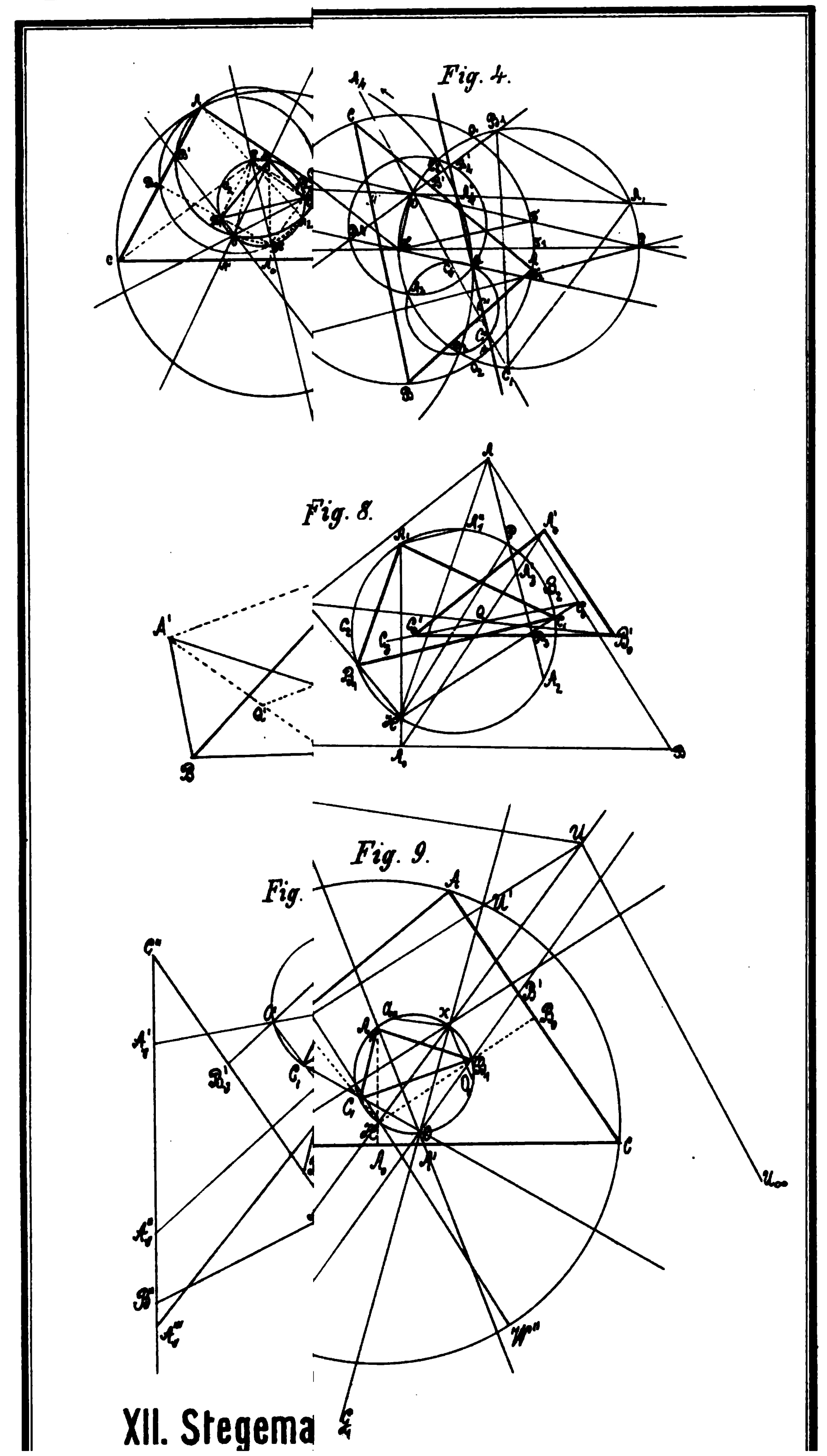
Fig. 3.

Fig. 6.

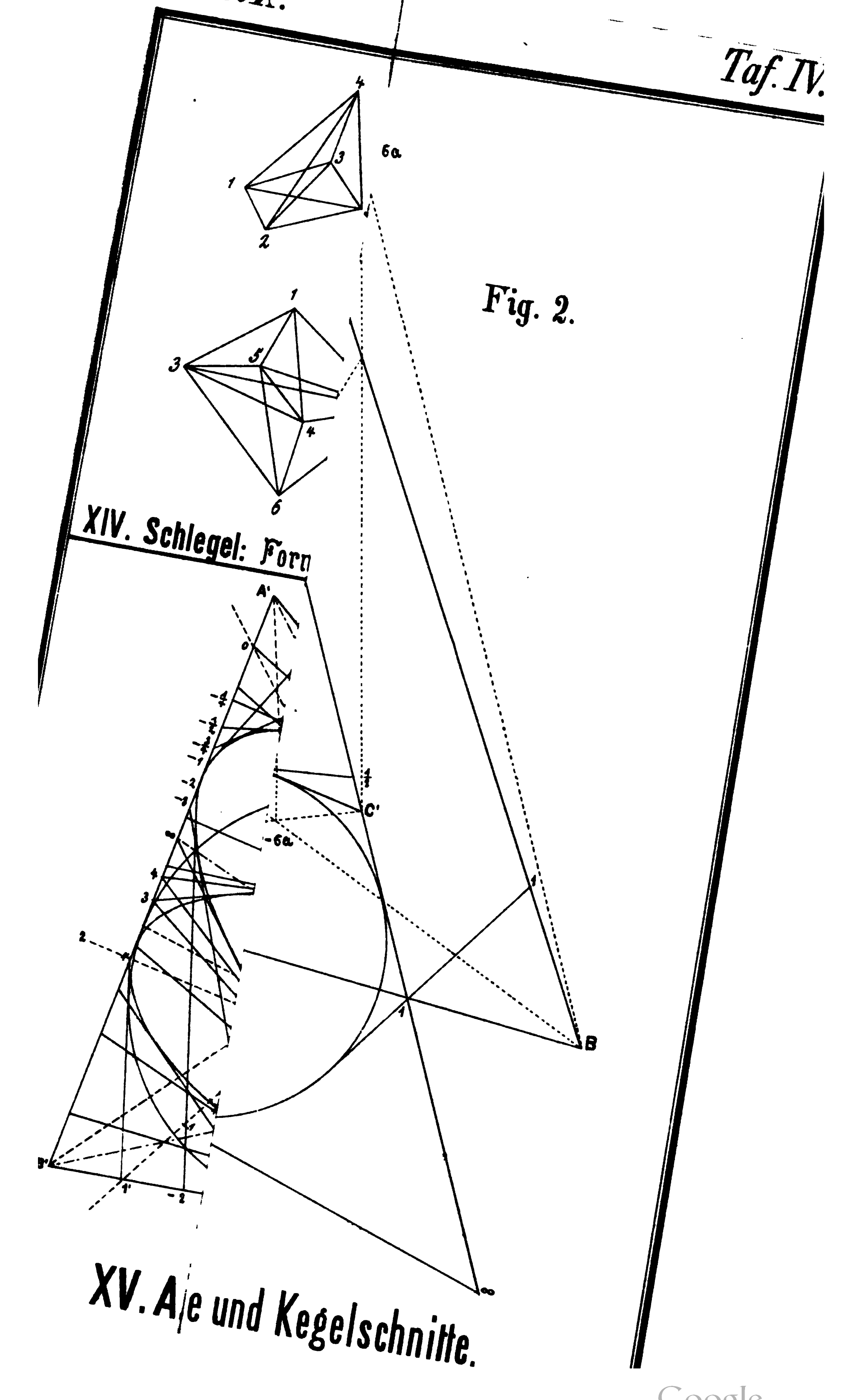
III. Thallmayer: Zur Berechnung von Wurzelgrössen.



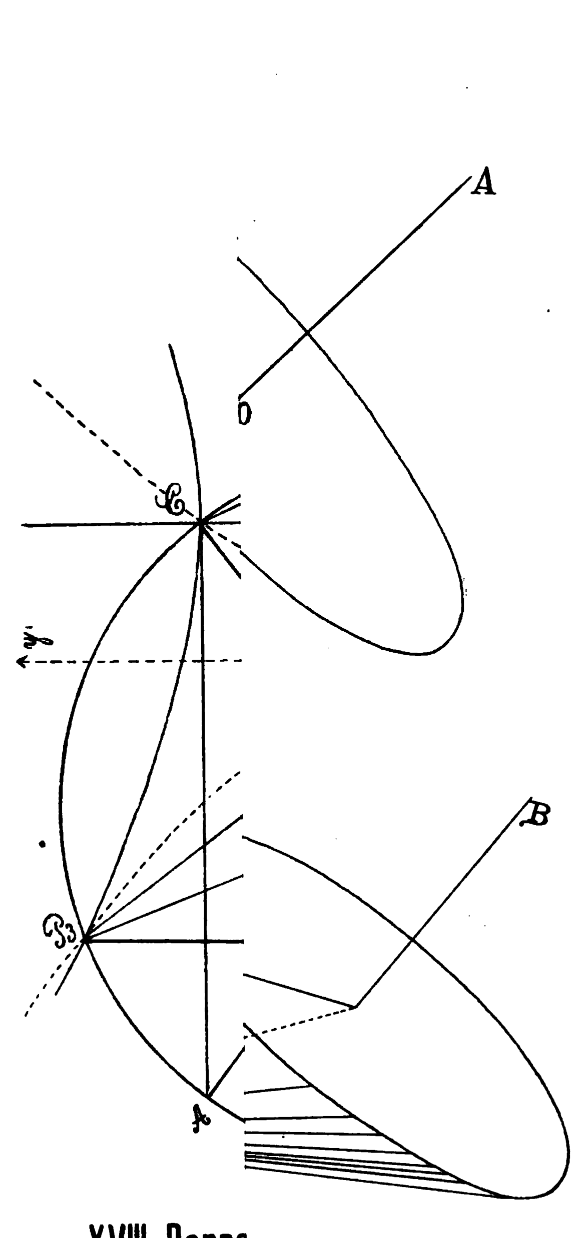
an einer Kugelfläche.



XII. Stegema

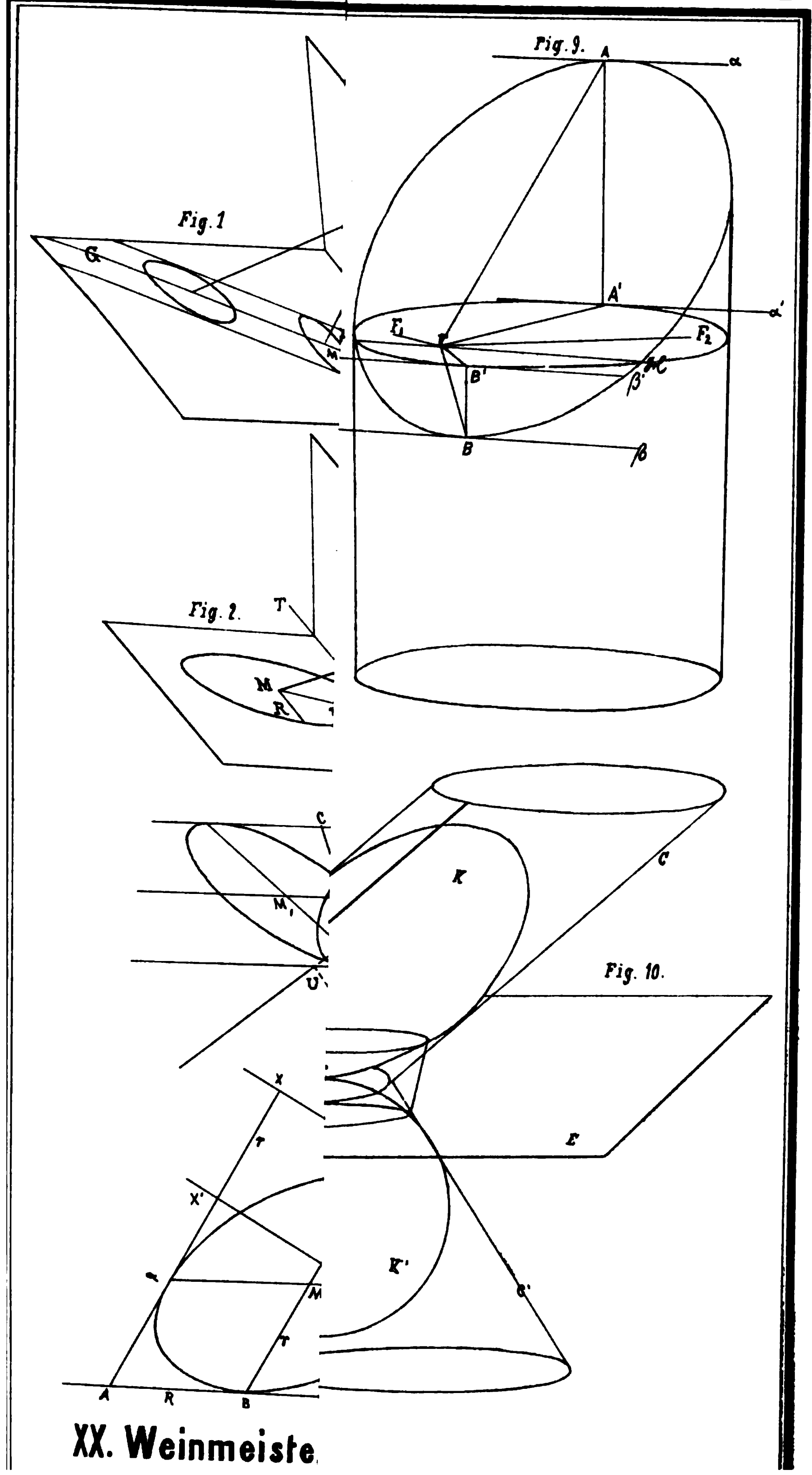


Taf. IV.
Fig. 2.
XIV. Schlegel: Forn
XV. A e und Kegelschnitte.



XVIII. Panze

ginäre Punkte im Raume.



XX. Weinmeiste



Fig. 1.

A_1 E A_2' M B_1 A_2

$\mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{K}_1$ $\mathfrak{K}_3$

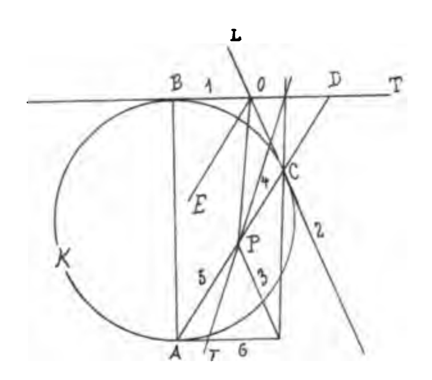
Fig. 5.

$\mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{D}$

XXI. Jettmar:

Fig. 1.

XXIII. Panzerbieter: Dreiteilung des Winkels.



XXIII. Rulf: Construction von Tangenten.

Litterarischer Bericht
XXXVII.

Lehrbücher.

Die Arithmetik auf dem Gymnasium, Praktisches Regel- und Lehrbuch für Gymnasien und verwandte Anstalten, sowie zum Selbstunterricht zusammengestellt von Konrektor H. Raydt, Oberlehrer an der Gelehrtenschule zu Ratzeburg. Hannover-Linden 1890. Carl Manz. 174 S.

Das Buch ist zur Repetition bestimmt. Der Schüler soll darin, was er vergessen hat, durch Nachschlagen ohne Mühe wiederfinden. Es beschränkt sich jedoch nicht auf Resultate, sondern berücksichtigt alle Elemente der Doctrin, Erklärungen, Einführungen, Regeln, Sätze, Beweise, ganz besonders erschöpfend und ins einzelne gehend bei den Anfangsgründen, selbst bei solchen, die eigentlich nicht vergessen werden können, wenn der Unterricht nicht vergeblich war. Somit gibt es, wenn auch der besondere Charakter des Vorliegenden sehr merklich ist, nicht wol ein andres allgemeines unterscheidendes Merkmal, als dass die systematische Anordnung ausschliesslich obwaltet. Was diese betrifft, ist es eigentümlich, dass der Verfasser die „allgemeine Arithmetik" mit der Einführung der negativen Zahlen beginnen lässt. Auf die Erweiterung des Zahlbegriffs kann sich der Name nicht beziehen; denn diese hat schon vorher durch Einführung der Brüche begonnen und wird auch mit dieser neuen Einführung nicht abgeschlossen. Die Bezeichnung dieses und der folgenden Teile der Doctrin als allgemeine Arithmetik sagt also gar nichts. Wollte der Verfasser an dieser Stelle einen neuen Hauptabschnitt ausdrücken, so war wenigstens ein Titel zu verwerfen, der in anderm

Sinne in Gebrauch ist. Er räumt im Vorwort ein, dass sich in den Regeln einiges findet, was vom streng wissenschaftlichem Standpunkte aus anfechtbar ist. Auf solche Regeln wollen wir nicht eingehen, sondern nur eine Erklärung anführen, die selbst vom niedrigsten Standpunkte des Anfängers aus als fehlerhaft erscheinen muss. Auf Seite 13 steht: „Eine algebraische Zahlengrösse nennt man auch ein Monom." Hieruach würde offenbar auch $a+b$ ein Monom sein. Da weiterhin folgt: „Monome zusammengefasst nennt man auch ein Binom" — so kann man kaum umhin zu glauben, der Verfasser hielte wirklich $a+b$ für 2 Grössen. Aehnliche Unklarheiten, wie in dieser Stelle, die leicht genug zu berichtigen ist, sind dem Ref. im Buche nicht aufgefallen. Hoppe.

Die Grundlagen der Arithmetik unter Einführung formaler Zahlbegriffe, dargelegt von Dr. Otto Reichel, Hülfsbuch für den Unterricht. Teil II. Die irrationalen Zahlen. Berlin 1890. Haude und Spener. 43 S.

Teil I. ist im 18. litt. Bericht S. 13 (und im 25. l. B. S. 6) besprochen. Der vorliegende 2. Teil behandelt noch nicht, wie angekündigt war, die imaginären Zahlen. In der Tat ist die Erweiterung des Zahlbegriffs durch Einführung der Irrationalen schon an sich ein so grosser Schritt, dass es sich empfahl zunächst bei diesem stehen zu bleiben. Die allgemeinen Normen sind dieselben, wie sie im 1. Teile dargelegt sind: die formellen Zahlen sind nicht als existirend nachzuweisende, sondern Zeichen, mit denen man so rechnen kann wie mit natürlichen Zahlen, und die sich durch Erfüllung der sie bestimmenden Bedingungen rechtfertigen; die wissenschaftlichen Forderungen müssen mit denen der Schule vereint zur Erfüllung gebracht werden. Letzteres ist bei den Irrationalen augenscheinlich schwieriger als bei den Negativen und Brüchen. Der Verfasser erklärt es für möglich, wenn man von zwei Begriffen, denen der Function und der Grenze, Gebrauch macht, und beruft sich zum Nachweis der Berechtigung auf mehrere Lehrbücher, die an das Verständniss der Schüler diese und noch höhere Ansprüche gemacht haben. Zur Ergänzung dieser Angaben, denen noch die Behauptung beigefügt ist, dass nur Functionen eines Arguments vorkämen, müssen wir noch einige charakterisirende Punkte der gegenwärtigen Bearbeitung nennen. Die gebrochene Zahl wird nur in Form eines Decimalbruchs zur Theorie der Irrationalen verwandt. Unendlich kleine Zahlen kommen öfters vor; doch wird der Name „unendlich klein" nie ausgesprochen, sondern stets durch die Bedingungen ersetzt, welche die Eigenschaft begründen. In Betreff der genannten

5 Punkte ist folgendes zu erinnern. Der Begriff des Grenzwerts ist, wenigstens nach heutigem Standpunkt zu urteilen, allerdings unentbehrlich zur Begründung des Begriffs der Irrationalzahl, nicht aber der Begriff der Function. Zu der irrigen Meinung, dass letzterer nötig sei, hat nur das eingewurzelte Vorurteil verführt, eine unendliche Annäherung sei nur als eine Reihe von Näherungen verständlich. Hierbei wird ein allgemein logischer Satz, der in der Geometrie als selbstverständlich gilt und überall in Anwendung kommt, vergessen: Was am speciellen Gegenstande bewiesen ist, gilt allgemein, wenn seine Besonderheiten zum Beweise nichts beitragen. Jede Figur zum Beweise gezeichnet ist eine specielle, aber ihre Specialitäten tun der Allgemeinheit des Satzes keinen Eintrag, weil der Beweis nicht davon abhängt. Die unbegrenzte Teilbarkeit der Strecken wird durch Teilung einer Strecke dargetan, eine Succession von Verkleinerungen macht sie nicht evidenter. Der Gedanke, dass es in der Arithmetik ebenso sein könnte, scheint vielen Didaktikern fremd geblieben zu sein. Statt eine unendliche Annäherung an einen Grenzwert durch eine einzige Ungleichung auszudrücken, wenden sie Reihen von Näherungswerten an, ohne zu bemerken, dass jeder folgende nicht mehr sagt als der erste. Sollte man die Vorführung von Näherungsreihen damit verteidigen wollen, dass sie eine Anschauung von der Näherung gebe, so brauchen wir nicht auf die Illusionen einzugehen, die mit einer solchen Anschauung verknüpft zu sein pflegen, sondern nur auf das Gesamtziel der Erklärung hinzuweisen. Das ganze Gebiet der reellen Zahl muss in einer Grössenfolge gedacht werden, in welche sich die hinzukommenden formellen Zahlen an bestimmter Stelle einfügen. Soll sich nun mit dem Begriffe jeder Irrationalzahl die Vorstellung einer unendlichen Reihe verbinden, so heisst das, vom Schüler verlangen, dass er sich die Vorstellung unendlich vieler durch einander hindurch gehender unendlicher Reihen bildet. Statt eine orientirende Anschauung zu geben hat die herbeigezogene Reihenvorstellung alle Orientirung ausgetilgt. Ist hiernach der Umweg, auf dem der Begriff des Grenzwerts im Vorliegenden entwickelt wird, in jeder Beziehung zu verwerfen, so hat die Zuhülfenahme des Functionsbegriffs und die Darstellung der Rationalzahl als Decimalbruch keinen Zweck. Den Functionsbegriff, der wesentlich der höhern Analysis angehört, in die Elementarmathematik herübernehmen, ist ein unordentliches Vorgehen, welches die Ungründlichkeit und Halbbildung zur Folge hat. Decimalbrüche mag man anwenden, wo es der Rechnung dienlich ist. Die Begriffserklärung aber darf nicht auf eine solche Specialität gebaut sein, weil die Einmischnng besonderer Eigenschaften den Kern der Sache der Beachtung entzieht. In der Tat findet sich die vorliegende Darstellung zur Entfaltung mancher Eigenschaften der Decimalbrüche

genötigt; dadurch wird die Erklärung der Irrationalzahl unnötig in die Länge gezogen und der Eindruck hervorgerufen, als wenn es sich um eine ziemlich verwickelte Sache handle, während doch ein grosser Teil der langen Auseinandersetzung sich im Grunde nur mit beispielsweise zugezogenen Elementen befasst. Da, infolge des leicht zu beweisenden Satzes: Zwischen je 2 Zahlen gibt es rationale Brüche — keine Menge von Brüchen, sondern ausser 2 Zahlen, die rationale oder formelle sein können, nur ein Bruch nötig ist, um die Beziehung des Grenzwerts zur Variabeln darzustellen, so hat der Decimalbruch nicht den geringsten Vorzug vor dem gemeinen Bruche, ist dagegen bedeutend complicirter für die Auffassung, weil in ihm viele Ziffern variiren, im gemeinen Bruche nur 2 ganze Zahlen zu denken sind.

Dass der Verfasser in einer Darlegung, wo es sich im Grunde beständig um unendlich kleine Grössen handelt, das kurze Wort dafür den Schülern vorenthält und sich mit Umschreibung begnügt, kann sicher der Deutlichkeit nicht förderlich sein und das Verständniss erleichtern. Sollte er das Wort gemieden haben, weil es misbräuchlich bekannt wäre, so ist zu entgegnen: wir können den Misbrauch ignoriren oder berichtigen, aber auf keinen Fall darf er unsere Entschliessungen bestimmen. Es gibt keinen verschiedenen mathematischen Sinn des Unendlichen, sondern nur einen einfachen und elementaren; neben diesem ist vielerlei Unsinn zu Zeiten aufgetreten, der aber nicht elementar noch einfach ist, uns also nicht zu bekümmern braucht.

Nachdem die, teils wirklich, teils vermeintlich notwendigen Begriffe und Lehrsätze festgestellt und auf die im 1. Teile behandelten Grundoperationen im erweiterten Sinne angewandt sind, wird die Theorie der Potenz und ihrer 2 Inversen entwickelt. Sehen wir das Ganze als ersten Versuch an im Punkte des Rechnens mit Irrationalzahlen die Pflicht des mathematischen Unterrichts zu erfüllen und die strenge Bündigkeit der Darlegung zum Bewusstsein zu bringen, so ist nicht nur das rühmliche Vorgehen gegenüber traditionellem Verfahren anzuerkennen, sondern auch zu erklären, dass die zu berücksichtigenden Fragen richtig erfasst worden sind, wenn gleich die Wege zu deren Lösung von den erreichbar einfachsten und leichtfasslichsten noch weit entfernt bleiben. Dieser zeitweilige Mangel musste hervorgehoben werden, um zu verhüten, dass, wenn nach gegenwärtiger Darstellung der Lehrgegenstand zu schwierig für die Schule scheinen sollte, der Plan einer gründlichen Behandlung der Irrationalzahl für die Schule überhaupt als aussichtslos der Verwerfung preisgegeben wäre.

Hoppe.

Die Hauptlehren der Mathematik mit einer Sammlung ausführlich gelöster und Anhängen ungelöster Aufgaben mit ihren Resultaten. Zum allgemeinen Gebrauch für Schüler, Studierende, Lehrer, Militärs, Techniker jeder Art etc. mit besonderer Berücksichtigung der Staatsexamina und des praktisch' Notwendigen bearbeitet von Albert Reich. Hanau 1889. A. Reich.

Dem vorausgeschickten Verzeichnisse nach enthält das Ganze 8 Hefte betitelt: Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie, ebene und sphärische Trigonometrie, algebraische Analysis, „analytische Geometrie" der Ebene und des Raumes, Differentialrechnung und Integralrechnung als 1. Teil und 8 einzeln zugehörige Hefte mit Aufgaben über dieselben Gegenstände als 2. Teil. Das 6. Heft, welches Coordinatenlehre mit Anwendung auf Linien und Flächen 2. Grades in synthetischer Darstellung vorträgt, verrät durch seine Benennung, dass der Verfasser nicht die geringste Kenntniss von der analytischen Geometrie hat; denn diese fehlt gänzlich und wird doch als Titel mit aufgeführt. Die Bearbeitung ist mehr einer Encyklopädie als einem Lehrbuche entsprechend; sie gibt leicht fassliche, concinne und meist richtige Auskunft über jeden Gegenstand und eignet sich, soweit bis jetzt die Lieferungen vorliegen (der 1. Teil ist noch nicht vollendet, die Aufgaben sind noch zu erwarten), besonders dazu, correcte, befriedigende Antworten für Examina an die Hand zu geben. Hoppe.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik für höhere Unterrichtsanstalten. Von Prof. Dr. H. Lorberg, Oberlehrer am Lyceum zu Strassburg. Strassburg 1890. C. F. Schmidt. 152 S.

Das Lehrbuch umfasst: Planimetrie, Algebra, ebene Trigonometrie, Stereometrie nebst sphärischer Trigonometrie. Die Bearbeitung zeichnet sich durch Fleiss und Umsicht unverkennbar aus. Dem Vorwort zufolge ist vollkommene Beherrschung eines mathematischen Gedankenkreises zu erteilen Ziel der Darstellung; zu diesem Zwecke dürfe das Wissen nicht hinter dem Können, die Logik nicht hinter der Vorführung zurückgestellt und vernachlässigt werden, auch habe sich das Lehrbuch durchaus auf das Wesentliche zu beschränken, da ja alle unnötige Zugabe den Zusammenhang dem Einblicke entziehe. Nicht in allen Punkten entspricht die Ausführung diesen Grundsätzen. Was von der Logik gesagt ist, wird völlig umgestossen durch die Behandlung des Parallelensatzes, der sich hier unter dem Titel „Beweis" auf einen bekannten Trugschluss gestützt findet. Vorbereitet ist das unlogische Zuwerkegehen durch mangelhafte Begriffsbestimmung des Winkels. Es ist richtig, dass der Winkel

die Grösse der Drehung einer Geraden ausdrückt, aber unrichtig, dass er durch letztere definirt werde; denn die Drehung wird erst durch den Winkel zu einer axacten Grösse, nachdem die Vergleichbarkeit und Messbarkeit des Winkels erkannt ist. Die Sätze, welche letzteres begründen, fehlen im Lehrbuche. Auch die angebliche Definition der Congruenz §. 20. ist in dem Falle, dass sie voraussetzt, was zu erklären war. Doch nur der Name Definition ist als irre leitend zu verwerfen; es handelt sich bloss um Worterklärung; wo keine Verschiedenheit ist, bedarf es keiner exacten Wissenschaft. Einen Fortschritt zur exacten Methode bietet die Behandlung der Incommensurabilität und der, sofern die Proportionslehre auf Arithmetik basirt wird, damit verknüpften Irrationalzahl. Sie erfasst den Gegenstand von der richtigen Seite, verschweigt aber am Schlusse das Wichtigste und lässt damit die Darlegung auf einem unbefriedigenden Standpunkte. Nachdem gezeigt ist, dass man die Irrationalzahl bis auf eine Differenz, die man so klein machen kann, als man will, durch Brüche darstellen kann, schliesst der Verfasser mit der Behauptung, dies sei ebenso gut, als eine genaue Darstellung. Gut, aber warum? Soll der Schüler glauben, ein kleiner Fehler schade nichts, und so zur wissenschaftlichen Untreue verführt werden? Mit wenigen Worten liess sich elementar und streng beweisen, dass zwei Grössen, die in jenem Falle sind, dass sie nämlich von demselben Bruche unendlich wenig abweichen, einander genau gleich sein müssen. Dann war es verständlich, dass wirklich unendliche Annäherung ebenso gut ist als genaue Bestimmung; denn dann giebt es nur eine einzige Grösse, welche die nachgewiesene Bedingung erfüllt.

Hoppe.

Leitfaden der Elementarmathematik. Von Dr. K. Noack. Zweite Auflage. Berlin 1890. Julius Springer. 104 S.

Der Umfang der Lehrgegenstände in diesem Buche ist der weiteste, der von Schulen gefordert wird: Combinationslehre und sphärische Trigonometrie ist einbegriffen, Kegelschnitte ausgeschlossen. Zunächst ist sofort bemerkbar die äusserste Knappheit des Dargebotenen, welche vom Verfasser durch die Forderung der Selbsttätigkeit der Schüler gerechtfertigt wird: die Beweise bestehen grossenteils nur in Angabe der Sätze, auf die sie sich stützen sollen; die Erklärungen sind für jeden Abschnitt alle zusammengestellt; Vollständigkeit bei Beschränkung auf das Notwendige ist sichtlich mit Umsicht angestrebt, doch möchte man noch immer manches vermissen, was man weder entbehrlich noch von selbst klar nennen würde. Was z. B. ein negatives Glied einer algebraischen Summe bedeutet, ist erklärt, was aber ein negatives Resultat bedeutet, nicht. Auch

die Null ist nicht erklärt, und dass sie kein Divisor sein kann, nicht erwähnt, obgleich sie als Divisor im symbolischen Ausdruck vorkommt, auch hier ohne Erklärung. Von $\frac{1}{n}$ wird gesagt, dass es bei wachsendem n beständtg kleiner wird. aber so davon gesprochen, als wenn daraus folgte, dass es beliebig klein werden könnte. Ueberhaupt scheint in der Arithmetik die Fertigkeit im algebraischen Rechnen fast allein zum Ziele genommen zu sein. H.

Die Elementar-Planimetrie. Ein methodisches Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht. Von H. Müller, Kgl. Gymnasiallehrer. Berlin 1891. Julius Springer. 187 S.

Es ist das Charakteristische dieses Lehrbuchs, worin ihm wol kaum ein andres gleichkommt, dass es in demselben kleinen Anschauungs- und Gedankenkreise geflissentlich lange verweilt. Dies Verweilen bei Gegenständen, die dem Gemüte nichts darbieten, entspricht nicht der natürlichen Neigung der meisten Anfänger; es muss als Vorbedingung erlernt werden wie von kleinen Kindern das Stillsitzen und Schweigen. Oft ist die Frage erhoben worden, ob zum Treiben der Mathematik eine besondere Veranlagung nötig sei; ob aber dazu Ordnungsliebe, Gerechtigkeitssinn auch ohne moralisches Object und die Geduld zu jenem Verweilen nötig sei, danach hat man nicht gefragt; und doch sind es eben diese drei Erfordernisse, deren Nichterfüllung meistens, wenn nicht immer, den mangelnden Erfolg hinreichend erklärt. Um das letzte derselben, welches mehr Sache des Unterrichts ist als die erstern, handelt es sich hier. Statt eines Satzes, der eigentlich allein notwendig ist und gewöhnlich auch allein aufgestellt wird, gibt das Lehrbuch eine Reihe von Sätzen, die im Grunde alle ziemlich dasselbe sagen, aber mit verschiedener Wendung und mit allerlei Beziehungen nach verschiedenen Seiten hin, nicht in blossen Bemerkungen, sondern sämtlich exact formulirt. Ohne synthetischen Fortschritt, mit Stehenbleiben bei einer kleinen Figur und kaum merklicher Beanspruchung des Urteils wird dem Schüler eine, nicht sowol sinnliche als vielmehr logische Umschau dargeboten. Manche mögen eine solche Behandlungsweise misbilligen und namentlich betonen, dass jene Vervielfältigung der Sätze nicht ins Lehrbuch gehöre, sondern dem Ermessen des Lehrers zu überlassen sei; doch muss man wenigstens zugestehen, dass die Wahl des Verfahrens auf richtiger pädagigischer Ansicht beruht. Im ganzen ist der Lehrgang der gewöhnliche. Nach einer Einleitung mit vielseitigster Erklärung der Grundbegriffe sind die Hauptteile: die Gleichheit (Congruenz inbegriffen) und die Proportionalität. Leichte Aufgaben folgen auf jeden Abschnitt. H.

Raumlehre für höhere Schulen. Von Professor H. C. E. Martus, Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin. 1. Teil. Ebene Figuren. Bielefeld und Leipzig 1890. Velhagen u. Klasing. 159 S.

Der Herausgabe des Gegenwärtigen ist 1881 die des Lehrbuchs der Geometrie von C. Meyer vorausgegangen, welche im 265. litt. Bericht S. 4 besprochen ist. Im Vorwort ist dasselbe nicht erwähnt; doch ist ohne Zweifel das Gegenwärtige zu dessen Ersatze bestimmt. Im allgemeinen gilt auch das Gesagte von der neuen Ausgabe. Der Parallelensatz ist anders behandelt, doch insofern nicht zufriedenstellend, als die Lücke des Beweises verhüllt bleibt, statt dass eine klare Vorstellung vom Sachverhalt gegeben werden sollte. Im Vorwort spricht der Verfasser über das Thema der Benennungen, zugleich als Rechtfertigung seines bessernden Vorgehens im Lehrbuche. Nächstes Motiv ist ihm der Wunsch im Ersatz der Fremdwörter durch deutsche über das, was bereits vollzogen ist, hinaus fortzuschreiten, soweit es eben möglich ist. Dieser wird nicht in einseitigem Eifer zur Geltung gebracht, sondern entgegenstehende Gesichtspunkte andret Art sehr wol erwogen, wenn gleich solche nicht principiell besprochen, sondern nur einzeln in Betracht gezogen werden. Da der Verfasser im besondern Falle auch das Fremdwort einem erst zu schaffenden deutschen Worte vorzieht, so kann man wol das Ziel seines Vorgehens überhaupt allgemeiner auffassen. Wer treffendere und bequeme Namen findet, mögen sie deutsch sein oder nicht, wird meist dankbarer Beistimmung begegnen, wenn auch die Nachahmung nicht sogleich erfolgt. Ein entschiedener Misgriff aber ist ein Verfahren, welches der Verfasser empfiehlt: er räumt ein, dass in der wissenschaftlichen Sprache gewisse Fremdwörter unentbehrlich seien; ist aber der Ansicht, dass auf der Schule dafür deutsche Benennungen zu setzen seien. Es verhält sich gerade umgekehrt. Jeder Verfasser einer wissenschaftlichen Abhandlung kann selbst gewählte Benennungen nach vorhergehender Erklärung gebrauchen; denn diese gelten dann immer nur für den Umfang seiner Schrift. Was aber auf der Schule gelernt wird, muss dauernde Geltung haben und daher stets dem angemessen sein, worüber die Gelehrten bereits einig sind. Wollte man hier Abweichungen von der eingeführten Benennung nach Ermessen des Lehrers zulassen, so würden die Schüler aus verschiedenen Schulen und aus verschiedenen Classen in verschiedener Sprache reden. Auch möchten wol Wenige die Erfahrung des Verfassers bestätigen, dass die Anfänger von den Raumgebilden leichter unter deutscher Benennung eine Vorstellung gewännen. Das Kind lernt mit jedem neuen Gebilde der Natur oder Technik einen neuen Namen kennen und verbindet mit diesem, auch wenn es ein Fremdwort ist, die Vorstellung des Geschenen. Neu aber ist dem An-

fänger fast jedes geometrische Gebilde; denn die idealisirte Auffassung der Figuren unter einfachen Gesetzen mit Absehen von zufälligen Ungleichheiten findet beim ersten Unterricht statt. Hierzu hift ihm die Verdeutschung an sich nichts. Verdient der deutsche Ausdruck den Vorzug, so mögen die Gelehrten sich darüber einigen, die Schule muss bis dahin am Gebräuchlichen festhalten. Daher ist auch das im Vorliegenden befolgte Verfahren, das Gebräuchliche bloss einmal in einer Fussnote zu geben, den verdeutschen Namen im Texte gleichmässig anzuwenden, geradezu umzukehren.

Hoppe.

Vorschule zur Geometrie. Von F. Roese, Oberlehrer zu Wismar. Wismar 1890. Eberhardt. 16 S.

Nach der Abfassung zu urteilen ist das Vorliegende dazu bestimmt, Anfängern eine leidliche Vorstellung von Gegenständen der Geometrie zu geben; auch ist darauf Bedacht genommen worden, dass die Schüler von jeder Mitteilung sofort Anwendung machen können. Weder ausreichende Erklärung noch Ordnung oder regelmässigen Fortschritt hat sich der Verfasser zur Vorschrift gemacht. Alles ist Auswahl. Dies gilt auch von der Figurentafel. H.

Grundriss der Ebenen Trigonometrie. Von Ferdinand Roese Oberlehrer in Wismar. Wismar 1889. Hinstorff. 61 S.

Die eigentümliche Methode hat zum Ziele, auf Grund fertiger Kenntniss der elementaren Planimetrie zur Idee der Goniometrie und ebenen Trigonometrie hinzuleiten, und zwar geschieht dies, indem zuerst alle unmittelbar vorliegenden Fälle eines berechtigten Schlusses von Linienverhältnissen auf Winkel und umgekehrt gesammelt, dann nach Möglichkeit erweitert werden. Erst nachdem so der Gedanke einer Construction von Tafeln geweckt ist, folgen die Erlärung des Gebrauchs der Tafeln, die Aufgaben am rechtwinkligen und beliebigen Dreieck nebst Uebungen. H.

Leitfaden der ebenen Geometrie für höhere Lehranstalten. Von Prof. H. Köstler. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. 3. Heft. Die Aehnlichkeit der Figuren. Zweite, teilweise umgearbeitete und vermehrte Auflage. Halle a. S. 1890. Louis Nebert. 64 S.

Die erste Auflage ist im 251. litt. Bericht S. 29 besprochen. Die Sätze und Constructionen sind in der neuen Auflage vermehrt,

ihre Anordnung zum Teil verändert. Der gerügte Fehler aber ist nicht berichtigt. Der Fall der Irrationalität bleibt ganz verschwiegen. Der Verfasser zieht es vor, auf Kosten der Schüler sich die Arbeit leicht zu machen. H.

Lehrbuch der Ebenen Geometrie. Von Karl Koch, Professor am Lyceum in Cannstatt. Zweiter Teil. Mit 47 Figuren. Ravensburg 1890. Dorn. 120 S.

Der erste Teil ist im 32. litt. Bericht S. 45 besprochen. Zu der daselbst gegebenen Charakterisirung sei, besonders auf diesen Teil bezüglich, hinzugefügt, dass das Lehrbuch, weit über die Grenzen des Notwendigen hinaus, das Lehrreiche zugezogen hat und mit grosser Ausführlichkeit behandelt. Auch ist ausser den zwei Abschnitten über Proportionen und Aehnlichkeit, welche den ersten Teil zur gesamten elementaren Planimetrie zu ergänzen hatten, ein besonderer Abschnitt über perspectivische Abbildung aufgenommen worden. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. M. Henoch u. E. Lampe. 19. Bd. Jahrg. 1887. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 11 Mk.

Methode und Principien.

Gruber, K., ausführliche Anleitung zum Gebrauche d. Rechenunterrichts in der Volks- u. höheren Bürgerschule, nebst der Beantwortg. der in diesem Buche enthaltenen Fragen u. Aufgaben. Für den Lehrer bearb. 8. Aufl. Karlsruhe, Braun'sche Hofb., Verl. 2 Mk. 40 Pf.

Niemeyer, R., üb. Rechnen u. Entwicklung d. Rechnens. Minden, Bruns' Verl. 50 Pf.

Schmitz-Dumont, Lichtäther u. elektrische Welle. Eine Weiterführung der Maxwell'schen Mediumtheorie. Dresden, Höckner. 1 Mk. 50 Pf.

Schotten, H., Inhalt u. Methode d. planimetrischen Unterrichts. Eine vergleich. Planimetrie. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Schüler, F W., üb. das Axiom v. der Winkelsumme im Dreieck. Leipzig, Fock, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Lehrbücher.

Boyman, J. R., Lehrbuch der Mathematik f. Gymnasien, Realschulen u. andere höhere Lehranstalten. 1. Tl.: Geometrie der Ebene. 13. Aufl., besorgt v. Vering. Düsseldorf, Schwann. 2 Mk.; Einbd. 30 Pf.

Haller v. Hallerstein, F. Baron, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Nach dem Lehrplane f. das königl. preuss. Kadetten-Corps bearb. v. K. Strübing u. B. Hülsen. I. Tl. Pensum der Quarta u. Unter-Tertia. 5. Aufl. Berlin, Nauck & Co. Geb. 2 Mk. 80 Pf.

Müller, H., Leitfaden zum Unterrichte in der elementaren Mathematik, m. e. Sammlg. v. Aufgaben. 10. Aufl. Neu bearb. v. M. Zwerger. 3. Abthlgn. München, Lindauer. 5 Mk. 40 Pf.; Einbd. à 30 Pf.

Schram, J., u. R. Schüssler, Vorschule der Mathematik f. österr. Untergymnasien u. verwandte Lehranstalten. Wien, Hölder. 2 Mk. 48 Pf.

Sammlungen.

Heis, E., Sammlung v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. Ausg. f. die Schulen Oesterreichs. 1. Afl. Köln, Du Mont-Schauberg. 3 Mk.

Hoffmann, J., u. J. Klein, Rechenbuch f. Seminaristen u. Lehrer. 10. Afl. Düsseldorf, Schwann. 3 Mk.; Einbd. 50 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 738.—797. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Martus, H. C. E., mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den oberen Klassen höherer Lehranstalten. 1. Tl. Aufgaben. 8. Afl. Leipzig, C. A. Koch. 3 Mk. 60 Pf.

Pape, P., Sammlung v. Rechen-Aufgaben f. Bürgerschulen. Ausg. f. Knaben-Bürgerschulen. 3. Hft. 3. Aufl. Wien, Manz, Verl. Kart. 48 Pf.

Schram, J., u. R. Schüssler, Uebungsschule zur Vorschule der Mathematik f. österr. Untergymnasien u. verwandte Lehranstalten. 1. Hft. Uebungsstoff f. die 1. Classe. Wien, Hölder. 72 Pf.

Tabellen.

Czermak, P., Reductionstabellen zur Gauss-Poggendorff'schen Spiegelablesung. (In deutscher, engl. u. französ. Sprache.) Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Diestel, F., Beiträge zu der Interpolationsrechnung. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk 20 Pf.

Focke, M., u. M. Krass, Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, nebst e. Aufgaben-Sammlg. zum Gebrauche an Gymnasien, Realgymnasien u. anderen höheren Lehranstalten. 5. Afl. Münster, Coppenrath, Verl. 2 Mk. 50 Pf.

Gegenbauer, L., üb. e. arithmetischen Satz d. Hrn. Charles. Hermite. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Kathrein, R., Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. 1. Thl. 4. Afl. Wien, Hölder. 2 Mk. 80 Pf.

Krug, A., Theorie der Deriviationen. Leipzig, Freytag. 4 Mk.

Lohnstein, R., üb. lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung, welche Integrale besitzen, durch deren Umkehrung sich eindeutige Funktionen zweier Variablen ergeben. Berlin, Mayer & M. 2 Mk. 50 Pf.

Mertens, F., die Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Schröder, J., üb. den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- u. ϑ-Functionen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 60 Pf.

Schumacher, J., zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Leipzig, Deichert'sche Verl. 3 Mk. 50 Pf.

Stolz, O., die Maxima u. Minima der Functionen v. mehreren Veränderlichen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Winckler, A., üb. den Multiplicator der Differentialgleichungen I. Ordnung. I. Ebd. 50 Pf.

Geometrie.

Busolt, M., Behandlung der conformen Abbildung der Oberflächen 2. Ordnung. Königsberg, Koch. 1 Mk. 20 Pf.

Dicknether, F., Leitfaden der darstellenden Geometrie. München, Lindauer. 1 Mk. 50 Pf.

Haskell, M. W., üb. die zu der Curve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projectiven Sinne gehörende mehrfache Ueberdeckung der Ebene. Göttingen, Vandenhoeck & R. 2 Mk. 80 Pf.

Heger, R., Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearb. 2. Aufl. Breslau, Ed. Trewendt. 1 Mk. 60 Pf.

Koch, K., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 2. Tl. Ravensburg, Dorn'sche B. 1 Mk. 20 Pf.

Köstler, H., Leitfaden der ebenen Geometrie f. höhere Lehranstalten. 3. Hft. Die Aehnlichkeit der Figuren. 2. Aufl. Halle, Nebert's Verl. Kart. 1 Mk.

Lietke, A., üb. die Flächen, f. welche e. Krümmungscentralfläche e. Kegel zweiten Grades ist. Königsberg, Koch. 1 Mk.

Lübsen, H. B., ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Ebene u. körperl. Geometrie. 27. Aufl. Leipzig, Fr. Brandstetter. 3 Mk.; Einbd. 35 Pf.

Martus, H. C. E., Raumlehre f. höhere Schulen. I. Tl. Ebene Figuren. Bielefeld, Velhagen & Kl. 2 Mk.

Müller, H., die Elemente der Planimetrie. Ein Beitrag zur Methode d. geometr. Unterrichts. 4. Aufl. Metz, Scriba. 1 Mk. 20 Pf.

Sucharda, A., zur Theorie e. Gattung windschiefer Flächen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Weiss, W., üb. e. algebraische Theorie der Schaaren nichtadjungirter Berührungscurven, welche zu e. algebraischen Curve gehören. Ebd. 60 Pf.

Trigonometrie.

Hartl, H., die trigonometrische Auflösung d. Dreiecks u. der auf Dreiecke zurückzuführenden Figuren. Wien, Hölder. Geb. 80 Pf.

— Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Ebd. 1 Mk.

Lübsen, H. B., ausführliches Lehrbuch der ebenen u. sphärischen Trigonometrie. 15. Afl. Leipzig, Brandstetter. 2 Mk. 40 Pf.

Müller, H., die Elemente der ebenen Trigonometrie, m. e. Sammlg. v. Aufgaben u. deren Lösgn. 2. Aufl. Metz, Scriba. 80 Pf.; Einbd. 40 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen u. sphärischen Trigonometrie m. Uebungs-Aufgaben f. höhere Lehranstalten. 2 Aufl. Potsdam, Aug. Stein. 1 Mk. 40 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Bauernfeind, C. M. v., Elemente der Vermessungskunde. Ein Lehrbuch der praktischen Geometrie. 7. Aufl. 2 Bde. Stuttgart, Cotta'sche B. 18 Mk.

— Tafeln üb. verschiedene Gegenstände der praktischen Geometrie. Anhang der Elemente der Vermessungskunde. Ebd. 1 Mk. 50 Pf.

— das bayerische Präcisions-Nivellement. 8. Mittheilg. München, Franz'scher Verl. 2 Mk. 60 Pf.

Czermak, P., ein Beitrag zur Construction der Niveaulinien. Leipzig, Freytag. 70 Pf.

Jordan, W., Handbuch der Vermessungskunde. 3. Bd. Landes-Vermessg. u. Grundaufgaben der Erdmessg. 3. Aufl. Stuttgart, Metzler'sche B., Verl. 13 Mk.; cplt. 35 Mk.

Mechanik.

Moshammer, K., Lehrtext f. Mechanik. Zum Gebrauche in der 3. Classe der mechanisch-techn. Abtheilg. an höheren Gewerbe-

schulen. 1. Thl.: Kräfte im Raume. Elasticitäts- u Flüssigkeitslehre. Reichenberg, Fritsche. 1 Mk. 50 Pf.

Rubinstein, S., zur Natur der Bewegungen. Leipzig, Engelmann. 1 Mk 20 Pf.

Vorsteher, E., Darstellung d. Potentials d. Ellipsoids durch Lenné'sche Functionen. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 20 Pf.

Walter, A., der freie Fall, berechnet aus dem Gravitationsgesetze. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Technik.

Anleitung zum Bau elektrischer Haustelegraphen, Telephon- u. Blitzableiter-Anlagen, hersg. v. Mix u. Genest. Berlin, Gebr. Radetzki. 4 Mk. 50 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 3. Jahrg. Das Jahr 1889. 2. Hft. Berlin, Springer. 5 Mk.

Krieg, M., die elektrischen Motoren u. ihre Anwendung in der Industrie u. im Gewerbe, sowie im Eisenbau-Strassenbahnwesen. 2 Lfg. Leipzig, Leiner. 2 Mk.

Rundschau, elektrotechnische. Hrsg. u. Chefred.: G. Krebs. 8. Jahrg. 1890/91. (24 Nrn.) Nr. 1. Frankfurt a./M. Daube & Co. Halbjährl. 4 Mk.

Vademecum f. Elektrotechniker. Begründet v. E. Rohrbeck, hrsg. v. W. A. Nippoldt. 8. Jahrg. d. Kalenders f. Elektrotechniker. 1891. Halle, Knapp. 4 Mk.

Vogler, A., Jedermann Elektrotechniker. Anleitung zur Herstellg. der hauptsächlichsten elektr. Apparate u. elektr. Leitgn. u. zur Anstellg. elektr. Versuche. Leipzig, M. Schäfer. 1 Mk. 50 Pf.

Weiler, die Dynamomaschine. Elementare Darstellg. der Principien u. Systeme der elektr. Maschinen, sowie Anleitg zur Selbstaufertigg. u. Berechng. der einzelnen Teile derselben. 12. Aufl. Magdeburg, Faber. 1 Mk. 50 Pf.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 3. Abschnitt. Berlin, G. Reimer. Kart. 3 Mk. 50 Pf.

Mandl, M., üb. e. allgemeine Linsengleichung. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Abhandlungen d. königl. preussischen meteorologischen Instituts. II. Bd. Nr. 2. Berlin, Asher & Co. 2 Mk.

Annalen, neue, der k. Sternwarte in Bogenhausen bei München. Hrsg. v. H. Seeliger. 1. Bd. München, Franz'scher Verl. 30 Mk.

Aus dem Archiv der deutschen Seewarte. XII. Jahrg. 1889. Hrsg. v. der Direction der Seewarte. Hamburg, Friederichsen & Co. 15 Mk.

Beobachtungen, deutsche überseeische meteorologische. Gesammelt u. hrsg. v. der deutschen Seewarte. II. Hft. Die Beobachtugn. v. Labrador, die Beobachtgn. v. Walfischbay. Hamburg, Friederichsen & Co. 6 Mk. 75 Pf.

Elster, J., u. H. Geitel, Beobachtungen, betr. die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 80 Pf.

Exner, F., Beobachtungen üb. atmosphärische Elektricität in den Tropen. II. Leipzig, Freytag. 1 Mk.

Grossmann, J., Wetterperioden? 2. Aufl. Berlin, Moeser. 1 Mk. 50 Pf.

Hann, J., das Luftdruck-Maximum vom Novbr. 1889 in Mittel-Europa, nebst Bemerkgn. üb. die Barometer-Maxima im Allgemeinen. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 40 Pf.

Hildebrandson, H. H., W. Köppen u. G. Neumayer Wolken-Atlas. Hamburg, Seitz Nachf., Verl. In Mappe 12 Mk.

Holetschek, J., üb. den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge m. der Perilzeit der Kometen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Jahrbuch, meteorologisches, deutsches, f. 1890. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarter Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im Jahre 1890. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 1. Hft. Berlin, Asher & Co. 3 Mk.

Konkoly, N. v., Beobachtungen, angestellt am astrophysikalischen Observatorium in O'Gyalla (Ungarn). XI. u. XII. Bd., enth. Beobachtgn. der J. 1888 u. 1889. Halle, H. W. Schmidt's Verl. 10 Mk.

Koerber, F., üb. das Meteor vom 15. Octbr. 1889. Wien, Hölder. 1 Mk.

Meyer, M. W., populäre Himmelskunde. 2. Afl. v. „Selbstbiographisches vom Himmel". Leipzig, Reinboth. 1 Mk. 50 Pf.

Oppenheim, S., Bahnbestimmung d. Kometen 1846, VIII. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Sternkarte, drehbare. Ausg. f. Mitteleuropa. 8. Aufl. Frankfurt a/M., Deutsche Lehrmittelanstalt. 1 Mk. 25 Pf.

Sternkarte, drehbare. Wandausg. Ravensburg, Dorn'sche B., Verl. Auf Pappe 50 Pf.; Taschenausg. 50 Pf.

Dostor, Prof. G., Mémoire sur une méthode nouvelle de transformation des coordonnés dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces des deux premières degrés. 1856. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

— Propriétés nouvelles des quadrilatères en général avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles etc. 1868. Geh. Preis 1 Mk. 80 Pf.

— Nouvelle détermination analytique des foyers et directrices dans les sections coniques etc. 1879. Geh. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Fahland, H., Leitfaden für den planimetrischen Unterricht in Gymnasien und Realschulen. Mit 1 Taf. 1857. Geh. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Grunert, J. A., analytische Geometrie der Ebene und des Raumes für polare Koordinatensysteme. Mit 1 Tafel. 1857. Geh. Preis 5 Mk. 40 Pf.

Hain, E., Mathematische Unterrichtsstunden. 1. Heft: Einfache Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. 1884. Geh. Preis 50 Pf.

— Dass. 2. Heft: Leichte grammatische Konstruktionsaufgaben. Mit 1 Tafel. 1885. Geh. Preis 50 Pf.

Helmling, Prof. P., Ueber die Integration der allgemeinen Riccatischen Gleichung $\frac{dy}{dx} \times xy^2 = x$ und der von ihr abhängigen Differentialgleichungen. 1879. Geh. Preis 1 Mk. 60 Pf.

Houël, Prof. J., Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. 1863. Geh. Preis 1 Mk.

Jentzsch, H., Geometrische und mechanische Theorie der Astroiden. Mathematische Monographie. Mit 5 Tafeln. 1863. Geh. Preis 5 Mk.

Oettinger, L., Weitere Ausführungen der politischen Arithmetik. 1863. Geh. Preis 6 Mk.

Pfeil, Graf L. v., Anwendung der Sekanten zur Auffindung der Sinus, Tangenten und Bogen kleiner Winkel aus Tafeln von 5 Stellen. 1864. Geh. Preis 50 Pf.

Schlömilch, Prof. O., Neue Methode zur Summirung endlicher und unendlicher Reihen. 1849. Geh. Preis 90 Pf.

Sella, Qu., die geometrischen Prinzipien des Zeichnens, insbesondere die der Axonometrie. In's Deutsche übertragen von Dr. **M. Curtze.** Mit 4 Tafeln. 1865. Geh. Preis 1 Mk.

Worpitzky, J., Beiträge zur Integration der Riccatischen Gleichung. 1862. Geh. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Sternkarte, drehbare. Wandausg. Text dazu: Der gestirnte Himmel. Ravensburg, Dorn'sche B., Verl. 20 Pf.

Umlauft, F., das Luftmeer. Die Grundzüge der Meteorologie u. Klimatologie. 4.—8. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 25. Jahrg. 1890. 2. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Physik.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums, hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1889. I. Thl. Leipzig, Voss' Sort. 10 Mk. 20 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 6. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 3 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 129.—138. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Lecher, E., e. Studie üb. elektrische Resonanzerscheinungen. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

— üb. die Messung der Dielektricitätsconstante mittelst Hertz'scher Schwingungen. Ebd. 40 Pf.

Liebisch, Th., physikalische Krystallographie. Leipzig, Veit & Co. 25 Mk.

Obermayer, A. v., üb. e. m. der fortführenden Entladung der Elektricität verbundene Druckerscheinung. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Stefan, J., üb. die Theorie der oscillatorischen Entladung. Ebd. 40 Pf.

Ule's, O., Warum u. Weil, Fragen u. Antworten aus den wichtigsten Gebieten der gesammten Naturlehre. I. Tl. Physik. 7. Afl. v. F. Langhoff. Berlin, Klemann's Verl. 3 Mk. 50 Pf.; geb. 4 Mk.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 5.—13. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Zeitschrift f. den physikalischen u. chemischen Unterricht. Unter der besond. Mitwirkg. v. E. Mach u. B. Schwalbe, hrsg. v. F. Poske. 4. Jahrg. 1890/91. 1. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 10 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1889. Physikalische. Berlin, G. Reimer. 22 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 37. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, B. G. Teubner. preplt. 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikal. Classe. 1890. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jahresbericht, 3., der physikalischen Gesellschaft in Zürich f. d. J. 1889. Nebst 2 wissenschaftlichen Beilagen. Zürich, Meyer & Z. 1 Mk. 20 Pf.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker. 107. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Berlin, G. Reimer. prcplt. 12 Mk.

Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 13. u. 14. Leipzig, Engelmann. Geb. 3 Mk. 30 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe d. k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1890. 1. u. 3. Hft. München, Franz'scher Verl. 5 Mk. 70 Pf.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. I. 99. Bd. Jahrg. 1890. 1.—3. Hft. Leipzig, Freytag. 4 Mk. 50 Pf.

— dass. Abth. IIa. 99. Bd. Jahrg. 1890. 1.—3. Hft. Ebd. 4 Mk. 50 Pf.

Litterarischer Bericht
XXXVIII.

Lehrbücher.

Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen von E. Budde. Erster Band. Mechanik der Punkte und Punktsysteme. Zweiter Band. Mechanische Summen und starre Gebilde. Berlin 1890. 1891. Georg Reimer. 968 S.

An einer allgemeinen, ideell wissenschaftlichen, das Ganze umfassenden, also weder durch technische Zwecke von Anfang beschränkten noch durch Rücksicht auf mathematische Vorbildung begrenzten Bearbeitung der Mechanik hat es bisher in Deutschland gefehlt. Das gegenwärtige, sehr ausführlich abgefasste Werk ist daher eine höchst erfreuliche Erscheinung und bezeichnet einen wesentlichen Fortschritt. In der Anordnung des Lehrstoffs ist der Verfasser traditionellem Verfahren gegenüber ganz selbständig vorgegangen. Der Inhalt der Doctrin zeigt deutlich, dass die Scheidung zwischen Statik und Dynamik sehr zurücktritt gegen die natürliche Succession der Mechanik des Punktes, der Punktsysteme und der Körper. Letztere Themata bilden daher auch hier die Hauptabschnitte. Für die Bewegung des Punktes sind die Unterabteilungen der Reihe nach: Phoronomie ohne Rücksicht auf die Zeit; in der Zeit; Beschleunigung; Dynamik und zwar: Kräfte und Massen; Bewegungsgleichungen; Princip der lebendigen Kraft; Princip der Flächen; gezwungene Bewegung; Princip der kleinsten Wirkung; Alembert's Princip (für 1 Punkt); Hamilton's Princip; Anwendungen; besondere Fälle der Bewegung; Relativbewegung. Für die Bewegung von Punktsystemen, betreffend 2 Punkte: Schwerpunktseigenschaften;

Reactionsprincip; Newton's Gesetz; Ergale; betreffend beliebig viele Punkte: Schwerpunktseigenschaften; die integrirenden Principien; Bildung der Differentialgleichungen; Specialfälle des Gleichgewichts und der Bewegung. Die Mechanik der Körper bleibt für den 2. Band vorbehalten. In zwei Punkten ist die Gestaltung der Lehre aus besonderer Wahl des Verfassers hervorgegangen. Erstens sind die Grundbegriffe so entwickelt worden, als ob sie erst gefunden werden sollten. Wie viel Belehrendes die sehr sorgfältige Ausführung darbietet, wollen wir nicht beurteilen noch gering schätzen. Doch bleibt immer ein Umstand dabei in Betracht zu ziehen. Erst auf dem Standpunkte, den die Grundbegriffe der Mechanik factisch erreicht haben, sind sie einfach. Alles Zuückgehen auf ihren Ursprung führt auf Probleme, die viel grössere Ansprüche an das Verständniss machen als die zu erklärenden Begriffe an sich. Leichter kann also durch den exact wissenschaftlichen Gebrauch der Urspung und die Basis der Begriffe verständlich werden als umgekehrt. Als zweite Besonderheit ist zu nennen, dass der Verfasser die Hamilton'sche sogenannte Strecken-Addition aufgenommen hat. Dies mag wol in Rücksicht auf die zahlreichen Anhänger dieser Speculation in und noch mehr ausser Deutschland geschehen sein. Dass, wenn es mit Hülfe neuer Terminologie und Bezeichnung gelingt die Summe von Projectionen von Strecken als Summe von Strecken erscheinen zu lassen, also Σar in der Form Σr zu schreiben, sachlich nichts gewonnen wird, liegt auf der Hand. Aber auch das Erlernen und das ausübende Rechnen hat keinen Nutzen davon. Die auf Aneignung des Verfahrens verwandte Zeit und Mühe ist rein weggeworfen. Dass gleichwol die Hamilton'sche Methode eine so günstige Aufnahme in weitem Kreise gefunden hat, ist vielleicht zu erklären durch den Umstand, dass man sie im Gegensatz zur Anwendung orthogonaler Coordinaten als neu erfundene Methode direct geometrischen Calculs betrachtete, nicht aber mit dem Rechnen mit Projectionen auf allgemeiner Axe verglich, welche die orthogonalen Coordinaten als Specialität umfassen. Denn letzteres gewährt ohne neue Einführung bei gewöhnlichem analytischen Verfahren, ganz dieselben angeblichen Vorteile hinsichtlich der Zusammensetzung von Wegen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräften. Erwägt man nun, dass vermöge der neuen Terminologie dieselbe Sache sich als etwas verschiedenes darstellt, dass es also besonderer Erkenntniss bedarf um in der Verkleidung die Identität gewahr zu werden, so können wir nicht umhin, in dem genannten Punkte die Wahl des Verfassers entschieden zu misbilligen. Gegenüber dem Verfahren andrer Autoren, welche nicht nur Identisches als Verschiedenes dargestellt, sondern sogar Verschiedenes gleich benannt und bezeichnet haben, ist freilich der Verfasser bessernd vorgegangen, indem er

wenigstens die Elemente der Hamilton'schen Theorie in Benennung und Bezeichnung deutlich unterschieden hat, doch bleibt immer das nutzlose Nebeneinander bestehen zweier Darstellungs- und Ausdrucksweisen zurück. — Der 2. Band behandelt zuerst (Zwischenstück betitelt) die Schwerpunktsbestimmung, die Theorie der Potentiale und der Trägheitsmomente. Dann folgt die Mechanik der starren Körper. Bekanntermassen existirt kein starrer Körper, und es würde die Bewegung eines solchen unter dem Einfluss von Kräften, die nur auf Teile von ihm wirken, mit der Dynamik der Punkte im Widerspruch stehen. Wie gewöhnlich geschieht – vielleicht ist Yvon de Villarceau noch der Einzige, der das strenge Verfahren gezeigt hat — geht auch der Verfasser mit Stillschweigen über die Discrepanz hinweg und begnügt sich mit dem Nachweis, dass die Verlegbarkeit des Angriffspunktes in der Richtung der Kraft eine notwendige Annahme ist, ohne zu fragen, ob sie mit den Grundgesetzen verträglich sei. Bei den höheren Ansprüchen, die man doch gewiss dem gegenwärtigen Werke zuerkennen muss, liess sich eine Aufklärung über diesen Punkt erwarten. Die Hauptabschnitte sind: die Bewegung um eine feste Axe, auf einer festen Ebene, um einen festen Punkt und die freie Bewegung. Hoppe.

Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Von Dr. Fr. W. Frankenbach. Erster Teil. Die Planimetrie. Mit 178 Figuren und zahlreichen Uebungsbeispielen. Liegnitz 1889. H. Krumbhaar. 155 S.

Der Verfasser legt Gewicht darauf, dass er von der Bewegung der Gebilde viel Gebrauch macht. Offenbar ist häufige Anwendung besser als ausnahmsweise oder sparsame, damit, wenn wirklich die Bewegung als fremdes Element in der Geometrie zu betrachten ist, dem Schüler wenigstens die Vertrautheit mit dem Gegenstande seiner Beschäftigung nicht abgeht. In der Tat ist aber die Bewegung schon in den Postulaten zugezogen, indem wir Lineal und Zirkel als bewegt bei unveränderter Beschaffenheit annehmen müssen. Das genannte Merkmal charakterisirt indes vorwaltend nur einen Teil des Lehrbuchs, zu dem nicht nur die „Einführung in die Geometrie", sondern auch der Anfang der „Planimetrie" gehört. Erstere unterscheidet sich dadurch, dass sie Raumgebilde überhaupt in Betrachtung zieht, beide aber durch den pragmatischen Vortrag, während das Voranstellen der Lehrsätze mit nachfolgendem Beweise erst später eintritt. Unrichtig, unklar und geradezu verkehrt ist die Erklärung der Parallelität und der Winkel durch die gleiche und verschiedene Richtung, so als ob die Richtungen unmittelbar durch die

Sinne gegeben wären. Möge doch, wer so lehrt, sich nach einander auf beliebige Punkte der Erde hinstellen, jedesmal nach einer Richtung hinblicken und angeben, ob die Richtung dieselbe, und wieviel sie von der ersten abwich. Der Winkel ist das, was direct gesehen wird', messbar ist und als Mittel dient die relativen Richtungen exact aufzufassen. Er wird zur Grösse vermöge der Sätze über seine Messung. An deren ausführlicher Erörterung lässt es das Lehrbuch nicht fehlen, macht jedoch davon keine Anwendung auf seine Begriffserklärung. Seine logische Beziehung zur Richtung wird in die entgegengesetzte der wirklichen verdreht. Dies Verfahren ist ein Beleg dafür, dass das Lehrbuch der Ausbildung des Denkens nicht die Sorgfalt widmet, welche der mathematische Unterricht erfordert. Eine solche Lässigkeit in logischer Beziehung wird häufig Lehrbüchern, welche die sogenannte genetische Methode proclamiren, zum Vorwurf gemacht; notwendig damit verbunden ist sie nicht.

Hoppe.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie in stufenmässiger Anordnung für den Schulgebrauch, nebst einer sich eng an dasselbe anschliessenden Sammlung von Uebungsaufgaben. Von Dr. F. Conradt, Oberlehrer am Gymnasium in Belgard. Leipzig 1889. B. G. Teubner. 176 S.

Die Trigonometrie ist offenbar kein Teil der Principien der Geometrie, mithin als Lehrgegenstand gar nicht an den Cursus gebunden und kann beliebig früher oder später betrieben werden. Betreibt man sie systematisch erschöpfend mit Beschränkung auf das Notwendige für allseitige Anwendung, wie es wol meist geschieht, so beanspucht sie keinen semesterlangen Cursus, kann vielmehr in wenigen Wochen absolvirt werden. Dieses der Natur der Sache ganz entsprechende kurze Verfahren empfiehlt sich dadurch, dass dabei das Pensum nicht grösser erscheint als es der Idee nach wirklich ist, dass daher der Lehrgegenstand leichter zur Beherrschung gelangt. Das gegenwärtige Lehrbuch entspricht der entgegengesetzten Auffassung: es betrachtet die Trigonometrie als einen Zweig der mathematischen Schuldoctrin gleich jedem andern und sucht ihn für Ausbildung des Geistes und Erwerbung nützlicher Kenntnisse so viel als möglich zu verwerten, daher den Gegenstand so reich als möglich zu entfalten. Der Gesichtspunkt der Systematik fällt hier weg; statt auf kürzestem Wege das Ganze zu entwickeln, wird im Gegenteil der Lehrstoff auf 3 Stufen verteilt, so dass auf erster Stufe, welche dem Bedürfnisse der höhern Bürgerschulen genügen soll, daher bei Anwendung auf Gymnasien für eine Classe und ein Semester be-

rechnet sein wird, noch nicht einmal die Beziehungen der Seiten, der Winkel und des Inhalts eines Dreiecks vollständig gelehrt, sondern zum Teil auf die nächste Stufe verspart werden. Die neue Auffassung der Bedeutung der Trigonometrie für die Schule können wir immerhin als berechtigt gelten lassen. Ob eine Schule bei gleicher Berücksichtigung aller Teile des mathematischen Unterrichtsstoffes soviel Zeit zur Verfügung hat, als es hier gefordert wird, mag eine Frage für sich bleiben. Dagegen ist es in Betreff der Art der Bearbeitung entschieden zu misbilligen, dass sie nicht an der anerkannten Forderung des synthetischen Lehrgangs, der allein dem Schulunterricht zukommt, festhält, sondern, als ob die Gewöhnung an das analytische Verfahren den Lehrer beherrschte, überall allgemeinere Ausgangspunkte wählt, als der Gegenstand es erfordert. Dies zeigt sich gleich im Anfang, indem der Trigonometrie die Coordinatenlehre vorausgeschickt wird. Beide sind Organe verschiedener Methoden, einander darin entgegengesetzt, dass die Coordinatenmethode mit dem Punkte in der unbegrenzten Ebene beginnt und von da erst zu den speciellen Gebilden übergeht, die Trigonometrie umgekehrt zuerst bei den Elementargebilden von geringster Zahl der Bestimmungsstücke verweilt, um aus diesen später alle Gebilde der Ebene zusammenzusetzen. Nur der letztere Weg entspricht der gründlichen Ausbildung der Anfänger: auf eng begrenztem, der Beobachtung offenem Felde müssen die ersten Begriffe erworben werden. Hierzu dient offenbar die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks besser als irgend eine allgemeinere. Aber viel schlimmer ist der Misgriff, wenn gar die zwei entgegengesetzten Principe einander durchkreuzen, wie es hier der Fall ist, wenn das eine vom Ziele des andern ablenkt und die beabsichtigte Concentration vereitelt. Die im Buche gegebene Erklärung des Begriffs einer Function können wir nicht gleicherweise als ein unnötig weites Abschweifen ansehen. Der Name ist einmal da, und wir besitzen keinen andern; es musste also über seine Bedeutung Auskunft gegeben werden. Die Algebra beschäftigt sich beständig mit Functionen, ohne dass je von solchen die Rede ist. Es wäre verkehrt und sonderbar, wollte man den Schüler mit dem Wesen der Functionen bekannt machen und mit transcendenten anfangen. Der Abschweif ist also hier ein terminologischer. Die Reichhaltigkeit des Buches, wenn wir seinen Inhalt ohne Rücksicht auf Anordnung zusammenfassen, zeigt sich in der vielseitigen Entfaltung der Theorie selbst, in deren Ausdehnung über die Grenzen der Principien hinaus nach einigen Richtungen und in der Menge einfacher und doch interessanter Uebungsaufgaben. In zweiter Beziehung wird nämlich die Lehre vom regelmässigen Vieleck und Kreise, vom Inkreise, vom Viereck, insbesondere Kreisviereck u. a. mit dem Vortrage der Trigonometrie

verbunden. Die Aufgaben verlangen teils Ausrechnung aus allgemeinen, teils aus numerischen Datis, teils Beweise gegebener Formeln, sind teils rein mathematisch teils für Fälle der Praxis gestellt; sie erfordern kein Suchen und Erfinden, sondern nur Anwendung des Gelernten. Am Schlusse stehen 4 numerische Tafeln für Dreiecksrechnung. Hoppe.

Stereometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen. Von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg. München 1890. Theodor Ackermann. 115 S.

Trigonometrie. Lehrbuch und Aufgabensammlung für Schulen Von Wilhelm Winter, Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium in Regensburg. München 1890. Theodor Ackermann. 78 S.

Beide Zweige des mathematischen Unterrichts sind in angemessener Kürze behandelt, d. h. weder unnötig zerspaltet noch über die Grenzen der eigentlichen Principien ausgedehnt, so dass der Lehrstoff sich leicht als Ganzes überschauen lässt. Einige besondere Raumgebilde, welche zugezogen sind, werden als solche bezeichnet. die man übergehen kann. Dagegen ist auf Einübung durch reichlichen Stoff an Aufgaben in beiden Lehrbüchern Bedacht genommen. Die Lehre von den Lagen der Geraden und Ebenen ist hier nicht nach den Lagen (parallelen, normalen, schiefen), sondern nach den Gegenständen eingeteilt. Die Deductionsmethoden sind die gewöhnlichen. H.

Tabellen.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch zusammengestellt von Adolf Sickenberger, Professor der Mathematik und Physik am Luitpoldgymnasium in München. Zweite, vermehrte Auflage. München 1891. Theodor Ackermann. 22 S.

Die zusammengestellten Tafeln geben die Logarithmen der Zahlen 100 bis 999, die trigonometrischen Functionen durch Sechstel Grade nebst ihren Logarithmen, die Quadrate und Quadratwurzeln, Kuben und Kubikwurzeln der Zahlen 1 bis 100, kleinere Tabellen, physikalische, geographische und astronomische Zahlen. H.

Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Herausgegeben von Dr. O. Schlömilch, Mitglied der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, der Königl. Schwedischen Akademie zu Stockholm, der Kaiserl. Leopoldinischen Akademie etc. Galvanoplastische Stereotypie. Wohlfeile Schulausgabe. Zehnte, verbesserte Auflage. Braunschweig 1890. Friedrich Vieweg und Sohn. 151 S.

Die erste der grössern Tafeln gibt die Logarithmen der Zahlen 1 bis 19909, die zweite die Kreisbogen für alle Grade, die dritte die sin, cos, tg, cotg für alle Sechstelgrade, die vierte deren Logarithmen für alle Minuten. Es folgen noch Tafeln über die reciproken Werte, Quadrat- und Kubikwurzeln, natürliche Logarithmen und Ellipsenquadranten. Der 3. Tafel ist noch eine Reductionstafel von $\operatorname{tg}\alpha$ auf $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, der 4ten eine Anweisung nebst 2 Tafeln für kleine Winkel hinzugefügt. Auch sind einige numerische Angaben mit e und π zusammenhangend und einige die Erde betreffend aufgenommen. Nach Vorgang von Nell (vielleicht noch Anderer) ist durch einen Strich unter der letzten Ziffer angezeigt, dass der Rest negativ ist. Wer sich indes davon Gewinn für die Genauigkeit der Rechnungsresultate verspricht, der möge bedenken, dass derselbe an eine sehr lästige Bedingung geknüpft ist. Soll überhaupt der grösste oder der wahrscheinliche Fehler durch Berücksichtigung des Striches kleiner werden, so muss man an alle fünfziffrig gegebenen Decimalbrüche bzhw. ± 25 angehängt denken. Man rechnet also mit 7 Ziffern und erhält doch nur eine Genauigkeit, welche 5 Decimal- und 1 Dualziffer $= 5 + \frac{1}{5}$ Decimalziffern entspricht. Der Gebrauch sechsziffriger Tafeln würde bei geringerer Mühe mehr leisten.

H.

Fünfstellige Logarithmen für den Schulgebrauch herausgegeben von Dr. Georg Kebitsch, Oberlehrer am Gymnasium zu Landsberg a. W. Leipzig 1889. Fues. 76 S.

Die Tafeln geben die Logarithmen der Zahlen 1 bis 9999 nebst Differenzen und die der sin, cos, tg, cotg aller Minuten nebst Differenzen, dazu die sin, cos, tg, cotg aller Grade. Constantenwerte und Formeln sind angebracht, wo Platz war, und am Schlusse einige kleinere Tafeln auf $1\frac{1}{2}$ Seite. Die Einleitung ergibt die Geschichte, Regeln und nützliche Beobachtungen für das Aufsuchen und das logarithmische Rechnen. Im Vorwort sind die Ansichten des Verfassers über Verbesserung der Einrichtungen hinsichtlich des Schulgebrauchs, wo es sich mehr um das Erlernen des logarithmischen

Rechnens als um dessen Anwendung handelt, dargelegt und verteidigt. Diesen möchte man wol nur zum kleinern Teile zustimmen. Zunächst wird der Genauigkeit ein viel zu geringer Wert beigelegt; doch ist dies von keinem Einfluss auf die gegenwärtige Einrichtung. Ausgeführt ist dagegen in der vorliegenden Tafel folgende Aenderung. Die negativen Logarithmen sind zerlegt in negative Charakteristik und positive Mantisse. Der Verfasser sagt davon, dass jeder, der statt -1 lieber $9-10$ geschrieben sähe, es beim Ausschreiben leicht so umsetzen könnte. Nun ist aber diese Umsetzung bei jeder Multiplication und Division nötig, wenn man nicht eine Doppelrechnung führen will, bei der man sich noch dazu leicht verrechnet; ausserdem geht uns der Vorteil verloren, Multiplicationen und Divisionen mit kleinen Zahlen gleich beim Ausschreiben auf der Tafel im Kopfe ausführen zu können. Ueberhaupt scheint der Verfasser den Grund, warum die Charakteristik samt der Mantisse in eine positive verwandelt worden ist, gar nicht erwogen zu haben, wenigstens ist im Vorwort davon nicht die Rede, es beruft sich nur auf fremde Beispiele. In der Tat hätte sich der Verfasser auch darauf berufen können, dass die Schreibung der Logarithmen der Kreisfunctionen in den Tafeln mit der Schreibung, welche Anfänger in der Lehre von den Logarithmen noch meistens zu üben haben, nicht in Uebereinstimmung ist. Allein hier liegt die Schuld an dem Zurückbleiben des Anfangsunterrichts hinter der längst bekannten vereinfachten Praxis, welche nur Subtrahenden $= 10, 100, \ldots$ zulässt. Wir wollen nicht Rückschritte auf der einen Seite, weil man auf der andern dem Fortschritt nicht gefolgt ist. Vorzüge der vorliegenden Tafel sind unbedingt, auch ohne Beschränkung auf den Schulgebrauch folgende zu nennen: zuerst der äusserst deutliche Druck. Sehr zur Erleichterung des Aufsuchens dient es, dass jedes zugleich sichtbare Seitenpar der ersten Tafel die zu denselben 2 Anfangsziffern des Entrees gehörigen 1000 Logarithmen, das der trigonometrischen Tafel gerade einen Grad umfasst. Nachahmungswert ist auch die Anordnung, nach der die Einleitung und das Vorwort ans Ende des Buchs gerückt ist. Dadurch wird dem Rechner das zeitraubende Nachblättern nach dem Anfang der Tafel erspart. Kaum als Vorzug lässt es sich bezeichnen, dass die Proportionalteile der Differenzen nicht dastehen; denn die fünfstelligen Tafeln geben solche in der Regel nicht an. Eher möchte man die Angabe der Differenzen überhaupt für überflüssig erklären, da man sie, ohne erst an den Rand der Seite blicken zu müssen, an der nächsten Zahl erkennt, und zwar in Rücksicht auf Ungleichheiten noch genauer. H.

Vermischte Schriften.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXVII. 1890. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei Segretari. Volume VI. Roma 1890.

In jedem der 2 Semester sind 12 Hefte erschienen. Sie enthalten folgende Abhandlungen und Noten.

G. Bordiga: Von einer gewissen Congruenz 3. Ordnung und 6. Classe im gewöhnlichen Raume.

V. Volterra: Ueber Differentialgleichungen, auf welche Fragen der Variationsrechnung führen. — Ueber eine Erweiterung der Jacobi-Hamilton'schen Theorie der Variationsrechnung. — Ueber die complexen Variabeln der Mehrdimensionen-Geometrie.

G. Peano: Ueber die Definition der Grösse eines Flächenstücks. — Näherungswerte für die Oberfläche des Ellipsoids.

A. Del Re: Ueber die vollständigen Gruppen dreier involutorischen linearen Transformationen in den Räumen von n Dimensionen. — Ueber die Pare bilinearer Formen. — Ueber die Fläche 5. Ordnung mit Doppelcurve 5. Ordnung. — Ueber einige vollständige Gruppen, die in der Cremona'schen Gruppe für beliebig viele Variable enthalten ist.

C. Bigiavi: Ueber die linearen Differentialgleichungen. — Ueber die linearen Differentialgleichungen mit doppelperiodischen Coefficienten.

A. Tonelli: Ueber den Zusammenhang der Räume.

S. Pincherle: Ueber einige specielle Integrale der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen.

V. Reina: Ueber die conjugirten Linien einer Fläche. — Von einigen Formeln bezüglich auf die Flächentheorie.

L. Bianchi: Ueber eine Classe von Abbildungen äquivalent der Kugel auf der Ebene. — Ueber die Gruppen linearer Substitutionen mit complexen ganzen Coefficienten. — Ueber eine Classe Fuchs'scher Gruppen, die sich auf Modulargruppen reduciren lassen. — Ueber eine neue Classe von Flächen, welche einem dreifach-orthogonalen Systeme angehören.

R. Marcolongo: Ueber die geodätischen Linien auf den nicht centralen Flächen 2. Grades.

E. Ciani: Ueber die symmetrischen algebraischen Flächen. — Ueber die kubischen Flächen, deren Hesse'sche sich teilt.

M. Pannelli: Ueber die einfachste birationale Transformation eines gewöhnlichen Raumes in einer Vierdehnung.

De Paolis: Einige Eigenschaften der Kummer'schen Fläche.

A. **Nagy**: Ueber die graphische Darstellung der logischen Grössen.

F. **Enriques**: Einige Eigenschaften der Büschel von Homographien in den Räumen von n Dimensionen.

F. **Brioschi**: Ueber die Reihenentwickelung der hyperelliptischen Functionen σ.

G. **Loria**: Ueber die Anwendung der Jacobi'schen Functionen zum Studium der schiefen Linien 4. Ordnung 1. Gattung. H.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. **Gomes Teixeira**, Professor na Academia Polytechnica do Porto, Socio de Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc. Vol. IX. Coimbra 1889.

Der 9. Band enthält folgende Abhandlungen:

D. **Leite**: Ueber eine parametrische Darstellung der Curven 1. Geschlechts.

J. B. **de Cabedo**: Beweis des Cauchy'schen Satzes. — 2 Formeln der Analysis.

E. **Cesàro**: Bemerkungen über verschiedene Artikel betreffend die Theorie der Reihen.

G. **Pirondini**: Ueber die sphärischen Linien.

G. **Loria**: Note über 2 Anwendungen algebraischer Elimination.

F. **Gomes Teixeira**: Einige Punkte der Theorie der bestimmten Integrale. — Ueber das Integral $\int_0^\pi \cot(x-\alpha)\,dx$. — Anwendungen einer Formel, welche die Derivaten beliebiger Ordnung von Functionen gibt. — Note über die Integration der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung.

A. **Gutzmer**: Note über einen Punkt der Reihentheorie.

J. P. **Teixeira**: Ueber die doppelperiodischen Functionen 2. Gattung. — Ueber die elliptischen Functionen.

M. **Lerch**: Ueber eine stetige Function, deren Derivirte durchweg unstetig ist. — Neuer Beweis einer Formel von Kirkhoff.

M. **d'Ocagne**: Ueber die isogonale Transformation von W. Roberts. — Ueber die Entwickelung von $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ nach Potenzen von $\sin\varphi$.

J. A. **Martins da Silva**: Ueber 3 Formeln der Theorie der elliptischen Functionen. H.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel XVII. Amsterdam 1890. Sikken en C^0.

Der 17. Band enthält folgende Abhandlungen.

J. C. Kluyver: Lösung der 12. Aufgabe. (Gefragt nach dem Grade eines ebenen geom. Ortes.)

W. Mantel: Studie über die Bewegung eines materiellen Punkts. (Lösung einer Preisfrage.)

H. Onnen: Bifocale Curven.

P. Molenbroek: Ueber die rein rollende Bewegung eines Körpers auf willkürlicher Fläche.

A. J. A. Prange: Das eine und andre über neuere Algebra.

A. D. van der Harst: Allgemeine Beweise für wichtige Formeln aus der Goniometrie und sphärischen Dreiecksmessung. — Polartrieder und Polardreieck.

F. J. van den Berg: Bestimmung eines Dreiecks aus gegebenen Halbirenden der Aussenwinkel.

Th. B. van Wettum: Hamilton'sche Quaternion als Caley'sche Matrix.

P. J. Helwig J. Az: Winkeltransversalen des ebenen Dreiecks.

M. d'Ocagne: Neue Methode $\sin ma$ und $\cos ma$ als Function von $\sin a$ und $\cos a$ zu berechnen.

J. W. Rasch: Geom. Ort der Wurzelpunkte einer höhern Potenzgleichung.

C. Stolp: Inhalt des Kugeldreiecks. H.

Bulletin de la Société Mathématique de France. Publié par les Secrétaires. Tome XVIII. Paris 1890.

Der 18. Band enthält folgende Abhandlungen.

R. Perrin: Vollständige Theorie des Systems zweier quadratischen ternären Formen.

E. Carvallo: Quaternionen-Formeln zur Reduction der vielfachen Integrale auf einander.

Ch. Bioche: Ueber das ds^2 der Regelflächen. — Bemerkungen über die Krümmungslinien, welche durch einen Nabelpunkt gehen.

M. d'Ocagne: Bemerkungen über die isogonalen Transformationen. — Ueber die Anwendung der parallelen Coordinaten zum Beweise eines Satzes von Chasles bezüglich auf die algebraischen Flächen.

Nanny Lagerborg: Ueber das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.

C. A. Laisant: Ueber die analytische Darstellung der ebenen Figuren und ihrer Teilung. — Ausdruck des Products der Binominalcoefficienten. — Eigenschaft der algebraischen Flächen.

G. Koenigs: Ueber die Oscillation der Winkelgeschwindigkeit in der Bewegung eines starren Körpers.

M. Fouché: Bemerkungen über die Methode der Perimeter zur Berechnung der Zahl π. — Ueber eine Vereinfachung einer Lamé-schen Rechnung bei einem Wechsel der Variabeln.

Béghin: Note über den Joachimsthal'schen Kreis. — Näherungsmethode für Berechnung des Trägheitsmoments und die Lage des Schwerpunkts eines ebenen Flächenstücks.

F. Lucas: Natur der Wurzeln einer biquadratischen Gleichung.

Weill: Ueber eine Eigenschaft einer Classe algebraischer Curven.

A. Mannheim: Krümmungsradius eines Kegelschnitts. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Diophantus v. Alexandria, die Arithmetik u. die Schrift über Polygonalzahlen. Uebersetzt u. m. Anmerkgn. begleitet v. G. Wertheim. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1884. Dargestellt v. der physikal. Gesellschaft zu Berlin. XL. Jahrg. 2. u. 3. Abth. Berlin, G. Reimer. 39 Mk.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann. Hrsg. v. E. Lampe. XX. Bd. Jahrg. 1888. (In 3 Hftn.) 1. Hft. Berlin, G. Reimer. 13 Mk.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. Nr. 17. 19. u. 20. Leipzig, Engelmann. Geb. 5 Mk. 40 Pf.

Prometheus. Illustrirte Wochenschrift üb. die Fortschritte der angewandten Naturwissenschaften, hrsg. v. O. N. Witt. 2. Jahrg. 1890/91. Nr. 1. Berlin, Mückenberger. Vierteljährl. 3 Mk.

Methode und Principien.

Engel, F., der Geschmack in der neueren Mathematik. Antrittsvorlesung. Leipzig, Alfr. Lorentz. 1 Mk.

Köhler, O., Weltschöpfung u. Weltuntergang. Die Entwicklg. v. Himmel u. Erde, auf Grund der Naturwissenschaften populär dargest. 2. Aufl. 13. Hft. Stuttgart, Dietz. 20 Pf.

Vogt, J. G., das Wesen der Elektrizität u. d. Magnetismus auf Grund e. einheitlichen Substanzbegriffes. I. Tl. Die Konstellationen der einheitl. Substanz als die Träger der physikal. Kraftäussergn. Leipzig, Wiest. 8 Mk.

Lehrbücher.

Heilermann, H., Lehr- und Uebungsbuch f. den Unterricht in der Mathematik an Gymnasien, Real- u. Gewerbeschulen. 1. Tl.; Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Frankfurt a./M., Jäger'sche Verlagsh. 2 Mk.

Noack, K., Leitfaden der Elementar-Mathematik. 2. Aufl. Berlin, Springer. Kart. 1 Mk. 40 Pf.

Sammlungen.

Bardey, E., arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch der Arithmetik. 6. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Mk.

Brenner, A., 300 algebraische Aufgaben zur Lösung mittels einfacher Schlüsse, zunächst f. Lehrer-Bildungsanstalten bearb. 4. Aufl. Freising, Datterer. 50 Pf.

Fäsch, F., Aufgaben zum Kopfrechnen m. beigefügten Antworten zum Schul- u. Privatgebrauche. 1. Tl. Die 4 Grundrechnungsarten. 4. Aufl. St. Gallen, Huber & Co. Kart. 1 Mk. 20 Pf.

Gräfe, F., Auflösungen u. Beweise der Aufgaben u. Lehrsätze aus der analytischen Geometrie d. Raumes, insbesondere der Flächen 2. Grades. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Heine, G., u. A. Westrick, Rechenbuch nebst Aufgaben zur ersten Einführung in die Geometrie f. höhere u. mittlere Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. Münster, Aschendorff. Geb. 3 Mk.

Jüdt, K., Aufgaben aus der Stereometrie u. Trigonometrie. Für Gymnasien u. Realschulen bearbeitet. 4. Aufl. Ansbach, Seybold's Buchh. Kart. 80 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 798.—837. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Löbnitz, G. Th., Rechenbuch f. Gymnasien, Realgymnasien, Real- u. höhere Bürgerschulen. 2. Tl.: Die zusammengesetzten Rechnungsarten. 14. Aufl. Hildesheim, Gerstenberg. 1 Mk.

Müller, E. R., Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometr. Analysis. 1. Tl.: Aufgaben, gelöst ohne Anwendg. der Proportionenlehre. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 5 Mk.

Reidt, F., planimetrische Aufgaben f. den Gebrauch im Schul-, Privat- u. Selbst-Unterricht. 1. Tl. Aufgaben, geordnet nach den Lehrsätzen d. Systems. 2. Aufl. Breslau, Trewendt. 1 Mk. 60 Pf.

Schubert, H., Sammlung v. arithmetischen u. algebraischen Fragen u. Aufgaben. 1. Hft.: Für mittlere Klassen. 3. Aufl. Potsdam, Stein. 1 Mk. 80 Pf.; geb. 2 Mk.

Steck, F. X., u. J. Bielmayr, Sammlung v. arithmetischen Aufgaben in systematischer Ordnung. 10. Aufl. Kempten, Kösel'sche Buchh., Verl. 1 Mk. 30 Pf.

Villicus, F., Rechenbuch f. Bürgerschulen. 3. Thl. III. Classe. 3 Aufl. Wien, Pichler's W. & S., Verl. Kart. 1 Mk. 60 Pf.

Tabellen.

Bremiker's logarithmisch-trigonometrische Tafeln m. 6 Decimalstellen. Neu bearb. v. Th. Albrecht. 11. Ausg. Berlin, Nicolai'sche Verlagsb. 4 Mk. 20 Pf.; geb. 5 Mk.

Schrön, L., siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000 u. der Sinus, Cosinus, Tangenten u. Cotangenten aller Winkel d. Quadranten von 10 zu 10 Secunden. 21. Aufl. Taf. I. u. II. d. Gesammtwerkes in 3 Tafeln. Braunschweig, Vieweg & S. 4 Mk. 20 Pf.

— Logarithmen. Taf. 1. Siebenstellige gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 108000. 21. Ausg. Ebd. 2 Mk. 40 Pf.

Sickenberger, A., vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch. 2. Aufl. München, Th. Ackermann, Verl. 40 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, W., Lehrbuch der Buchstabenrechnung u. Algebra m. zahlreichen Uebungsaufgaben. 1. Tl. 4. Aufl. Gera, Hofmann. 3 Mk. 60 Pf.; Einbd. 50 Pf.

Blind, A., Lehrbuch der Gleichungen d. II. Grades (quadratische Gleichungen m. 1 Unbekannten.) Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart. J. Maier. 10 Mk.

Bobek, K. J., Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bearb. nach System Kleyer. Ebd. 6 Mk.

Hermite, M., sur les racines de la fonction sphérique de seconde espèce. Prag, Rivnáč, Verl. 40 Pf.

Horn, J., üb. Systeme linearer Differentialgleichungen m. mehreren Veränderlichen. Beiträge zur Verallgemeinerung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichgn. Berlin, Mayer & M. 3 Mk. 60 Pf.

Klein, F., Vorlesungen üb. die Theorie der elliptischen Modulfunctionen, ausgearb. u. vervollständigt v. R. Fricke. 1. Bd. Grundlegung der Theorie. Leipzig, Teubner. 24 Mk.

Kühl, J. H., Leitfaden der Arithmetik u. Algebra. Für den Schul- und Selbstunterricht. 1. Tl. Hamburg, Kriebel. Kart. 3 Mk.

Lerch, M., Bemerkung zur Reihentheorie. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Räther, H., Theorie, u. Praxis d. Rechenunterrichts. Im Anschluss an das Uebungsbuch f. mündl. u. schriftl. Rechnen v. H. Räther u. P. Wohl bearb. 1. Tl. Die Zahlenreihen 1 bis 10, 1 bis 20 u. 1—100. Breslau, Morgenstern, Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Staudacher, H., Lehrbuch der Grundrechnungsarten u. Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), der Verhältnisse u. Proportionen. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 5 Mk.

Villicus, F., Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik f. Unter-Realschulen. 3. Thl. f. die III. Classe. 6. Aufl. Wien, Pichler's W. & S., Verl. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Wallenberg, G., Beitrag zum Studium der algebraischen Differentialgleichungen I. Ordnung, deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen, insbesondere derjenigen, welche die Ableitg. bis zum 3. Grade besitzen. Berlin, Mayer & M. 1 Mk. 20 Pf.

Geometrie.

Cranz, H., das apollonische Berührungsproblem u. verwandte Aufgaben. Nach System Kleyer neu bearb. 2. Aufl. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Hanner, A., analytische Geometrie d. Punktes, der Geraden u. der Kegelschnitte, nach neueren Methoden dargestellt. Prag, Dominicus, Verl. 10 Mk.

Holl, W., Lehrbuch der Geometrie. Neu bearb. v. K. Holl. 2. Aufl. Stuttgart, Kohlhammer. Kart. 1 Mk. 80 Pf.; Auflösungen zu den Aufgaben. 2. Aufl. 80 Pf.

Láska, W., üb. gewisse Curvensysteme u. ihre Anwendung zur graphischen Integration der Differentialgleichungen. Prag, Rivnáč, Verl., 20 Pf.

Močnik, F., Cav. de, Trattato di geometria ad uso delle classi superiori delle scuole medie. Prima versione italiana di E. Menegazzi. Triest, Dase. 4 Mk. 80 Pf.

Müller, H., die Elementar-Planimetrie. Ein method. Lehrbuch f. den Schul- u. Selbstunterricht. Berlin, J. Springer. Kart. 2 Mk. 40 Pf.

Napravnik, F., Geometrie u. geometrisches Zeichnen f. Knaben-Bürgerschulen. 1. u. 2. Thl. Für die 1. u. 2. Classe. 9. resp. 6. Aufl. Wien, Pichler's W. & S., Verl. Kart à 76 Pf.

Pelisek, M., perspectivische Studien. Prag, Rivnác, Verl. 80 Pf.

Richter, O., üb. die Systeme derjenigen Kegelschnitte, die e.

bicirculare Curve 4. Ordnung viermal berühren. Leipzig, Teubner. 4 Mk.

Röse, F., Elementargeometrie. Wismar, Hinstorff'sche Hofbuchh., Verl. 1 Mk. 50 Pf.

Rossmanith, C., die Elemente der Geometrie in Verbindung m. dem geometrischen Zeichnen. Lehr- u. Uebungsbuch f. die II., III. u. IV. Realclasse. 2. Aufl., neu bearb. v. K. Schober. Wien, Pichler's W. & S., Verl. 2 Mk. 20 Pf.

Sachs, J., Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). 3. Tl.: Die geometr. Gebilde u. Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke. Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 6 Mk.

Scholim, P., Lehrbuch der Geometrie f. höhere Lehranstalten. 2 Tle. (Mit Fig.) Kreuzburg, Thielmann's Buchh. 2 Mk. 50 Pf.

Servus, H., ausführliches Lehrbuch der Stereometrie u. sphärischen Trigonometrie. 1. Tl.: Von der Lage der Linien u. Ebenen im Raume. Von den körperl. Ecken. Leipzig, Teubner. Kart. 80 Pf.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie m. Uebungs-Aufgaben f. höhere Lehranstalten. 19. Aufl. Postdam, Stein. 2 Mk. 50 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Dreiecksnetz, das schweizerische, hrsg. v. der schweizer geodät. Commission. 5. Bd. Astronomische Beobachtgn. im Tessiner Basisnetze, auf Gäbris u. Simplon, definitive Dreiecksseitenlängen, geograph. Coordinaten. Zürich, Höhr. 10 Mk.

Helmert, F. R., das königl. preussische geodätische Institut. Aus amtl. Anlass hrsg. Berlin, Mayer & M. 2 Mk.

Veröffentlichung d. königl. preussischen geodätischen Institutes u. Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tyroler Alpen, in geodät. u. geolog. Beziehg. v. F. R. Helmert. Berlin, Stankiewicz' Verl. 4 Mk. 50 Pf.

Mechanik.

Budde, E., allgemeine Mechanik der Punkte u. starren Systeme. Ein Lehrbuch f. Hochschulen. 1. Bd. Mechanik der Punkte u. Punktsysteme. Berlin, G. Reimer. 10 Mk.

Klimpert, R., Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik). Bearb. nach System Kleyer. Stuttgart, J. Maier. 8 Mk.

Schmidt, A., üb. den Begriff der Centrifugalkraft u. die Ableitung ihres Gesetzes. Tübingen, Fues. 40 Pf.

Technik.

Bach, C., Versuche üb. die Widerstandsfähigkeit ebener Platten. Berlin, J. Springer. 2 Mk. 60 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 3. Jahrg. Das Jahr 1889. 3. Hft. Berlin, J. Springer. 5 Mk.

Fuhrmann, A., Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik. Lehrbuch u. Aufgabensammlg. (In 6 Thle.). II. Thl.: Naturwissenschaftliche Anwendungen der Integralrechng. Berlin, Ernst & K. 5 Mk. 50 Pf.

Janecke, R., die Grundzüge der elektromagnetischen Telegraphie, sowie Zweck u. Konstruction der wichtigsten elektr. Eisenbahn-Signal-Vorrichtungen. Zum Gebrauch f. Eisenbahn-Beamte bearb. 4. Aufl. Berlin, Siemenroth & W. 1 Mk.

Kral, J., Elemente d. Staats-Telegraphendienstes. 16. Aufl. Wien, Gerold & Co. 4 Mk.

Krieg, M., die elektrischen Motoren u. ihre Anwendung in der Industrie u. im Gewerbe, sowie im Eisenbahn- u. Strassenbahnwesen. 3. Lfg. Leipzig, Leiner. 2 Mk.

Lippich, F., zur Theorie der Halbschattenpolarimeter. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Sarrazin, O., u. H. Oberbeck, Taschenbuch zum Abstecken v. Kreisbögen m. u. ohne Uebergangskurven f. Eisenbahnen, Strassen u. Kanäle. Mit besond. Berücksicht. der Eisenbahnen untergeordneter Bedeutg. bearb. 5. Aufl. Berlin, J. Springer. Geb. 3 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Böklen, H., Brechung der Lichtstrahlen an v. Kugelflächen begrenzten Medien. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Exner, K., üb. die polarisirende Wirkung d. Lichtbeugung. 1. Mittheilung. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Heerwagen, F., Studien üb. die Schwingungsgesetze der Stimmgabel u. üb. die elektromagnetische Anregung. Dorpat, Karow, Verl. 2 Mk.

Simerka, V., Elemente d. Festigkeitslehre f. den Unterricht an Gewerbeschulen u. zum prakt. Gebrauch. 2. Aufl. Prag, Steinhauser. 2 Mk.

Steinheil, A., u. E. Voit, Handbuch der angewandten Optik. 1. Bd. Voraussetzung f. die Berechng. opt. Systeme u. Anwendg. auf einfache u. achromat. Linsen. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Erd- und Himmelskunde.

Abhandlungen d. königl. preussischen meteorologischen Instituts. I. Bd. Nr. 3. Berlin, Asher & Co. 1 Mk. 20 Pf.

Annalen der schweizerischen meteorologischen Central-Anstalt. 1888. — Der schweizer. meteorolog. Beobachtgn. 25. Jhrg. Zürich, Höhr. 18 Mk.

Bauernfeind, C. M., Ergebnisse aus Beobachtungen der sterrestrischen Refraktion. Nachtrag zu den Mitteilgn. II. u. III. München, Franz'scher Verl. 40 Pf.

Bauschinger, J., Ableitung der Eigenbewegung v. 90 telescopischen Sternen, welche in den Münchener Zonen vorkommen. Ebd. 2 Mk. 70 Pf.

Bezold, W. v., das königl. preussische meteorologische Institut in Berlin u. dessen Observatorium bei Potsdam. Aus amt. Anlass hrsg. Berlin, Mayer & M. 2 Mk. 50 Pf.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. u. 2° südl. Declination f. das Aequinoctium 1875. 4. u. 14. Stück. Leipzig, Engelmann. 26 resp. 19 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1888. Beobachtungssystem d. Königr. Sachsen. Bericht üb. die Thätigkeit im königl. sächs. meteorolog. Institut 1888. II. Hälfte oder III. Abth. d. Jahrbuches d. königl. sächs. meteorolog. Institutes. VI. Jahrg. 1888. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Jahrbuch der meteorologischen Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburgischen Zeitung. Hrsg. v. A. W. Grützmacher. VIII. Bd. IX. Jahrg. 1889. Magdeburg, Faber. Kart. 6 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches. Jahrg. 1889. Meteorologische Beobachtungen in Württemberg. Mitteilungen der m. dem königl. statist. Landesamt verbundenen meteorolog. Centralstation. Bearb. v. Zech u. L. Meyer. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. 3 Mk.

Nachrichten, astronomische. Hrsg.: A. Krüger. 126. Bd. (24 Nrn.). Nr. 1. Hamburg, Mauke S. Für den Band 15 Mk.

Observatorien, die königl., f. Astrophysik, Meteorologie u. Geodäsie bei Potsdam. Aus amtl. Anlass hrsg. v. den betheiligten Directionen. Berlin, Mayer & M. 6 Mk.

Observatorium, das königl. astrophysikalische, bei Potsdam. Ebd. 2 Mk. 50 Pf.

Pfeil, L. Graf v., Temperaturveränderungen auf der Erdoberfläche u. Erdmagnetismus, Polarlicht u. Dreieck verbundene Vorkommnisse. Leipzig, E. H. Mayer. 1 Mk.

Repertorium f. Meteorologie, hrsg. v. der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, red. v. H. Wild. 13. Bd. Leipzig, Voss' Sort. 29 Mk. 25 Pf.

Scheiner, J., Spectralanalyse der Gestirne. Mit e. Vorworte v. H. C. Vogel. Leipzig, Engelmann. 16 Mk.; Einbd. 2 Mk.

Sirius. Zeitschrift f. populäre Astronomie. Red.: H. J. Klein. 24. Bd. od. neue Folge 19. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Scholtze. Für den Band 12 Mk.

Umlauft, F., das Luftmeer. Die Grundzüge der Meteorologie u. Klimatologie. 9.—11. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Nautik.

Breusing, A., die nautischen Instrumente bis zur Erfindung d. Spiegelsextanten. Bremen, Silomon. 1 Mk.

Physik.

Exner, K., üb. die Scintillation. Eine Monographie. Leipzig, Freytag. 2 Mk.

Experimental-Physiker, der praktische. Nach Experimental Science v. G. M. Hopkins. Hrsg. unter Mitwirkg. v. Weiler, Schirlitz, Schwartze etc. v. der Red. der „Prakt. Physik", Chef.-Red.: M. Krieg. (In ca. 20 Lfgn.) 1. Lfg. Magdeburg, Faber. 75 Pf.

Handbuch der Physik, unter Mitwirkg. v. F. Auerbach, F. Braun, E. Brodhun etc. hrsg. v. A. Winkelmann. 1. Bd. Breslau, Trewendt. 24 Mk.; geb. in Halbfrz. 26 Mk. 40 Pf.

— dasselbe. 7. Lfg. Ebd. 3 Mk. 60 Pf.

Jellett, J. H., die Theorie der Reibung. Deutsch bearb. v. J. Lüroth u. Schepp. Leipzig, Teubner. 6 Mk.

Klemenčič, J., üb. die Untersuchung elektrischer Schwingungen m. Thermoelementen. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 139.—148. Hft. Stuttgart, J. Maier. à 25 Pf.

Klimpert, R., Lehrbuch üb. das spezifische Gewicht fester, flüssiger u. gasförmiger Körper. Bearbeitet nach System Kleyer. Ebd. 2 Mk.

Menzel, R., Wandtafeln f. den physikalischen Unterricht. 2. Aufl. 2.—6. Lfg. Breslau, Morgenstern, Verl. 3 Mk.; auf Pappe à 5 Mk.

Netoliczka, C., Lehrbuch der Physik u. Chemie f. Bürgerschulen. 3 Stufen f. die 1.—3. Classe. 43., 28. resp. 16. Aufl. Wien, Pichler's W. & S., Verl. Kart. 2 Mk. 24 Pf.

Urbanitzky, A., Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 14.—16. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Wallentin, J., G., Lehrbuch der Physik f. oberen Classen der

Litterarischer Bericht
XXXIX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik mit Hinweisen auf die sich anschliessenden höhern Gebiete. Von Dr. Karl Fink, Professor an der Realschule zu Tübingen. Tübingen 1890. H. Laupp. 269 S.

Der Umfang des Buches beschränkt sich weder auf einen Zeitraum noch auf Zweige der Doctrin. Weder die Neuzeit noch die höhere Mathematik ist soweit ausgeschlossen, als es die Natur des Gegenstands gestattet hätte. Doch ist die ausdrückliche Beschränkung der Titelangabe auf die Elementarmathematik insofern gerechtfertigt, als eine gleicherweise eingehende Behandlung der Geschichte der höhern Mathematik nicht beabsichtigt ist. Die Darstellung begnügt sich vielmehr in Betreff derselben mit den hauptsächlichen Tatsachen und principiellen Urteilen, ohne die Geschichte der einzelnen Probleme zu berühren. Die Anordnung des Buchs ist eine recht zweckmässige und zur Orientirung gemäss der Natur des Gegenstands sehr passend gewählt. Jedem Abschnitt geht ein Ueberblick voraus. Die oberste Einteilung ist eine sachliche, zunächst in Arithmetik und Geometrie; die Arithmetik bietet wieder 3 historisch gesonderte Themata, die Zahlensysteme und Zahlzeichen, dann das allgemeine Rechnen, dann die allgemeine Arithmetik nebst Algebra; an die Geometrie schliesst sich die Trigonometrie. Für jedes Thema sind besondere Zeitperioden gewählt. Am Schlusse des Ganzen werden biographische Notizen, teils ethnographisch, teils zeitlich geordnet, und ein Litteraturverzeichniss gegeben, letzteres

numerirt für Verweisung im vorausgehenden Texte auf dasselbe. Die Mechanik ist mit gutem Grunde ganz ausgeschlossen worden. Da die Dynamik erst mit Newton ins Leben tritt, die Statik zwar Anfänge im Altertum aufweist, doch erst gleichzeitig systematische Wissenschaft wird, so fehlt die historische Beziehung zu dem, wofür das Buch bestimmt ist. Das Ganze ist mit viel Geschick und Fleiss bearbeitet. H.

Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. Von Kurt Lasswitz. Zweiter Band. Höhepunkt und Verfall der Corpusculartheorie des siebzehnten Jahrhunderts. Hamburg und Leipzig 1890. Leopold Voss.

Der 1. Band ist im 34. litt. Ber. S. 14 besprochen. Der 2. Band behandelt eine Entwickelungsperiode, in welcher die Atomistik kein Thema für sich, sondern nur ein Element in der Gestaltung der Physik noch bilden kann. Er giebt die Geschichte des Ringens nach einer exacten allgemeinen Grundlage der Physik, hauptsächlich der Mechanik. Die Aufgabe, ein solches Werden in brauchbarer Gestalt darzustellen, enthielt mehr als eine Forderung, deren Erfüllung nicht leicht war. Es genügte nicht über bestimmt vorliegende Tatsachen zu berichten, vielmehr war es nötig die Tatsachen so auszuwählen, dass sie den jeweiligen Standpunkt in der Klärung der Begriffe repräsentirten. Diese werden nicht durch die hervorragenden und bekannten Werke ausreichend dargeboten; vielmehr sind auch viele wenig gekannte Schriften für den genannten Zweck ans Licht gezogen worden. Erste Bedingung ist natürlich Kenntniss und richtige Auffassung des Endresultats der Entwickelung; ohne sie ist es nicht möglich einen Einblick in den veränderten Ideengang zu geben; sie lässt sich auch hier in der geschichtlichen Darstellung nicht vermissen. Der Anfang des 2. Bandes freilich giebt nur Anlass das Gegenteil zu erwarten. Der Verfasser constatirt nämlich als epochemachenden Fortschritt, welcher die Bahn zur Erschaffung der Dynamik eröffnet habe, „einen neuen Begriff der Bewegung", der sich von dem alten, der causal indifferenten Ortsveränderung, dadurch unterscheiden soll, dass die Bewegung als intensive Realität im Zeitmoment aufgefasst werde. Wissenschaftliche Begriffe können allerdings sich verändern und weitere Bedeutung gewinnen. In diesem Falle aber ist es nichts als ein poetischer Tropus, wenn der Bewegung als solcher Energie zugeschrieben wird. Wir haben allen Grund hier an der nüchternen Logik festzuhalten, weil jener Tropus Kosmophantasten oft als Mittel gedient hat ihren Erzeugnissen bei Laien Eingang zu verschaffen. Der Begriff der Bewegung ist noch stets derselbe geblieben: der Mittelpunkt einer Hohlkugel bewegt

sich mit dieser in gleichem Sinne, wie wenn sie voll wäre. Zunächst ist die reine Bewegung nicht causal indifferent, denn sie bringt den Körper an den Ort seiner Kraftwirkung. Die Begriffe aber, deren Entdeckkung in der Tat der Neuzeit angehört, Masse, Beharrung, Energie, stehen zur Bewegung in Beziehungen, die dem Verfasser nicht unbekannt sind, und die den rein kinematischen Begriff in unveränderter Auffassung zur Voraussetzung haben. Die Möglichkeit, dass der Verfasser die Vorstellungsweise, nach welcher die Bewegung selbst eine Kraft sei, als eine zeitweilige gewisser Personen habe charakterisiren wollen, wird durch die Worte der Einleitung ausgeschlossen; hier ist von definitivem Fortschritt die Rede. Wo er sie bei Leonardo da Vinci findet, lässt das Angeführte es unentschieden, ob dieser vom Charakter der Erscheinung oder von seiner Theorie spricht. Was indes der allgemeinen Einleitung an klarer Begriffsscheidung fehlt, hat kaum merklichen Einfluss auf die historisch eingehende Darstellung, welche die Ideen und Ansichten der einzelnen Forscher vorführt. Schon der Versuch unter den verschiedenen Schriften derselben, deren gleichzeitige zumteil einen ganz ungleichen Standpunkt haben, einen durchgehenden Faden der Fortentwickelung und Stufen derselben kenntlich zu machen ist ein verdienstliches Unternehmen. Der Verfasser nennt sie: die Philosophen der Corpusculartheorie, die naturwissenschaftliche Vollendung der Corpusculartheorie, den Uebergang zur dynamischen Theorie der Materie. Unter den Schriftstellern aus diesen Perioden werden die zwei, die ihrer Zeit vorausgeeilt sind, und deren Bedeutung erst später erkannt worden ist, Leonardo und Jungius, vorangestellt. Es folgen in der ersten Periode: Benedetti, Stevin, Galilei, Descartes, Gassendi, Digby, Hobbes; aus der zweiten: Boyle, Guericke, Borelli, Hooke, Grimaldi, Pardies, Huygens; aus der dritten: Regius, Rohault, Pardies, Régis, Clauberg, Svicer, Cordemoy, Malebranche, J. C. Sturm, Jac. I Bernoulli, Hartsoeker, Spinoza, Leibniz, Fabri, Deschales, de Lana, Casati, Maignan, Casimir von Toulouse, Senguerd, de Arriaga, Holwarda, Nulandt, de Stair, Bernier, Locke, Gadrois, Varignon, de Duillier, Perrault, Hooke, Malpighi, Swammerdam, Stenone, Leeuwenhoek, Blankaart, Bontekoe, St. Romain, Sperlette, May, Mariotte, Marci von Kronland, Cudworth, Willis, Glisson, More, Coppernicus, Gilbert, d'Espagnet, Bakon, Kepler, Fermat, Pascal, Mersenne, Roberval, Boulliau, Borelli, Wren, Halley, Newton. Die Urteile des Verfassers würden zu mancher Kritik Anlass bieten, die wir hier übergehen. Hoppe.

Die Harmonie in der Baukunst. Nachweisung der Proportionalität in den Bauwerken des griechischen Altertums. Von W.

Schultz. Erster Teil. Mathematische Grundlagen des angewendeten Proportionierungs-Systems. Mit 60 Holzschnitten. Hannover-Linden 1891. Carl Manz. 4°. 124 S.

Vor Behandlung der mathematischen Grundlagen gehen einleitende Bemerkungen kurz auf ästhetische Fragen ein, wiewol nur um über bestehende Meinungen zu berichten. Es wird constatirt, dass die meisten Kunstverständigen die Harmonie der Kunstwerke für einen geheimnissvollen Vorgang ausgeben, dessen sich der Künstler nicht bewusst werde, unter ihnen viele sogar die Möglichkeit fester Schönheitsgesetze bestreiten, während andere die Möglichkeit zugestehen, doch für notwendig halten, dass der Künstler sich der Gesetze nicht bewusst werde. Dem gegenüber stellt der Verfasser die von ihm geteilte Ansicht, dass das Gesetz der Proportionalität in der Tat als bindendes existirt, stützt dieselbe jedoch allein auf historische Autorität. Dies würde darauf hinauslaufen, dass alle künstlerische Productivität eine dämonische, alle Kritik ohne eigene Empfindung nur aus vorhandenen Kunstwerken abstrahirt wäre. Sollte nun unter den „kunstverständigen“ keiner sein, dem der Grund des Eindrucks zum Bewusstsein gekommen wäre? Ihnen wenigstens ist ja das Bewusstwerden nicht verboten, und es bietet sich zur Beobachtung und Vergleichung an andern Künsten (Musik, Dichtung u. a.) und an Naturgebilden (Krystallen, Blumen, Tannzapfen u. a. ein weites Feld dar. Es ist leicht begreiflich, dass ein beim ersten Anblick erschöpfend ausgelerntes Gesetz keinen Eindruck macht, ein ganz unverständliches Gesetz ebenso wenig, weil beide Fälle nicht dazu anlocken können mehr zu entdecken. Der Reiz der Schönheit lässt sich nur fern von beiden Extremen suchen: ein das unmittelbar percipirte übersteigendes durchgehendes Gesetz muss geahnt werden. Dass die Grenzen des Gebietes der Ahnung für alle Völker und Zeiten dieselben sein würden, liess sich schon von selbst nicht annehmen, und die Geschichte der Musik widerlegt es augenfällig, indem im Altertume zur Harmonie die Schwingungsverhältnisse 1, 2, 3 ausreichten, während jetzt das Eintreten der Zahl 5 dazu erforderlich ist. Gleicherweise kann man auch nicht behaupten, dass die altgriechische Architektonik ewige Gesetze repräsentirte. Dies setzt auch der Verfasser nicht voraus, er constatirt nur, dass die Ueberschreitung der alten Gesetze bis jetzt keinen befriedigenden Erfolg aufweise. In der Tat würde es schwierig sein, ein so geschlossenes System wie das der griechischen Proportionalität derart zu erweitern, dass der Eindruck irgend einer Harmonie erhalten bliebe. Dieses System wird im ersten Abschnitt ausführlich dargelegt. Es besteht aus 10 zur Verfügung stehenden stetigen Proportionen, welche 3 Linearabmessungen in Relation stellen, einer arith-

metischen, einer geometrischen, mehreren harmonischen und einigen zusammengesetzten. In der Theorie ist nur von Linien des Grundrisses die Rede; die Anwendung auf Höhen und Horizontalprojectionen, die doch weiterhin stellenweis vorkommt, scheint in den Gesetzen nicht ausgesprochen zu sein. Der Grundriss ist ein Rechteck oder geht aus einem solchen hervor, die in Betracht kommenden Strecken sind die Seiten und Diagonalen. Als Autor der Gesetze galt bei den Griechen und Römern Thales. Durch ihn sind sie zur Oeffentlichkeit gelangt, während die ägyptischen Priester, welche die eigentlichen Erfinder sein mögen, und von denen Thales seine mathematischen Kenntnisse erhalten hat, die Baukunst für sich behielten. Auf geschichtliche Fragen geht die vorliegende Schrift kritisch prüfend ein, wozu namentlich das Werk von Cantor ein bedeutendes Hülfsmittel darbot. Der Verfasser begründet seine Bevorzugung der griechischen Baukunkt durch den Umstand, dass über diese die vollständigsten exacten Nachrichten vorhanden sind. Im 2. Abschnitt wird die Proportionalität und das zu ihrer Erlangung angewandte Verfahren an 5 Bauwerken nachgewiesen; diese sind: der Stadttempel zu Sclinus auf Sicilien, der Theseus-Tempel zu Athen, der Concordia-Tempel zu Agrigent, der kleine Tempel zu Paestum nnd der Burgtempel zu Sclinus. Hieraus werden Ergebnisse gezogen. Der letzte Abschnitt handelt von den Anfängen wissenschaftlicher Behandlung der Mathomatik bei den Griechen und deren Beziehungen zu Aegypteu. H.

Methode und Principien.

Function und Begriff. Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft von Dr. G. Frege, Professor an der Universität Jena. Jena 1891. Hermann Pohle. 31 S.

Es wird die Function, ihr Begriff, ihre Theorie und ihre Bezeiehnung dazu verwertet, der formalen Logik ein neues Instrument zuzuführen. Dabei finden einige Erweiterungen statt: als Argumente werden auch Urteile, namentlich Gleichungen, als Functionen (d. h. Beziehungen des Functionswerts zum Argumente) auch Arten der Durchlaufung der Werte eingeführt. Die gegenwärtige Schrift soll zur vorausgehenden Verständigung dienen für eine bald folgende, welche die grundlegenden Definitionen der Arithmetik behandeln wird. H.

Ueber die Grundlagen der Erkenntnis in den exacten Wissenschaften. Von Paul du Bois-Reymond. Nach einer hinterlassenen Handschrift. Mit einem Bildnis des Verfassers. Tübingen 1890. H. Laupp. 130 S.

Der Herausgeber ist Guido Hauck. Dass die Bearbeitung des Manuscripts die Gedanken des Verfassers treu widergibt, ist kein Zweifel. Was die Schrift auszeichnet und ihr Interesse verleiht, ist einerseits die in hohem Grade umsichtige und vorurteilsfreie Logik, andrerseits die respectvolle Schonung und unverdiente Anerkennung, welche sie den Irrtümern der grossen Menge angedeihen lässt. Gerechtfertigt mag letztere Massregel immerhin sein: sie war vielleicht das einzige Mittel Gehör zu finden. Die Kritik ist an solche Rücksichten nicht gebunden und kann sie nicht nehmen; um die Sachlage klar zu stellen und den Kernpunkt der Schrift zu treffen, muss es gleich von Anfang unumwunden ausgesprochen werden: Ein Tor ist, wer eine Frage zu lösen strebt, ehe er deren Sinn versteht. Ein Problem existirt noch nicht, wenn sich auch Viele mit dem Stande der Wissenschaft unbefriedigt finden, solange kein bestimmtes Desideratum aufgewiesen ist. Hierhin gehört vor allem ein Thema, welches im Vorliegenden besonders ausführlich behandelt wird, die Erklärung der Fernwirkung. Wie es vernünftigerweise nicht anders sein kann und doch leider als besonderer Vorzug des Gegenwärtigen gerühmt werden muss, ist es dem Verfasser die erste Frage, was man mit dem Worte Erklärung sucht oder suchen kann. Dagegen lässt er nicht nur bereitwillig Probleme ohne diese Vorbedingung gelten, sondern eröffnet ihnen sogar einen der Controle entzogenen, gleichsam über aller Wissenschaft stehenden Platz. Er unterscheidet nämlich 3 Richtungen der Forschung, die er nennt die empirische, die mechanische und metamechanische; die erste suche die Erscheinungen durch Beobachtung und Versuch zu ordnen und abstrahire daraus Gesetze, die zweite sie mechanisch zu construiren. Dass beides auch combinirt auftrete, wird eingeräumt, doch müsse man es um der Klarheit willen trennen. Dass aber Beobachtung und Theorie nicht eins ohne das andre die Erkenntniss fördern können, lässt der Verfasser im dunkeln. Die zwei ersten angeblichen Richtungen, die der Charakterisirung zufolge sich mit Beobachtung und Theorie decken, sind also vielmehr zwei Tätigkeiten, deren die Forschung stets bedarf, nicht aber zwei Wege, die divergiren und eventuell zu verschiedenem Ergebniss führen könnten. Letztere Auffassung ist dem Verfasser eigentümlich und wol nur aus Fällen mislungener Forschung aufgenommen. Die dritte Richtung leitet der Verfasser aus angeblichem Mangel der zweiten her. Er sagt, die mechanische Construction begnüge sich damit den einfachsten Zusammenhang herzustellen. Was lässt nun der einfachste Zu-

sammenhang zu suchen übrig? Um hierüber Auskunft zu erteilen, gibt er als Ziel der metamechanischen Forschung die Fragen an: Was ist Materie? Wie kann Materie auf andre Materie wirken? Wie kann die Fernkraft Druck und Bewegung erzeugen? Halten wir uns an die Worte, so verlangt die erste Frage neben der Materie ein Zweites, um sie dann damit zu identificiren, die beiden andern die Beschreibung des Hergangs. Der Verfasser lässt es nicht dabei bewenden, dass hiermit kein Desideratum kenntlich gemacht ist, sondern versucht den Fragen zu einem Sinne zu verhelfen und mustert die Arten, wie man denken könnte die Fernwirkung dem Verständniss näher zu bringen, was dann begreiflicherweise zu keinem annehmbaren Resultate führt. Der Umweg, auf dem sich gezeigt hat, dass die Erklärung der Frnwirkung kein bewusstes Problem bildet, wäre an sich unschädlich. Aber nun kommt der Trugschluss. Als ob der Verfasser über dem langen Umschweife vergessen hätte, dass es sich noch um Aufweisung, nicht um Lösung eines Problems handelte, schliesst er vielmehr aus der Erfolglosigkeit, die Erklärung sei eins der Probleme, denen der menschliche Verstand nicht gewachsen sei. Zwar räumt er ein, das Problem sei ein psychologisches (wir sollten lieber sagen, ein psychiatrisches); das ändert aber nichts: das Desideratum hätte ausgesprochen werden müssen. Im weitern Verlaufe findet er durch gleichen Schlussfehler immer mehr solche Grenzen der Erkenntniss und gelangt im letzten Abschnitt „Weltanschauung" zu dem von ihm selbst traurig genannten Prospect, nach dem wir, umringt von lauter Grenzen, uns wie in einem Käfig befinden. Trauriger wol noch ist der Trost, den er daran knüpft. Treffender als das Bild des Käfigs, an dessen Stäbe sich ja noch niemand gestossen hat, möchte dagegen das Bild der allein fruchtbaren Erdoberfläche, an die wir durch unsere Schwere gefesselt sind, so dass wir, obgleich uns der ganze Himmel offen steht, uns nicht in Räume verlieren können, wo kein Baum wächst, unsere beschränkte Lage zur Naturerkenntniss charakterisiren. Noch ist zu erwähnen, dass der Verfasser, und zwar ausschliesslich, wirklich nennt, was jenseit der Grenzen der Erkenntniss liege. Hiermit wird offenbar Alles auf den Kopf gestellt: was wir erleben, sehen, betasten, ist Sinnestäuschung, wovon wir nichts wissen, worüber uns folglich weder ein positives noch ein negatives Urteil zusteht, wird für wirklich erklärt. Der Urheber dieser unlogischen Verkehrung ist bekanntlich Kant. Den Widerspruch in letzterer Behauptung merkt der Verfasser nicht. Den Hauptinhalt der Schrift macht die Besprechung von Schwierigkeiten aus, auf welche die Naturforschung gestossen ist, und die sie zur Zeit nicht überwunden hat. Die Gegenstände selbst sind bekannt genug, ihre Zusammenstellung nichts desto weniger recht willkommen. Ihre Beleuchtung ist ziemlich

populär gehalten, doch werden Viele, die ohne das im Allgemeinen gleich urteilen würden, die zu berücksichtigenden Punkte nicht gleicherweise beachten. Die Urteile des Verfassers erregen vielfach den Wunsch, dass dessen Arbeit nicht vereinzelt bleiben, sondern in den Arbeiten Gleichbegabter bei verschiedener Auffassung ihre Controle finden möge. Die Kritik kann die Controverse nicht ersetzen, weil sie viel zu sehr an den Gedankengang des Verfassers gebunden ist. Hoppe.

Der Geschmack in der neueren Mathematik. Antrittsvorlesung gehalten am 24. October 1890 in der Aula der Universität Leipzig von Dr. Friedrich Engel, ao. Professor. Leipzig 1890. Alfred Lorentz. 21 S.

Der Geschmack ist derjenige Sinn, dem man am wenigstens Objectivität zuerkennt. Daher gebraucht man das Wort (gemäss dem Spruche: De gustibus non est disputandum) für eine bevorzugende Wahl ohne Bewusstsein rationaler Rechtfertigung. Bei gleicher Auffassung lenkt der Verfasser die Aufmerksamkeit auf die Bevorzugung der Methoden der Mathematik, die er, weil sie durch Kürze nicht ausreichend bestimmt sei, etwas voreilig für Sache des Geschmacks erklärt. Man durfte wol erwarten, dass er vorher andre rationale Vorzüge, Einheitlichkeit, Durchsichtigkeit, Uebersichtlichkeit u. s. w., in Betracht gezogen hätte. Selbst die Tatsache, dass die Individuen ungleiche Wahl der Methode treffen, lässt die Möglichkeit bestehen, dass jeder sich der Gründe bewusst sei; denn der Eine hat mehr intensive, der Andre mehr extensive Begabung. Die Bezeichnung von Methoden als elegant erwähnt der Verfasser nur um sie zu verwerfen. Doch um den Geschmack handelt es sich im weitern überhaupt nicht mehr. Zunächst ist es ein rationaler Vorzug, der den Verfasser auf die folgende Specialbetrachtung führt, der nämlich, dass zur Herleitung keine der Aufgabe fremden Objecte verwandt werden. Dies setzt voraus, dass die in die Deduction eintretenden Operationen ihre Objecte innerhalb derjenigen Gruppe belassen, welcher auch das Gesuchte angehört. Bis hierher war es die Aufgabe, welche der Gruppe Grenzen setzte. Jetzt aber geht der Verfasser auf den Fall über, wo das Gesuchte einer bestimmten Gruppe angehören soll, und zeigt dies an den Beispielen der Galoisschen Behandlung der Gleichungen, der projectivischen, der reinen, der linearen Geometrie. Hier handelt es sich nicht mehr um verschiedene Wege zu gleichem Ziele; denn Mittel und Zweck sind ja zugleich verschieden; nicht, welche Methode man anwenden, sondern welchen Wissenschaftszweig man treiben will, ist der Wahl freige-

stellt, und statt letzterer Wahl kann man ebensogut das Studiren, wenn es dem Geschmack nicht entspricht, überhaupt lassen.

Hoppe.

Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. Von Dr. Heinrich Schotten. Leipzig 1890. B. G. Teubner. 370 S.

Das Vorliegende stellt die Ansichten von Pädagogen über den planimetrischen Unterricht zusammen, welche in Vorreden zu Lehrbüchern, in Programmen, Zeitschriften u. s. w. an die Oeffentlichkeit gelangt sind. Das Bedürfniss einer solchen Zusammenstellung ist durch die Sachlage reichlich dargetan. Dass die grosse Menge nach einander erschienener Lehrbücher keinen stetigen Fortschritt zum Bessern repräsentirt, ist oft bemerkt worden. Die Zusammenstellung macht dies nicht nur offenbar, sondern zeigt auch deutlich den Grund des Mangels. Sie gleicht mehr einer Abstimmung über die didaktischen Fragen als einem Hinwirken auf deren Klärung und Lösung. Sollte Letzteres zum Ziele genommen sein, so hätten die Autoren die Fragen soweit möglich analysiren, unteilbare Urteile aufstellen, zur Widerlegung auffordern und dieselbe begünstigen müssen. Das Gegenteil geschieht. Die Urteile sind meist summarische, so dass man sie zumteil gelten lassen kann, zumteil nicht, jede Einrede scheint unwillkommen und wird erschwert. Da nun die citirten Autoren keine Neigung haben die Fragen zur Entscheidung zu bringen, so hätte es recht eigentlich zur Bestimmung des gegenwärtigen Werks gehört das Unterlassene selbst auszuführen; indessen scheint auch der Verfasser den Wert der Meinungen nur nach ihrer Häufigkeit zu wägen. Ist aber auch die Absicht erst halb erreicht, so ist doch schon die erste Hälfte, die Zusammenführung der Ansichten, ein dankenswertes Unternehmen. Das vorliegende Buch wird im Vorwort der erste Band genannt, was auf dem Titel nicht bemerkt ist. Dieser behandelt erst die allgemeinen didaktischen Grundsätze, dann die einzelnen Grundbegriffe. Hoppe.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 13. Stockholm 1890. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 13. Band enthält die zwei mit dem Preise Sr. Maj. des Königs Oskar II. gekrönten Abhandlungen:

H. Poincaré: Ueber das Problem der 3 Körper und die Gleichungen der Dynamik.

P. Appell: Ueber die Integrale von Multiplicator-Functionen und ihre Anwendung zur Entwickelung der Abel'schen Functionen in trigonometrische Reihen.

Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Em. Weyr in Wien. I. Jahrgang. Wien 1890. Manz.

Der Inhalt des 1. Bandes ist folgender.

J. Stefan: Ueber die Theorie der Eisbildung. — J. König: Ueber stetige Functionen, die innerhalb jedes Intervalls extreme Werte besitzen. — F. Mertens: Die invarianten Gebilde der räumlichen Collineation. — Das Potential einer homogenen Ellipse. — F. Mayer: Ueber die höhern Ableitungen eines Quotienten 2 Functionen. — L. Gegenbauer: Einige arithmetische Sätze. — W. Wirtinger: Bemerkung über ganzzahlige irreductible Gleichungen. — Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche und ihrer Beziehungen zu den Θ Functionen 2 Variabeln. — Bemerkung über die elliptischen Modulfunctionen. — O. Biermann: Ueber die Darstellung der Fuchs'schen Functionen 1. Familie durch unendliche Producte. — H. Kohn: Ueber die Relationen, welche zwischen den verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten einer allgemeinen Curve 4. Ordn. bestehen. — V. Dantscher v. Kottelsberg: Bemerkung zur Integralrechnung. — C. Köppner: Die Schraubenbewegung, das Nullsystem und der lineare Complex. — Ueber benachbarte, windschiefe Strahlen im linearen Complexe. — M. Lerch: Mitteilungen aus der Integralrechnung. — J. A. Gmeiner: Beweis eines arithmetischen Satzes. — E. Weyr: Zur Theorie der bilinearen Formen. — F. Spath: Lineale Construction von Kegelschnitten aus teilweise imaginären Elementen. — J. Haubner: Ueber Strombrechung in flächenförmigen Leitern. — O. v. Lichtenfels: Ueber den Fundamentalsatz der Theorie der Differentialgleichungen. — E. Study: Ueber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen. — A. Ameseder: Grundzügee einer rein geometrischen Theorie der Collineationen und Reciprocitäten. — K. Birkeland: Ein Satz über algebraische Curven. — O. Stolz: Zur

Theorie der Raumcurven. — A. Puchta: Loxodromen und kürzeste Linien auf dem Kreisring. — Zur Theorie der Beobachtungsfehler. — M. Mandl: Ueber die Verallgemeinerung eines Gauss'schen Algorithmus. — A. Wassmuth: Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur. — F. Gomes-Teixeira: Erweiterung eines Satzes von Jacobi. H.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un Comité de rédaction composé des Professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la Faculté, sous les auspices du Ministère de l'instruction publique et de la Municipalité de Toulouse, avec le concours du Conseil Général de la Haute-Garonne. Tome IV. Année 1890. Paris 1890. Gauthier-Villars et fils.

Der 4. Band enthält folgende Abhandlungen.

X. Stouff: Ueber neue harmonische Functionen von 3 Variabeln analog den Fuchs'schen Θ Functionen. — Ueber gewisse aus den Wurzeln binomischer Gleichungen gebildete Fuchs'sche Gruppen. — P. Sabatier: Ueber die Classification der einfachen Körper nach dem periodischen Gesetze. — P. Duhem: Von den Grundprincipien der Hydrostatik. — Ueber die Verrückung des Gleichgewichts. — A. Legoux: Ueber ein System orthogonaler und homofocaler Curven. — G. Koenigs: Bemerkung über einen Punkt der Theorie der elliptischen Functionen. — V. Jamet: Ueber die Theorie der eine Curve osculirenden Kugeln. — T. J. Stieltjes: Ueber die Legendre'schen Polynome. — Ueber die Wurzeln der Kugelfunction 2. Gattung. — P. Appell: Ueber eine Classe von Polynomen in 2 Variabeln und die approximative Berechnung der Doppelintegrale. Hermite: Ueber die Wurzeln der Kugelfunction 2. Gattung. — H. Andoyer: Ueber die allgemeinen Formeln der Himmelsmechanik. — G. Humbert: Ueber die einer Quartik einbeschriebenen Kegelschnitte. — Riveau: Ueber die Invarianten der linearen Differentialgleichungen. — E. Cosserat: Ueber die Untersuchung einer algebraischen Curve in der Nähe eines ihrer Punkte. — Ch. Méray: Analytische Theorie des Neper'schen Logarithmus und der Exponentialfunction. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Cleomedis de motu circulari corporum caelestium libri II, ad novorum codicum fidem ed. et latina interpretatione instruxit H. Ziegler. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 70 Pf.

Fortschritte, die, der Physik, im J. 1885. Dargestellt v. der physik. Gesellschaft zu Berlin. 41. Jahrg. 1. Abth., enth.: Physik der Materie. Red. v. E. Budde. Berlin, Georg Reimer. 11 Mk.

Frischauf, J., Beiträge zur Geschichte u. Construction der Karten-Projectionen. Graz, Leuschner & L. 80 Pf.

Graf, J. H., Geschichte der Mathematik u. der Naturwissenschaften in bernischen Landen vom Wiederaufblühen der Wissenschaften bis in die neuere Zeit. 3. Hft. (2. Abth.) Die 1. Hälfte d. XVIII. Jahrh. Bern, Wyss. 2 Mk. 40 Pf.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. 20. Bd. Jahrg. 1888. 2. Hft. Berlin, Georg Reimer. 10 Mk.

Robel, E., die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwickelungsgeschichte der Akustik. I. Tl. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Weber, L., üb. das Galilei'sche Princip. Kiel, Häseler'sche Buchh. 2 Mk.

Methode und Principien.

Böhme, A., Anleitung zum Unterricht im Rechnen. 12. Aufl. Berlin, G. W. F. Müller. 4 Mk.

Haberland, M., die Stellung der Mathematik im System d. erziehenden Unterrichts. Neustrelitz, Barnewitz'sche Hofbuchh. 50 Pf.

Sammlungen.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 838.—887. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Martus, H. C. E., mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. 2. Tl.: Ergebnisse. 7. Aufl. Leipzig, C. A. Koch's Verl. 4 Mk. 80 Pf.

Roese, F., 5000 Aufgaben nebst Resultaten aus der Bruchrechnung. Wismar, Hinstorff, Verl. 50 Pf.

Rychlicki, S., physikalische Aufgaben aus der Mechanik nebst Auflösungen f. die Prima höherer Lehranstalten. Wongrowitz, Lewandowski. 1 Mk.

Stein, H., Rechenhefte f. d. Unter- u. Mittelklassen der Realschulen u. Gymnasien. 1.—3. Hft. 4. Aufl. Chemnitz, Bülz, Verl. 2 Mk. 20 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., vierstellige logarithmisch-trigonometr. Handtafeln. 2. Aufl. Halle, Strien Verl. 60 Pf.

— fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 33. Aufl. Ebd. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

Greve, A., fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, nebst e. grösseren Anzahl v. Hilfstafeln. 4. Aufl. Bielefeld, Velhagen & Kl. Geb. 2 Mk.

Gundelfinger, L., u. A. M. Nell, Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen mittelst e. neuen Interpolationsmethode. Mit erläut. Nachwort. Darmstadt, Bergsträsser, Verl. 2 Mk.

Wittstein, Th., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 14. Aufl. Hannover, Hahn'sche Buchh. Geb. 2 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Büttner, A., Kopfrechenschule. 2. Tl. Rechenstoffe f. die Oberstufe mehrklass. Schulen, sowie f. Präparandenanstalten. Mit e. Anh. enth. e. Lehrgang m. Aufgaben üb. das Invaliditäts- u. Altersversicherungsgesetz. Leipzig, Hirt & S. 1 Mk. 25 Pf.; 1 Mk. 50 Pf.

Gegenbauer, L., einige Sätze üb. die Functionen $C_n(x)$. Leipzig, Freytag. 3 Mk.

Gegenbauer, L., zahlentheoretische Sätze. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 80 Pf.

— einige Sätze üb. Determinanten höheren Ranges. Ebd. 1 Mk.

— zur Theorie der Congruenzen m. mehreren Unbekannten. Ebd. 50 Pf.

Haberl, J., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik u. Algebra. Zum Gebrauche v. Ober-Realschulen u. verwandten Lehr-Anstalten. 6. Aufl. Wien, Braumüller. Geb. 3 Mk. 80 Pf.

Hauck, A. F., u. H. Hauck, Lehrbuch der Arithmetik f. Latein-, Real- u. Handelsschulen. 1. Tl. 1. Abth. 7. Aufl.; hrsg. v. J. Brunotte. Resultate. Nürnberg, Korn'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Heymann, W., Studien üb. die Transformation u. Integration der Differential- u. Differenzengleichungen, nebst e. Anh. verwandter Aufgaben. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Mertens, F., üb. e. Satz der höheren Algebra. Leipzig, Freytag. 10 Pf.

Müller, H., die Elemente der Arithmetik u. Algebra. Ein Hülfsbuch zum Gebrauche m. e. der systematisch geordneten Aufgabensammlgn. Metz, Scriba. 1 Mk. 20 Pf.

Rosenow, H., üb. die Anzahl v. Klassen bilinearer Formen Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Schader, F., Leitfaden f. den Rechenunterricht in den 3 untersten Klassen höherer Lehranstalten, nebst Aufgabensammlg. (Nach neuer Methode.) 1. Tl.: Leitfaden. Hamburg, G. Fritzsche. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 30 Pf.

Weber, H., elliptische Functionen u. algebraische Zahlen. Academische Vorlesgn. Braunschweig, Vieweg & S. 13 Mk.

Winckler, A., üb. den Multiplicator der Differentialgleichungen 1. Ordnung. II. Leipzig, Freytag. 50 Pf.

Winter, W., Algebra. Lehrbuch f. Aufgabensammlung f. Schulen. München, Th. Ackermann, Verl., 3 Mk. 60 Pf.

Wirtinger, W., üb. Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Zwicky, M., Leitfaden f. die Elemente der Algebra. II. Hft. 6. Aufl. Bern, Schmid, Francke & Co., Verl. 50 Pf.

Geometrie.

Adler, A., zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

— üb. d. zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben 2. Grades nothwendigen Hilfsmittel. Ebd. 1 Mk.

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie, unter besond. Benutzg. der Vorträge v. A. C. bearb. v. F. Lindemann. 2. Bds. 1. Thl. Die Flächen 1. u. 2. Ordng. od. Klasse u. der lineare Complex. Leipzig, Teubner. 12 Mk.

Ernst, Ch., u. L. Stolte, Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien, Realschulen u. anderen höheren Lehranstalten. 1. Tl. Planimetrie, nebst e. Sammlg. v. Aufgaben. 2. Aufl. Strassburg, Strassb. Druckerei u. Verlagsanst. Kart. 1 Mk. 50 Pf.

Fulst, O., Bestimmung d. Flächeninhalts d. Mantels e. schiefen Kegels m. elliptischer Grundfläche. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Genau, A., Leitfaden der elementaren Geometrie f. Lehrer-Seminare. 6. Aufl. Büren, Hagen. 2 Mk. 60 Pf.

Glinzer, E., Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 1. Tl.: Planimetrie. 4. Aufl. Dresden, Kühtmann. 1 Mk. 80 Pf.

Gusserow, C., stereometrische Untersuchungen. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Hertter, die elementar-mathematische Grundlage der Linear- od. Malerperspektive. Tübingen, Fues. 1 Mk.

Hoch, J., Katechismus der Projectionslehre. M. e. Anh., enth. die Elemente der Perspective. Leipzig, J. J. Weber. 2 Mk.

Kommerell, V., Beiträge zur Gauss'schen Flächentheorie. Tübingen, Fues. 80 Pf.

Küpper, K., geometrische Betrachtungen üb. den Strahlen-Complex u. die Congruenz. Prag, Rivnač. 40 Pf.

Rudio, F., die Elemente der analytischen Geometrie d. Raumes. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Servus, H., ausführliches Lehrbuch der Stereometrie u. sphärischen Trigonometrie. II. Tl. Leipzig, Teubner. Kart. 2 Mk.

Weyr, E., üb. Raumcurven 6. Ordnung vom Geschlechte Eins. (1. Mittheilg.) Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2. Bd. 2. Abtlg. Stereometrie. Hannover, Hahn'sche Buchh. 2 Mk. 10 Pf.

Trigonometrie.

Jentzen, Elemente der Trigonometrie zum praktischen Gebrauch f. Unterrichtszwecke an mittleren technischen Lehranstalten. Dresden, Kühtmann. 1 Mk.; geb. 1 Mk. 20 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Publikationen f. die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten d. k. k. Gradmessungs-Bureau, durchgeführt unter der

Leitg. v. Th. v. Oppolzer. Nach dessen Tode hrsg. v. E. Weiss u. R. Schram. II. Bd. Längenbestimmungen. Leipzig, Freytag. 16 Mk.

Schürmann, F., kleine praktische Geometrie. 14. Aufl. Moers, Spaarmann. 1 Mk. 80 Pf.

Zeitschrift f. Vermessungswesen. Hrsg. v. W. Jordan u. C. Steppes. 20. Bd. Jahrg. 1891. 1. Hft. Stuttgart, Wittwer's Verl. Jährlich 9 Mk.

Mechanik.

Adler, G., üb. e. Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Budde, E., allgemeine Mechanik der Punkte u. starren Systeme. Ein Lehrbuch f. Hochschulen. 2. Bd. Mechanische Summe u. starre Gebilde. Berlin, Georg Reimer. 13 Mk. *

Kobald, E., üb. e. allgemeine Form der Zustandsgleichung. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Ott, E., Elemente der Mechanik. 2. Aufl. Zürich, Schulthess. 4 Mk.

Technik.

Bibliothek, elektro-technische. 43. Bd. Die elektrischen Verbrauchsmesser. Von E. de Fodor. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Corsepius, M., theoretische u. praktische Untersuchungen zur Konstruktion magnetischer Maschinen. Berlin, Springer. 6 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: M. Krieg. 4. Jahrg. 1891. (52 Hft.) 1. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährlich 3 Mk. 75 Pf.

Export-Zeitung f. Elektrotechnik. Hrsg.: F. C. Jenkins. 1. Jahrg. 1891. (24 Nrn.) Nr. 1—5. (In deutscher, engl. u. span. Sprache.) Hamburg, Boysen & M. Vierteljährlich 3 Mk.

Grawinkel, C. u. K. Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik. Unter Mitwirkg, v. Fink, Görz, Goppelsroeder, Pirani, v. Renesse u. Seyffert bearb. u. hrsg. 2. Aufl. Berlin, Springer. Geb. 12 Mk.

Krämer, J., Einleitung zum Studium der Elektrotechnik. Grundbegriffe der Mechanik u. Elektrostatik. In vollkommen elementarer u. populärer Darstellg. verf. Wien, Perles' Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Krieg, M., die elektrischen Motoren u. ihre Anwendung in der Industrie u. im Gewerbe, sowie im Eisen- u. Strassenbahnwesen. 4. (Schluss-)Lfg. Leipzig, Leiner. 2 Mk.; kplt. 8 Mk.

— Taschenbuch der Elektricität. 2. Aufl. Ebd. Geb. 3 Mk. 50 Pf.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale in Ostsee, Nordsee u. Kanal. 20. Jahrg. 6. Aufl. Bremen, Heinsius Nachf. 3 Mk.

Physik, praktische. Illustrirte Wochenschrift f. die gesamten wissenschaftl., techn. u. industriellen Interessen der Mechanik, Optik, Elektrotechnik u. s. w., sowie Organ f. den physikal. Unterricht. Hrsg. v. M. Krieg. 4. Jahrg. 1891. Nr. 1. Magdeburg, Faber. Jährlich 6 Mk.

Scheffler, H., die Hydraulik auf neuen Grundlagen. Leipzig, Fr. Förster. 5 Mk.

Zeitschrift, elektrotechnische. (Centralblatt f. Elektrotechnik.) Red. v. F. Uppenborn. 12. Jahrg. 1891. (52 Hfte.). 1. Hft. Berlin, Springer. Jährlich 20 Mk.

Zeitschrift f. Elektrotechnik. Organ d. elektrotechn. Vereins in Wien. Red.: J. Kareis. 9. Jahrg. 1891. 1. Hft. Wien, C. Helf's Sort. Jährlich 16 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Knoblauch, H., üb. die Polarisation der strahlenden Wärme durch totale Reflexion. Leipzig, Engelmann. 5 Mk.

Kobald, E., üb. Mac-Cullagh's Differential-Gleichungen f. Lichtschwingungen in zweiaxigen Krystallen u. deren Verallgemeinerung. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Lommel, E., Berechnung v. Mischfarben. München, Franz'scher Verl. 1 Mk.

Schober, K., üb. die Construction der Halbschattengrenzen der Flächen 2. Grades unter Voraussetzung v. Kugelbeleuchtung. Innsbruck, Wagner'sche Univ.-B. 3 Mk. 20 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Annalen der Hydrographie u. maritimen Meteorologie. Hrsg. vom hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. 19. Jahrg. 1891. (12 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Mittler & S. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

Annalen d. physikalischen Central-Observatoriums. hrsg. v. H. Wild. Jahrg. 1889. II. Tl. Meteorologische Beobachtungen der Stationen 2. Ordnung in Russland nach dem internationalen Schema. Leipzig, Voss' Sort. 15 Mk. 40 Pf.

Bebber, W. J. van, die Wettervorhersage. Eine prakt. Anleitg. zur Wettervorhersage auf Grundlage der Zeitungswetterkarten u. Zeitungswetterberichte f. alle Berufsarten. Im Auftrage der Direktion der deutschen Seewarte bearb. Stuttgart, Enke. 4 Mk.

Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. Ausgeführt im Auftrage d. hydrograph. Amts der Admiralität unter der Leitg. v. H. Börgen. Hrsg. vom

hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. 2. Thl. Stündliche Variations-Beobachtgn. während der J. 1884. u. 1885. Berlin, Mittler & S. 2 Mk. 50 Pf.

Brédichin, Th., sur les phénomènes extraordinaires présentés par la grande comète de 1882. Leipzig, Voss' Sort. 1 Mk.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. 1. Abth. 3. Stück. Leipzig, Engelmann. 7 Mk.

Diesterweg's populäre Himmelskunde u. mathematische Geographie. Neu bearb. v. M. W. Meyer unter Mitwirkung v. B. Schwalbe. 14. u 15. Aufl. Berlin, Emil Goldschmidt. 7 Mk. 50 Pf.; geb. in Leinen 8 Mk. 30 Pf.; eleg. geb. 9 Mk.

Jahrbuch, Berliner astronomisches, f. 1893 m. Angaben f. die Oppositionen der Planeten (1) — (283) f. 1891. Hrsg. v. dem Rechen-Institute der königl. Sternwarte zu Berlin unter Leitg. v. F. Tietjen. Berlin, F. Dümmler's Verl. 12 Mk.

Jahrbuch der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. Unter Mitwirkg. v. Fachmännern hrsg. v. H. J. Klein. 1. Jahrg. 1890. Leipzig, E. H. Mayer. Kart. 7 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1889. Beobachtungs-System d. Königr. Sachsen. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im Königr. Sachsen im J. 1889. Jahrbuch d. königl. sächs. meteorolog. Institutes, VII. Jahrg. 1889, 1. Hälfte, Abth. I. u. II. Hrsg. v. P. Schreiber. Chemnitz, Bülz, Verl. 10 Mk.

Kremers, E., Beitrag zur Kenntniss der Isomerieverhältnisse innerhalb der Tropenreihe. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 40 Pf.

Kalender, astronomischer, f. 1891. Nach dem Muster d. K. v. Littrow'schen Kalenders hrsg. v. W. v. Knieriem. 12. Jahrg. Riga, N. Kymmel. Geb. 4 Mk.

Liznar, J., e. neue magnetische Aufnahme Oesterreichs. (II. vorläuf. Bericht.) Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Mayer, E., Handbuch der Astrologie. Berlin, v. Decker's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Meyer, H., Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen f. die Klimatologie Berlin, Springer. 4 Mk.

Seeliger, H., üb. Zusammenstösse u. Theilungen planetarischer Massen. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Stern-Ephemeriden f. d. J. 1893. Berlin, Dümmler's Verl. 6 Mk.

Umlauft, F., das Luftmeer. Die Grundzüge der Meteorologie u. Klimatologie. 12.—15. (Schluss-)Lfg. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 25. Jahrg. 3. Hft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Wetter, das. Meteorolog. Monatsschrift f. Gebildete aller Stände. Hrsg. v. R. Assmann. 8. Jahrg. 1891. 1. Hft. Braunschweig, Salle. Jährlich 6 Mk.

Wochenschrift f. Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Red. v. H. J. Klein. Neue Folge. 34. Jahrg. 1891. Nr. 1. Halle, Schmidt's Verl. Jährlich 10 Mk.

Zeitschrift, meteorologische. Red. v. J. Hann u. W. Köppen. 8. Jahrg. 1891. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Hölzel's Verl. Jährlich 20 Mk.

Nautik.

Mittheilungen aus dem Gebiete d. Seewesens. Hrsg. vom k. u. k. hydrograph. Amte, Marine-Bibliothek. 19. Bd. Jahrg. 1881. (12 Hfte.) 1. Hft. Wien, Gerold's S. Jährlich 12 Mk.

Physik.

Annalen der Physik u. Chemie. Hrsg. v. G. Wiedemann. Jahrg. 1891. (12 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, J. A. Barth. Jährlich 36 Mk.

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie. Begründet v. J. C. Poggendorff. Hrsg. v. G. u. E. Wiedemann. 15. Bd. (12 Hfte.) 1. Hft. Ebd. Für den Band 20 Mk.

Bernstein, A., üb. die Umwandlung d. elektrischen Stromes in Licht. Vortrag. Hamburg, Friederichsen & Co. 60 Pf.

Fock, A., üb. die physikalischen Eigenschaften der Elemente u. ihre anschauliche Erklärung. Ein Vortrag. Berlin, Mayer & M. 1 Mk.

Fuss, K., u. G. Hensold, Lehrbuch der Physik f. den Unterricht an Lehrerbildungsanstalten u. Mittelschulen. Freiburg, Herder. 4 Mk. 50 Pf.; Einbd. 45 Pf.

Gräupner, Elektrolyse u. Katalyse. Ihre Theorie u. Praxis. Preuss & J. 4 Mk. 50 Pf.

Klemenčič, J., einige Bemerkungen üb. Normalwiderstände. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Kleyer, A., die elektr. Erscheingn. u. Wirkgn. in Theorie u. Praxis. 149—156. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Kopp, R., zur Theorie der Electrostricktion kugelförmiger Condensatoren. Leipzig, Fock, Verl. 80 Pf.

Lang, V. v., Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie. Leipzig, Freytag. 20 Pf.

Mach, E., u. G. Jaumann, Leitfaden der Physik f. Studirende. Ebd. Geb. 4 Mk. 40 Pf.

Meissen, E., galvanische Elemente u. Aceulatoren. Frankfurt a./M., Wilcke. 50 Pf.

Schwannecke, E., physikalische Schülerversuche. Berlin, Gärtner's Verl. 1 Mk.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 17.—21. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im J. 1890. 9. Jahrg. Hrsg. v. A. König. Berlin, Georg Reimer. 2 Mk.

Wendt, G., die Entwicklung der Elemente. Entwurf zu e. biogmat. Grundlage f. Chemie u. Physik. Berlin, A. Hirchwald. 2 Mk.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 17. Bd. 2. Abth. In der Reihe der Denkschriften der 63. Bd. München, Franz'scher Verl. 7 Mk.

Abhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 27. Bd. Mathematisch-physikal. Classe. 16. Bd. Leipzig, Hirzel. 21 Mk.

Annalen, mathematische. Begründet durch R. F. A. Clebsch. Hrsg. v. F. Klein, W. Dyck, A. Mayer. 38. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Für den Band 20 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächsichen Gesellschaft f. Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physik. Classe. 42. Bd. 1890. III u. IV. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 57. Bd. Leipzig, Freytag. 88 Mk.

Journal f. die reine u. angewandte Mathematik. Hrsg. v. L. Kronecker. 108. Bd. (4 Hfte.) 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Für den Band 12 Mk.

Mittheilungen, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus den Sitzungsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1891. 1. Hft. Berlin, Georg Reimer. Jährlich 8 Mk.

Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Red. v. Bubendey, Hoppe u. Busche. III. Bd. 1. Hft. Leipzig, Teubner. 1 Mk.

Monatshefte f. Mathematik u. Physik. Hrsg. von G. v. Escherich u. E. Weyr. 2. Jahrg. 1891. 1. Hft. Wien, Manz'scher Hof-Verl. Vierteljährlich 3 Mk 50 Pf.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen

aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 99. Bd. 7. Hft. Leipzig, Freytag. 7 Mk. 40 Pf.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1890. 4. Hft. München, Franz'scher Verl. 1 Mk. 20 Pf.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. 1890. I. u. II. Prag, Rivnač, Verl. 13 Mk. 20 Pf.

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik, hrsg. unter Red. v. O. Schlömilch, E. Kahl u. M. Cantor. 36. Jahrg. 1891. (6 Hfte.) 1. Hft. Leipzig, Teubner. Jährlich 18 Mk.

Zeitschrift f. mathematischen u. naturwissenschaftlichen Unterricht Hrsg. v. J. C. V. Hoffmann. 22. Jahrg. 1891. (8 Hfte.) 1. Hft Ebd. Jährlich 12 Mk.

Litterarischer Bericht
XL.

Lehrbücher.

Systematischer Grundriss der Elementar-Mathematik. Erste Abteilung: Die Algebra und die Grundbegriffe der Differentialrechnung. Für den Gebrauch an höheren Lehranstalten bearbeitet von Professor Dr. Eduard Fischer, Oberlehrer am Friedrichs-Gymnasium zu Berlin. Berlin 1891. Carl Duncker. 163 S.

Der Umfang des behandelten Lehrstoffs ist ein sehr grosser und überschreitet mehrfach das natürliche Pensum der Schule um ein bedeutendes. Die Einführung der Differentialrechnung allein ist auf dem Titel genannt; ihr voraus aber geht auch die der unendlichen Reihen. In beiden handelt es sich nicht um die allgemeinen Grundbegriffe und Principien: die Erklärungen werden so kurz als möglich, gerade ausreichend für alle folgenden Anwendungen gegeben. Den eigentlichen Inhalt bilden vielmehr die einfachsten speciellen Stücke aus Theorie und Rechnung, dazu eingerichtet, dass der Schüler von einigen Gegenständen der höhern Analysis eine Vorstellung bekommen soll. Eine gute Vorbereitung für das spätere Studium erhält er dadurch sicher nicht; ob er für andere Berufszweige davon Nutzen hat, lässt sich im ganzen nicht beurteilen; Einigen mag auch die blosse mitgeteilte Idee genügen um autodidaktisch weiter zu forschen. Jedenfalls eignen sich die 2 genannten höhern Rechnungen nicht zu obligatorischen Lehrgegenständen. Ganz unzutreffend ist die Aussage im Vorwort, der Verfasser sei bemüht gewesen das mathematische Pensum in seinem vollen natürlichen Umfange darzustellen; denn das Buch schliesst nicht mit erledigten Disciplinen, sondern mit

kleinen Anfängen zweier Disciplinen ab, aus denen deren Bedeutung sich nicht entnehmen lässt. Mit weit mehr Recht fügt der Verfasser an eben jener Stelle hinzu: „strenger, als es bisher in den meisten Lehrbüchern geschehen ist, in folgerichtiger Entwickelung seinem innnern Zusammenhange nach". In der Tat sind hier mit grosser Sorgfalt in Betreff aller Fragen, deren laxe Behandlung öfters Rüge erfahren hat, die Erfordernisse der Strenge durch die nötigen Erklärungen und exacte Deduction berücksichtigt worden: an ergänzenden Beweisen bei Erweiterungen des Zahlenbegriffs, am Kriterium der Convergenz unendlicher Reihen u. a. lässt sich nichts vermissen. Ob freilich die zu Erklärungen gebrauchten, als allgemein bekannt betrachteten Wörter dem Schüler anders bekannt sein werden, als sofern er oft davon hat reden hören, möchte sehr zu bezweifeln sein; auch lässt sich in dieser Beziehung, wenn nur der Lehrgang correct ist, dem Verständniss mündlich nachhelfen. Eher als gegen die „folgerichtige Entwickelung" sind gegen die Auffassung des „innern Zusammenhangs" Einwände zu machen. Wenn der Anfang des Buches die systematisch dekadische Schreibung der Zahl als Vorbedingung der vollen Entwickelung der Algebra hinstellt, so werden damit zwei Dinge, die einander nichts angehen, in eine aus der Luft gegriffene Beziehung gesetzt. Die Behauptung ist hier eine müssige; wenn man sie streicht, so bleibt keine Lücke. In einem zweiten Falle hingegen ist es damit nicht getan. Nachdem der binomische Satz für positive ganze Exponenten bewiesen ist, wird die Frage erhoben, ob er auch für negative, dann für gebrochene Exponenten g e l t e. Selbstverständlich hat der b e w i e s e n e Satz nur Sinn für positive ganze Exponenten; für jeden andern Exponenten ist die Potenz einem Ausdruck anderer Form gleich; daher ist der Zusammenhang beider Ausdrücke hier, wo der eine als Fortgeltung des andern bezeichnet wird, unrichtig dargestellt; beide sind nur in einem allgemeinern, vorläufig noch unbekannten enthalten. Bei der Herleitung treten noch manche Mängel auf: die Determination scheint vergessen zu sein; dass und warum im Binom $(1+x)$ nie $x > 1$ sein darf, ist ausser Acht gelassen; auch die Berechtigung algebraische Operationen an den Termen unendlicher Reihen zu vollziehen ist nicht nachgewiesen. Hiergegen berichtigend vorzugehen, wäre unnütz: wer einen willkürlichen Streifzug macht, kann auch nach Belieben unverrichteter Sache umkehren. Nur wird durch solche Mängel recht offenbar; wie wissenschaftlich wertlos und, weil zur Nachlässigkeit verführend, pädagogisch verwerflich Streifzüge in die höhere Mathematik überhaupt sind. Das Lehrbuch beginnt mit den 7 Grundoperationen, behandelt die Gleichungen, Kettenbrüche und Combinatorik; das Uebrige ist besprochen.

Hoppe.

Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen, bearbeitet von **Wilhelm Winter**, Professor für Mathematik und Physik am k. alten Gymnasium zu Regensburg. München 1891. Theodor Ackermann. 329 S.

Das Lehrbuch zeichnet sich aus durch Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit. Es umfasst die 7 Grundoperationen, die linearen und quadratischen Gleichungen und die logarithmisch lösbaren, die Reihenlehre und Combinatorik und was damit in Verbindung steht. Auf jeden Lehrabschnitt folgen zahlreiche Aufgaben. Der Lehrvertrag zeigt wenig Geschick im concinnen präcisen Ausdruck; umsomehr sucht er durch Entfaltung des Begriffsinhalts und seiner Consequenzen es zu erreichen, dass nichts im dunkeln bleibt. Am meisten tritt jener Mangel hervor in den Definitionen der Grundbegriffe, die in der Einleitung zusammengestellt sind. Sie leiden grossenteils an dem, auch in andern Lehrbüchern vorkommenden Fehler, dass zur Begriffsbestimmung Elemente zugezogen werden, die mit dem Wesen des Begriffs nichts zu tun haben. Es werden Bedingungen künstlich zusammengebracht, welche es verwehren, dass man mit einem Worte einen falschen Begriff verbinde, die es aber nicht nur möglich, sondern recht wahrscheinlich lassen, dass der Anfänger überhaupt keinen Begriff findet, weil keine Angabe zur Bildung des Begriffs hinführt. Zur Aushülfe ist jeder Definition ein Beispiel beigefügt, aus dem wenigstens der Kundige sieht, was der Verfasser gemeint hat. Einige Definitionen kommen indes auch vor, die nicht einmal zutreffen. Hier ist vor allen die folgende zu nennen: „Zwei Grössen, welche für einander gesetzt werden können, ohne dass sich bei Beibehaltung derselben Umstände irgend eine andere von ihnen abhängige Grösse ändert, nennt man gleich". Das heisst einfacher ausgesprochen. Zwei Grössen sind einander gleich, wenn die ihnen entsprechenden Werte einer Function (bzhw. aller Functionen, wenn etwa „irgend ein" „ulla" bedeuten soll) einander gleich sind. In beiden Fällen wird Gleichheit durch Gleichheit erklärt: im zweiten muss man sogar unendlich viele Gleichheiten vorher kennen, ehe man von einer einzigen Gleichheit wissen kann. Abgesehen von diesem ungeheuerlichen Falle ist der Satz auch nicht zutreffend; denn abhängige Grössen wie x^2, $\sin x$ u. a. ändern sich auch bei Substitution ungleicher Grössen, $-x$, bzhw. $\pi - x$, nicht. Die Definition ist demnach in doppelter Hinsicht unrichtig, erstens als Cirkel, zweitens als unzutreffend. Doch auch wenn beide Fehler vermieden wären, so würde der zu Anfang gerügte Fehler bestehen bleiben, die Zuziehung von Elementen, die nicht zum Begriffe gehören. Was gehen den Begriff der Gleichheit zweier grössen andere Grössen an? Durch deren Einmischung wird sein Wesen als einfacher Grundbegriff nur

verdunkelt, der Zweck des Definirens geradezu vereitelt. Die Substituirbarkeit ist Folge, nicht Grund der Gleichheit. Diese Stellung hat sie in der gesamten mathematischeu Praxis. Die angebliche Definition, welche ihr die umgekehrte Stellung anweist, würde daher, wenn sie von Wirkung wäre, das Lernen bloss hindern.

Hoppe.

Julius Petersen, Lehrbuch der elementaren Planimetrie. Kopenhagen 1891. Andr. Fred. Höst og Son. 108 S.

Das Gegenwärtige ist die 2. Auflage des bereits im 265. litt. Bericht S. 6 besprochenen Lehrbuchs, übersetzt von R. von Fischer-Benzon. Da laut der Vorrede des Uebersetzers sie sich sachlich nur durch den Anhang von der ersten unterscheidet, so ist mit Verweisung auf den frühern Bericht jetzt nur von diesem Anhang zu reden. Der Verfasser räumt darin ein, dass der Beweis des Satzes 16. (die Summe der Aussenwinkel eines Vielecks ist = 4R) eine Lücke enthält. Diese beruhe darauf, dass die ideellen Objecte der Mathematik durch willkürliche Bedingungen bestimmt werden, sich daher mit den wirklichen Objecten nicht zu decken brauchen. So entspreche auch der definirte Begriff der Ebene nicht vollständig der wirklichen Ebene. Der Verfasser ergänzt ihn durch die Eigenschaft der Ebene, „dass sie bei auf einander folgenden Verschiebungen" (nämlich ohne Drehung) „in sich selbst ganz in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn einer ihrer Punkte in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt". Auf Grund dieser Eigenschaft lässt sich in der Tat jener (den Parallelensatz sichtlich vertretende) Satz beweisen. Man bindet einen den Umfang des Vielecks durchlaufenden Punkt an eine ohne Drehung bewegliche Ebene; dann zeichnen sich successive die Seiten auf ihr als Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, und die zwischen den consecutiven Strahlen liegenden Winkel summiren sich zum Vollwinkel. Indem wir Vorstehendes vollkommen anerkennen, haben wir doch Folgendes dazu zu bemerken. Erstens, dass die genannte Verschiebung ohne Drehung stattfindet, was der Verfasser zu sagen unterlassen hat, ist zur Richtigkeit des Satzes offenbar notwendig. Da aber eine solche nur auf der Ebene möglich ist, so ist das Weitere keine unterscheidende Eigenschaft mehr. Zweitens, eine den Begriff ergänzende Eigenschaft ist sachlich nichts andres als ein Grundsatz. Es hat sich also ergeben, dass ein Grundsatz unentbehrlich ist, was man längst wusste. Drittens, warum ist trotz der im Anhang gegebenen Aufklärung der lückenhafte Beweis von Satz 16. mit dem Anspruch auf Bündigkeit stehen geblieben? Viertens, die im Anhang bezeichnete Lücke ist keine vereinzelte:

die ganze Lehre vom Winkel entbehrt noch der exacten Basis. Der Winkel wird durch die Drehung einer Geraden erklärt; wodurch aber diese als Grösse bestimmt wird, ist mit keinem Worte gesagt. Im Einklang damit fehlen alle Sätze, welche principiell die Gleichheit und Messbarkeit der Winkel begründen. Diese lassen sich nicht als selbstverständlich übergehen, weil es sich nicht allein um Winkel mit gemeinsamem Scheitel handelt. Von ganzer und halber Umdrehung und von der Teilung in Grade ist die Rede, von gleichen Teilen aber nicht, das Wort „gleich" wird vermieden und damit die Frage nach der Bedingung der Gleichheit abgeschnitten. Hiermit bleibt der Winkel als Grösse eine vage Vorstellung, ein unverstandener Begriff; eine solche Lehre gehört nicht in eine exacte Doctrin.

Hoppe.

Planimetrie. Zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten bearbeitet von Dr. Richard Heger, a. o. Honorarprofessor an der Königl. Sächs. Technischen Hochschule und Oberlehrer am Wettiner Gymnasium zu Dresden. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 187 Holzschnitten. Breslau 1890. Eduard Trewendt. 136 S.

Die „Planimetrie" ist der erste der 4 Teile des Gesamtwerks: „Leitfaden für den geometrischen Unterricht". Die 2 ersten Teile sind in 1. Auflage im 274. litt. Bericht S. 17, die 5 letzten im 279. l. B. S. 26 besprochen. Die in der 2. Auflage vollzogene Hauptänderung besteht darin, dass soviel als möglich die Symmetrie zur Deduction, insbesondere zum Beweise der Congruenzsätze verwandt wird. Aus gutem Grunde wird jedoch keine Theorie der Symmetrie vorausgeschickt, sondern mit dem gleichschenkligen Dreieck als symmetrischer Elementarfigur beginnend in synthetischem Fortschritt die Reihe der Folgerungen entwickelt, und das Wesen der Symmetrie durch ihren Gebrauch zur Deutlichkeit gebracht. H.

Elementargeometrie. Von Ferdinand Roese, Oberlehrer in Wismar. Wismar 1890. Hinstorff. 98 S.

Das Buch besteht aus einer Reihe von Betrachtungen über Gegenstände der Geometrie, deren jede in der Regel mit einem Lehrsatze schliesst. Begründung dieser Sätze scheint überhaupt mit den Betrachtungen nicht beabsichtigt zu sein, denn weder ist diese Bestimmung irgendwo ausgesprochen, noch lässt sich darin eine genügende Begründung finden. Auch an exacten Definitionen fehlt es sehr. Ueberdies ist die Sprache stellenweis sehr ungenau. Dagegen kommen häufig geordnete Zusammenstellungen vor, auch wo man

keinen rechten Anlass dazu sieht, was auf die Vermutung führt, dass das Systematisiren das Hauptinteresse des Verfassers sein mag.

Hoppe.

Schultrigonometrie. Von Dr. Theodor Walter, Direktor der Grossherzoglich hessischen Realschule zu Bingen am Rhein. Halle a. S. 1891. Buchhandlung des Waisenhauses. 80 S.

Das Lehrbuch unterscheidet sich besonders dadurch, dass darin die Goniometrie fehlt, und dass es auch die Bedeutung der Dreiecksrelationen auf die Anwendung zur numerischen Berechnung aus numerischen Datis beschränkt, diese Anwendung dagegen principiell in grösserer Ausführlichkeit behandelt, als es sonst zu geschehen pflegt. Es wird demgemäss erst Sinus, dann Cosinus, dann Tangens und Cotangens, jeder einzeln (für Winkel $< 2R$) erklärt, die ihn betreffenden Formeln entwickelt und der Rechnungsgang gezeigt, dann über alle zussmmen erst Musterbeispiele, dann Uebungsbeispiele gegeben. Zum Schlusse werden noch die Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck, wiewol ohne Anwendung, hergeleitet und auf 3 Seiten eine vierstellige Tabelle der Logarithmen, der Sinus, Cosinus, Tangens aufgestellt. Als Motiv der Beschränkung gibt die Vorrede an, dass dadurch der Unterricht einheitlicher werde. Einheitlicher wird er, das lässt sich freilich nicht leugnen, von selbst durch seine Einseitigkeit. Es ist aber gerade das geistbildende Element, was hier ausgeschlossen wird; nur das handwerksmässige Rechnen bleibt und wird bevorzugt. Ferner wird in der Vorrede die Goniometrie ein Instrument der Analysis genannt. Das ist sie in gleichem Sinne wie die gesamte Algebra. Sowenig aber die Algebra der Schule sich auf numerische Auflösung von Gleichungen beschränkt, so wenig es ein Uebergreifen in die Analysis ist, dass sie alle algebraischen Beziehungen in voller Allgemeinheit enthält, sowenig kann auch der Schulunterricht die goniometrischen Relationen als ein fremdes Gebiet betrachten. Soll die Trigonometrie als Mathematik gelehrt werden, so muss sie in erster Linie mit allgemeinen Grössen rechnen, und dazu ist ihr, die Goniometrie unentbehrlich. Endlich ist noch eine Aeusserung in der Vorrede zu bestreiten, nach welcher man gegenwärtig bestrebt wäre, den Lehrstoff zu beschränken. Dem glaubt nun der Verfasser durch die genannte Beschränkung Rechnung zu tragen. Neuere Lehrbücher zeigen im Gegenteil das Streben den Unterricht in der Trigonometrie stofflich noch weiter auszudehnen. Wenn also der Verfasser sich auf Richard Baltzer's Forderung die Goniometrie zu beschränken beruft, so kann diese

Forderung sich auf Ausdehnungen beziehen, die zu missbilligen sind. Die Erwähnung der 1802 erschienenen Trigonometrie ohne Goniometrie zeigt das Gegenteil von dem, was sie zeigen soll, nämlich dass der Gedanke keine dauernde Beistimmung gefunden hat.

Hoppe.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Akademische Vorlesungen von H. Weber, Professor der Mathematik an der Universität Marburg. Braunschweig 1891. Friedrich Vieweg und Sohn. 504 S.

In diesem Werke werden uns die Entdeckungen, mit denen nach Jacobi die Theorie und Anwendung der elliptischen Functionen bereichert worden ist, und die bisher schwer zugänglich waren, nachdem sie bereits durch Halphen an die Oeffentlichkeit gelangt sind, in einem dem Verständniss entgegenkommenden Vortrage erschlossen. Das Werk besteht aus 3 Teilen. Der erste, genannt analytische Teil enthält die Theorie der elliptischen und Theta-Functionen als Functionen von Argument und Modul, nämlich der Reihe nach die elliptischen Integrale, die Thetafunctionen, deren Transformationen, die elliptischen Functionen, die Modulfunctionen und 2 Anwendungen; der zweite, genannt algebraische Teil Functionen des Moduls allein, einzeln: Hülfssätze aus der Algebra, Multiplication und Teilung der elliptischen Functionen, Theorie der Transformationsgleichungen, die Gruppe der Transformationsgleichungen und die Gleichung 5. Grades; der dritte, genannt zahlentheoretische Teil die algebraischen Zahlen, welche man erhält, wenn der Modul einen besondern, ausgezeichneten Zahlenwert hat, einzeln: complexe Multiplication, Berechnung von Classeninvarianten, die Multiplicatorgleichung in der complexen Multiplication und die Zerfällung der Classengleichung in Factoren, Galois'sche Gruppe der Classengleichung, die Normen der Classeninvarianten $f(\omega)$, Teilung der elliptischen Functionen mit singulären Moduln. Der Anhang gibt ein Verzeichniss von Classeninvarianten.

H.

Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. Joh. Schumacher, Reallehrer an der Kgl. Realschule zu Neustadt a. H. Erlangen und Leipzig 1890. Andr. Deichert. 137 S.

Hiermit gibt der Verfasser seine eigenen Untersuchungen als Beitrag zu den Arbeiten von Abel, Galois, Gordan, Hermite, Jacobi, Klein, Kronecker und Lagrange heraus. H.

Neue Rechnungsmethoden der höheren Mathematik. Von Dr. Julius Bergbohm. Stuttgart 1891. Selbstverlag des Verfassers. 30 S.

Die vorliegende Schrift geht aus mehrfachem Irrtum hervor. Zunächst hat der Verfasser die Bedeutung der Differentialrechung ganz verkannt, indem er dieselbe, ohne auf die Bestimmung des Differentials als Charakterisirung des Laufes einer Function zu achten, schlechthin als Rechnung mit Unendlichkleinen ansieht. Dass man mit der Unendlichkleinen ∂x ebenso rechnen kann, wie mit jeder andern, scheint er für eine neue Entdeckung gehalten zu haben, denn sonst kommt nichts vor, was mit den „neuen Rechnungsmethoden" gemeint sein könnte. Welche Beziehung die auf ∂x ausgeübten Operationen zur Differentialrechnung haben könnten, ist mit keinem Worte gesagt. Die dafür erfundenen Namen und Zeichen sind schon darum müssig, aber auch weil neben den gewöhnlichen Operationszeichen andere nur vom Uebel sind. Hoppe.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 14. Stockholm 1891. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 14. Band enthält folgende Abhandlungen.

C. Juel: Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie.

W. Raschke: Ueber die Integration der Differentialgleichungen 1. Ordnung, in welchen die unabhängige Veränderliche nicht vorkommt.

S. Kowalevski: Ueber eine Eigenschaft des Systems von Differentialgleichungen, welches die Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt definirt.

F. Casorati: Krümmungsmass der Flächen nach der gemeinen Vorstellung.

G. Scheffers: Bestimmung einer Classe von Berührungstransformationsgruppen des dreifach ausgedehnten Raumes.

G. Kirchhoff: Beweis der Existenz des Potentials, das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werte hat, für den Fall dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist.

J. J. Sylvester: Ueber eine „funiculare" allgemeine Lösung von Ruffon's Problem der Nadeln in allgemeinster Form.

H. Schröter: Ueber die 8 Schnittpunkte dreier Flächen 2. Ordnung.

A. Hurwitz: Ueber beständig convergirende Potenzreihen mit rationalen Zahlencoefficienten und vorgeschriebenen Nullstellen.

D. Hilbert und A. Hurwitz: Ueber die diophantischen Gleichungen vom Geschlecht Null.

E. Phragmén: Bemerkungen über die Theorie der conformen Abbildung.

Brioschi: Die Invarianten der linearen Differentialgleichungen.

A. Berger: Untersuchungen über die Bernoulli'schen Zahlen und Functionen.

P. Tschebyscheff: Ueber 2 Wahrscheinlichkeitsprobleme.

K. Hensel: Ueber die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus 2 andern componirt ist.

J. Haeks: Ueber die Classenanzahl der zu einer negativen Determinante $D = -q$ gehörigen, eigentlich primitiven quadratischen Formen, wo q eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist. — Einige Anwendungen der Function $[x]$.

J. Horn: Beiträge zur Ausdehnung der Fuchs'schen Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ein System linearer partieller Differentialgleichungen.

H. Hertz: Ueber die fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié, par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Ac. roy. de Belge, etc. et J. Neuberg, Professeur ordinaire à l'Université de Liége, Membre de la Soc. roy. des sc. de Liége. Tome dixième. Gand 1890. Ad. Hoste. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Der 10. Band, der letzte der ersten Reihe, enthält folgende Abhandlungen und Noten.

E. Lucas: Ueber einige Fragen in Betreff der Vorzeichen in der analytischen Geometrie. — Ueber die vollkommenen Zahlen. — Kriterium für Paoli's Formel. — Ueber die verschiedenen Zählungssysteme.

C. Servais: Geometrische Untersuchung der Cissoide und Strophoide. — Ueber die Umkehrbarkeit der linearen Transformation.

E. Cesáro: Ueber eine Frage der Grenzen. — Ueber die Elemente der Kettenlinie. — Ueber die Anwendung der barycentrischen Coordinaten.

P. Mansion: Crelle oder Brocard? — Paradoxon.

Mandaert: Ueber eine Gruppe von 3 Parabeln.

E. Le Paige: Die Formel von Ozanam verdanken wir W. Snell.

G. de Longchamps: Ueber das orthocentrische Tetraeder.

Dewulf: Ueber die osculirenden Kegelschnitte.

Desmons und Gelin: Elementarer Beweis einer Ungleichung.

G Peano: Die Sätze des 5. Buchs von Euklid in Formeln dargestellt. — Ueber die Umkehrung der partiellen Derivationen.

W. Fuhrmann: Ueber einen neuen Kreis am Dreieck.

C. Bergmans: Sätze über die Parabel.

A. Denys: Ueber das regelmässige Neuneck.

E. Gelin: Fläche und Volum des „tore" (erzeugt von einem Kreise, der um eine nicht schneidende Axe seiner Ebene rotirt).

E. Catalan: Bemerkungen über eine Note von E. Lucas. — Ueber die unbestimmte Analysis 1. Grades.

A. Del Re: Zu einem Probleme über das circuläre Billard.

Laisant: Ueber die Transformation durch reciproke Radienvectoren.

A. Poulain: Ueber einige Reihen von merkwürdigen Punkten in der Ebene des Dreiecks.

Lac de Bosredon: Bestimmung der Brennpunkte, Directricen und Axen der Kegelschnitte. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bechert, M., de M. Manilio astronomicorum poeta. Leipzig, Hinrichs'sche Buchh. 1 Mk. 20 Pf.

Kirchhoff, G., gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Hrsg. v. L. Boltzmann. Leipzig, J. A. Barth. 3 Mk. 60 Pf.

Netoliczka, E., Bilder aus der Geschichte der Physik. Für Freunde der Naturwissenschaften u. Studirende an höheren Schulen. Nach d. Verf. Tode fortgesetzt u. durchgesehen v. A. Wachlowski. Wien, Pichler's W. & S., Verl. 3 Mk. 60 Pf.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. No. 21 u. 23. Ueber die Wanderungen der Sonne während der Elektrolyse. 2 Tle. 3 M. 10 Pf. — No. 24. Unterredungen u. mathematische Demonstrationen üb. zwei neue Wissenszweige, die Mechanik u. die Fallgesetze betr., v. G. Galilei. 3. u. 4. Tag. Aus dem Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. von A. v. Oettinger. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Methode und Principien.

Fick, A., die stetige Raumerfüllung durch Masse. Würzburg, Stahel, Verl. 1 Mk.

Heinze u. Hübner, Methodik d. Rechnens. Lehrer-Asg. d. Rechenbuches f. einfache Schulverhältnisse (B), enth. Aufgaben u. Auflösungen m. method. Anweisgn. u. vielen Musterlektionen. 3 Hfte. Breslau, Görlich's Verl. 3 Mk. 20 Pf.

Pietzker, F., die Gestaltung d. Raumes. Kritische Untersuchgn. üb. die Grundlagen der Geometrie. Braunschweig, Salle. 2 Mk.

Schmidt, E. v., Euklid's 11. Axiom, durch e. neue Definition der graden Linien bewiesen. Moskau, Deubner. 80 Pf.

Secchi, A., die Einheit der Naturkräfte. Ein Beitrag zur Naturphilosophie. Autoris. Uebersetzg. v. L. R. Schulze. 2. Afl. Wohlf. Asg. (In 9 Lfgn.) 1. Lfg. Braunschweig, Salle. 80 Pf.

Stolz, O., Grössen u. Zahlen. Rede. Leipzig, Teubner. 80 Pf.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik, f. den Schulunterricht bearb. 1. Tl. 33. Afl. Geb. 1 Mk. 65 Pf.; 2. Tl. 90.—92. Afl. Geb. 1 Mk. 65 Pf.; 4. Tl. 21. Afl. Geb. 1 Mk. 50 Pf. Breslau, Ferd. Hirt.

Sammlungen.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- u. Integralrechnung, nebst den Resultaten u. den zur Lösg. nöth. theoret. Erläutergn. 5. Afl. Giessen, Ricker'sche Buchh., Verl. 3 Mk. 40 Pf.; geb. 4 Mk.

Dürr's Rechenbuch f. Klasse III höherer Lehranstalten. 2. Afl. Umgearb. v. W. Fick. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. Kart. 1 Mk.

Genau, A., Rechenbuch f. Lehrerseminaren. Verb. v. A. Genau u. P. A. Tüffers. 8. Afl. 1. Bd.: Für die Unterstufe der Seminare, sowie f. Präparandenanstalten. Gotha, Thienemann. 1 Mk. 80 Pf.

Hermes, O., Elementaraufgaben aus der Algebra. 8. Afl. Berlin, Winckelmann & S. 1 Mk. 60 Pf.

Kleyer, A., vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung aus allen Zweigen der Rechenkunst, der niederen u. höheren Mathematik, der Physik etc. 888.—927. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Löwe, M., u. F. Unger, Aufgaben f. das Zahlenrechnen f. höhere Schulen. Hft. B: Die 4 Species m. Brüchen. Für Quinta. 4. Afl. Leipzig, Klinkhardt. 60 Pf.

Magnus, K. H. L., u. K. Wenzel, Rechenbuch f. Fortbildungsschulen. Asg. B. Auflösungen zum 2. Teil. Hannover, Meyer. 50 Pf.

Messien, H., Rechenbuch f. gewerbliche Fortbildungsschulen. sowie f. Fortbildungsschulen im Allgemeinen. Mit e. Vorworte v. R. Enke. 2 Tle. Dresden, Minden & W. 2 Mk. 10 Pf.

Quitzow, W. A., praktisches Rechenbuch f. Schulen in systematischer Reihenfolge. 1. Tl. 28. Afl. 50 Pf.; 2. Tl. 22. Afl. 50 Pf. Lübeck, Quitzow.

Schwering, K., 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie, nebst vollständ. Lösgn. Freiburg, Herder. 2 Mk.; Einbd. 25 Pf.

Stier, H., Rechenhefte f. die Unter- u. Mittelklassen der Realschulen u. Gymnasien. 4. Hft. 4. Afl. Chemnitz, Brunner'sche Buchh. 90 Pf.

Walter, Th., algebraische Aufgaben. (Methodische Untersuchgn. aus dem Gebiete der elementaren Mathematik.) 2. Bd. Quadratische Bewegungsaufgaben, Bewegungsaufgaben m. mehreren Unbekannten. Kreisbewegung. Spezifisches Gewicht. Ausfluss. Arbeit. Stuttgart, Union. 2 Mk.

Tabellen.

August, E. F., vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 17. Afl., besorgt v. F. August. Leipzig, Veit & Co. Geb. 1 Mk. 60 Pf.

Gauss, F. G., fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln. Halle, Strien, Verl. Geb. 2 Mk. 50 Pf.

May, O., Tafel f. elektrische Leitungen. 2. deutsche Afl. Leipzig, v. Biedermann. Auf Pappe m. Metallecken. 1 Mk.

Rühlmann, M., u. M. R. Rühlmann, logarithmisch-trigonometrische u. andere f. Rechner nützliche Tafeln. 11. Aufl. Leipzig, Klinkhardt. 2 Mk.

Vega, G., Frhr. v., logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Ster.-Asg. Bearb. v. C. Bremiker. 73. Aufl. v. F. Tietjen. Berlin, Weidmann'sche B. 4 Mk. 20 Pf.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Benoit, P., üb. Differentialgleichungen, welche durch doppelperiod. Funktionen 2. Gattg. erfüllt werden. Berlin, Gaertner's Verl. 1 Mk.

Glöser, M., Grundzüge der allgemeinen Arithmetik f. die 3. Classe der österreichischen Mittelschulen. 3. Afl. Wien, Pichler's Wwe. & S., Verl. 1 Mk.

Hartl, M., arithmetische Spielereien. Wien, Sallmayer'sche Buchh. 60 Pf.

Hočevar, F., Lehr- u. Uebungsbuch der Arithmetik f. die unteren Classen der Gymnasien und verwandten Lehranstalten. Leipzig, Freytag. 1 Mk. 30 Pf.; Einbd. 30 Pf.

Pockels, F., üb. die partielle Differentialgleichung $\Delta\mu + k^2 n = 0$ u. deren Auftreten in der mathematischen Physik. Mit e. Vorwort v. F. Klein. Leipzig, Teubner. 8 Mk.

Scheffler, H., Beiträge zur Theorie der Gleichungen. Leipzig, Fr. Förster. 3 Mk. 50 Pf.

Scholim, P., kurzgefasstes algebraisches Regelheft f. die mittleren u. oberen Klassen der Gymnasien. Kreuzburg, Thielmann's Buchh. 60 Pf.

Geometrie.

Blancke, H., Raumlehre. 1. Tl. 12. Afl. Hannover, Schmorl & v. Seefeld's Nachf. Geb. 60 Pf.

Emmerich, A., die Brocard'schen Gebilde u. ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten u. Kreisen d. Dreiecks. Berlin, Georg Reimer. 5 Mk.

Focke, M., u. M. Krass, Lehrbuch der Geometrie. 1. Tl.: Planimetrie, nebst e. Sammlg. v. Aufgaben u. e. systemat. Anleitg. zur Lösg. derselben. 10. Afl. Münster, Coppenrath'sche Buchh., Verl. 1 Mk. 80 Pf.

— Lehrbuch der Geometrie. 2. Tl. Stereometrie. 5. Afl. Ebd. 1 Mk. 20 Pf.

Jahn, W., u. B. Stiehler, Schule der Geometrie. 7. Hft. 2 Afl. Leipzig, Klinkhardt. 40 Pf.

Kohn, G., üb. einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone. Leipzig, Freytag. 30 Pf.

Machovec, F., üb. die Krümmungsmittelpunkte der Dreiecks-Curven (courbes triangulaires). Prag, Rivnáč. 60 Pf.

Meyer, C., Lehrbuch der Geometrie f. Gymnasien u. andere Lehranstalten. Hrsg. von H. C. E. Martus. 1. Tl.: Planimetrie. 15. Afl. Leipzig, C. A. Koch. 1 Mk. 80 Pf.

Michalitschke, A., die archimedische, die hyperbolische u. die logarithmische Spirale. Zum Gebrauche f. Studirende auf Universitäten u. technischen Hochschulen. 2. Afl. 1. Tl. Prag, Dominicus, Verl. 3 Mk.

Mittenzwey, L., Geometrie f. gehobene Volks- u. Fortbildungsschulen u. untere Klassen höherer Lehranstalten. Asg. B. 3 Hfte. 1. Hft. 8. Afl.; 2. Hft 6. Afl.; 3. Hft. 4. Afl. à 30 Pf. Leipzig, Klinkhardt.

Moecke, E., üb. zweiaxig-symmetrische Kurven 4. O. m. 2 Doppelpunkten. Gross-Strehlitz, Wilpert. 1 Mk. 20 Pf.

Peche, M., analytische Bestimmung aller Minimalflächen, welche e. Schaar reeller Parabeln enthalten. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk.

Sack, P., üb. Kreisbündel II. Ordnung. Jena, Neuenhahn. 80 Pf.

Schemann, L., die wichtigsten Formeln aus der Stereometrie u. Planimetrie. Alzey, Medicus. 60 Pf.

Schmid, Th., üb. Berührungscurven u. Hülltorsen der windschiefen Helikoide u. e. dabei auftretendes zwei-zweideutiges Nullsystem. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Seeger, H., Leitfaden f. den ersten Unterricht in der Geo-

metrie. 5. Afl. Wismar, Hinstorff'sche Hofbuchh., Verl. Geb. 40 Pf.

Venske, O., Behandlung einiger Aufgaben der Variationsrechnung, welche sich auf Raumcurven constanter erster Krümmung beziehen. Göttingen, Vandenhoeck & R. 1 Mk. 20 Pf.

White, H. S., Abel'sche Integrale auf singularfreien, einfach überdruckten, vollständigen Schnittcurven e. beliebig ausgedehnten Raumes. Leipzig, Engelmann. 4 Mk.

Wiegand's Lehrbuch der Planimetrie. 2. Kurs. 11. Afl. Halle, H. Schmidt's Verl. 1 Mk.

— dass. (1. u. 2. Kurs.) 22. Afl. Asg. in österreich. Orthographie. Ebd. 2 Mk.

Trigonometrie.

Schemann, L., die wichtigsten Formeln aus der Goniometrie u. ebenen Trigonometrie. Alzey, Medicus. 60 Pf.

Praktische Geometrie, Geodäsie.

Ehrenburg, K., Studien zur Messung der horizontalen Gliederung von Erdräumen. Würzburg, Stahel, Verl. 2 Mk.

Höckner, W. G., Einschaltung v. Punkten in e. durch Coordinaten gegebenes, trigonometrisches Netz m. ausgiebiger Verwendung e. Rechenmaschine. Leipzig, Fock, Verl. 2 Mk.

Mechanik.

Kramerius, J., Repetitorium aus Geometrie u. Mechanik f. baugewerbliche Schulen u. die Baupraxis. 2. Afl. Wien, Pichler's W. & S., Verl. 1 Mk. 60 Pf.; geb. 2 Mk.

Technik.

Anleitung, praktische, zur Anlage v. Blitzableitern. 2. Afl. Leipzig, Leiner. 60 Pf.

Arnold, E., Ankerwicklungen der Gleichstrom-Dynamomaschinen. Entwicklung u. Anwendg. e. allgemeingült. Schaltungsregel. Berlin, Springer. Geb. 5 Mk.

Biščan, W., Farben, Zeichen u. Schriften f. den Gebrauch in der Elektrotechnik. Leipzig, Gebhardt's Verl. 1 Mk. 20 Pf.

— Elektrotechnische Vorlagen. Sammlung konstruktiver Aufnahmen aus dem gesammten Gebiete der Elektrotechnik. 1. Lfg. Mit erläut. Text. Ebd. In Mappe 8 Mk.

Echo, elektrotechnisches. Chefred.: M. Krieg. 4. Jahrg. 1891. 14. Hft. Leipzig, Leiner. Vierteljährl. 3 Mk. 75 Pf.

Elektricität. Offizielle Zeitg. der internationalen elektrotechn. Ausstellung Frankfurt a/M. 1891. Red. v. H. Massenbach u. M. Quarck. (In 30 Nrn.) Nr. 1. Frankfurt, Haasenstein & V. Vollständig 20 Mk.; einzelne Nrn. à 7 Mk.

Elektrotechniker, der. Erstes österreich-ungar. Fachjournal. Hrsg.: G. G. Ungar-Szentmiklósy. Red. J. Pulletz. 10. Jahrg. Mai 1891 bis April 1892. Nr. 1. Wien, Perles' Verl. Jährlich 12 Mk.

Experimental-Physiker, der praktische. Nach Experimental Science v. G. M. Hopkins. Hrsg. unter Mitwirkg. v. Weiler, Schirlitz, Schwartze etc. v. der Red. der „Prakt. Physik." Chef-Red.: M. Krieg. 9.—15. (Schluss-) Lfg. Magdeburg, Faber'sche Buchdr., Verl. à 75 Pf.; kplt. geb. 13 Mk. 25 Pf.

Fortschritte der Elektrotechnik. Hrsg. v. K. Strecker. 3. Jahrg. Das Jahr 1889. 4. Hft. Berlin, Springer. 8 Mk.

Graetz, L., die Elektricität u. ihre Anwendungen zur Beleuchtung, Kraftübertragung, Energievertheilung, Metallurgie, Telegraphie u. Telephonie. Für weitere Kreise dargestellt. 3. Afl. Stuttgart, Engelhorn. 7 Mk.

Ludolph, W., Leuchtfeuer u. Schallsignale der Erde 1891. 20. Jahrg. 6. Afl. Bremen, Heinsius Nachf Geb. 7 Mk. 50 Pf.

Pechau, J., Leitfaden der Elektromaschinentechnik m. besond. Berücksichtg. der elektrischen Beleuchtung f. Vorträge, sowie zum Selbstunterricht f. angeh. Elektrotechniker etc. Reichenberg, Fritsche. 3 Mk. 60 Pf.

Verzeichniss der Leuchtfeuer u. Nebelsignalstationen aller Meere. Hrsg. v. dem hydrograph. Amt d. Reichs-Marine-Amts. 8 Hefte. Ausg. April 1891. Berlin, Mittler & S. 6 Mk.

Zetzsche, K. E., Handbuch der elektrischen Telegraphie, unter Mitwirkg. v. mehreren Fachmännern hrsg. 3. Thl. Die elektr. Telegraphie im engeren Sinne. II. Hälfte. Halle, Knapp. 17 Mk.

Optik, Akustik und Elasticität.

Kayser, H., u. C. Runge, üb. die Spectren der Elemente. 4. Abschn. Berlin, Georg Reimer. 4 Mk. 80 Pf.

Erd- und Himmelskunde.

Bauschinger, J., zweites Münchener Sternverzeichniss, enth. die mittleren Oerter v. 13200 Sternen f. das Aequinoctium 1880. München, Franz'scher Verl. 12 Mk.

Beobachtungen, magnetische, d. Tifliser Observatoriums im J. 1888/89, hrsg. v. J. Mielberg. (Russisch u. deutsch.) St. Petersburg, Eggers & Co. 4 Mk.

Beobachtungen, meteorologische, d. Tifliser physikalischen Observatoriums im J. 1889, hrsg. von J. Mielberg. (Russisch u. deutsch.) Ebd. 3 Mk. 50 Pf.

Elster, J., u. H. Geitel, elektrische Beobachtungen auf dem Hohen Sonnblick. Leipzig, Freytag. 40 Pf.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Bremen, Station 1. Ordnung, von 1803—1890. Hrsg. v. F. Bergholz. 1. Jahrg. Bremen, Nössler. 3 Mk.

Förster, W., Weltzeit u. Ortszeit im Bunde gegen die Vielheit der sogenannten Einheits- oder Zonen-Zeiten. Berlin, Dümmler's Verl. 60 Pf.

Günther, S., Lehrbuch der physikalischen Geographie. Stuttgart, Enke. 12 Mk.

Hahn, R., mikronometrische Vermessung d. Sternhaufens Σ 762, ausgeführt am zwölffüss. Aequatorial der Leipziger Sternwarte. Leipzig, Hirzel. 6 Mk.

Hann, J., die Veränderlichkeit der Temperatur in Oesterreich. Leipzig, Freytag. 4 Mk. 10 Pf.

Herz, N., Theorie e. m. e. Vertikal versehenen Passage-Instrumentes im ersten Vertikale. Wien, Frick. 1 Mk.

Jahrbuch, deutsches meteorologisches, f. 1890. Beobachtungssystem d. Königr. Preussen u. benachbarten Staaten. Ergebnisse der meteorolog. Beobachtgn. im J. 1890. Hrsg. v. dem königl. preuss. meteorolog. Institut durch W. v. Bezold. 2. Hft. Berlin, Asher & Co., Verl. 13 Mk.

König, R., Bestimmung der Bahn der Kometen 1857. III. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Láska, W., zur Berechnung der absoluten Störungen. Prag, Rivnáč, Verl. 20 Pf.

Mazella, E., der tägliche Gang der Häufigkeit u. Stärke der einzelnen Windrichtungen zu Triest. Leipzig, Freytag. 60 Pf.

Nachrichten, astronomische, Hrsg.: A. Krüger. 127. Bd. Nr. 1. Hamburg, Mauke Söhne. Für den Band 15 Mk.

— dasselbe. General-Register der Bde. 81 bis 120. Verf. v. H. Kreutz u. R. Schorr. Hrsg. v. A. Krüger. Ebd. 25 Mk.

Niessl, G. v., Bahnbestimmung d. grossen Meteors vom 17. Januar 1890. Leipzig, Freytag. 90 Pf.

Oertel, K., neue Beobachtung u. Ausmessung d. Sternhaufens 38 h. Persei am Münchener grossen Refractor. München, Franz'scher Verl. 5 Mk.

Ritzhaupt, F., der Sternhimmel m. seinen Veränderungen, nebst e. Darstellg. üb. d. Vertheilg. d. Sonnenlichtes auf der Erdoberfläche. Gemeinfasslich erläutert. 2. Afl. Karlsruhe, Macklot'sche Buchh., Verl. 40 Pf.

Romberg, H., Catalog v. 5634 Sternen f. die Epoche 1875. 0 aus den Beobachtungen am Pulkawaer Meridiankreise während der J. 1874—1880. Supplément III aux Observations de Poulkova. Leipzig, Voss' Sort. 8 Mk.

Sternkarte, drehbare. Der Sternhimmel zu jeder Stunde d. Jahres. Ausg. f. Mittel-Europa. 9. Afl. Frankfurt a/M., Deutsche Lehrmittel-Anstalt. 1 Mk. 25 Pf.

Unterweger, J., üb. die kleinen Perioden der Sonnenflecken u. ihre Beziehung zu einigen periodischen Erscheinungen der Erde. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 20 Pf.

Veröffentlichung d. königl. preussischen geodätischen Institutes. Das Berliner Basisnetz 1885—1887. Berlin, Stankiewicz. 6 Mk.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Hrsg. v. E. Schönfeld u. H. Seeliger. 25 Jahrg. 4. Heft. Leipzig, Engelmann. 2 Mk.

Wolf, R., Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte u. Litteratur. 2. Halbbd. Zürich, Fr. Schulthess. 8 Mk.; 1. Bd. kplt. 16 Mk.

Nautik.

Handbuch der Nagivation m. besonderer Berücksicht. v. Kompas u. Chronometer, sowie der neuesten Methoden der astronomischen Ortsbestimmung. Hydrographisches Amt d. Reichs-Marine-Amts. 3. Afl. Berlin, Mittler & S. 5 Mk.

Physik.

Blakesley, Th. H., die elektrischen Wechselströme. Zum Gebrauche f. Ingenieure u. Studirende bearb. Mit Genehmigg. d. Verf. übers. v. H. F. Feldmann. Berlin, Springer. Geb. 4 Mk.

Clausius, R., die mechanische Wärmetheorie. 2. Afl. der Abhandlungen üb. die mechan. Wärmetheorie. 8. Bd. Entwickelung der besonderen Vorstellgn. v. der Natur der Wärme als e. Art der Bewegung. Hrsg. v. M. Planck u. C. Pulfrich. 2. (Schluss-)Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 6 Mk. 80 Pf.; 3. Bd. kplt. 8 Mk.

Fricke, A., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik. 2. Kurs. 3. Afl. Braunschweig, Appelhans & Pf. 1 Mk. 45 Pf.; geb. 1 Mk. 75 Pf.

Handbuch der Physik, hrsg. v. A. Winkelmann. 8. u. 9. Lfg. Breslau, Ed. Trewendt. 7 Mk. 20 Pf.

Hertz, M. H., sur les équations fondamentales de l'electrodynamique pour les corps en repos. Basel, Georg, Verl. 2 Mk.

Kirchhoff, G., Vorlesungen üb. mathematische Physik. 2. Bd. Mathematische Optik. Hrsg. v. K. Hensel. Leipzig, Teubner. 10 Mk.

Kleyer, A., die elektrischen Erscheinungen u. Wirkungen in Theorie u. Praxis. 157. u. 158. Hft. Stuttgart, Jul. Maier. à 25 Pf.

Lang, V. v., Einleitung in die theoretische Physik. 2. Afl. Braunschweig, Vieweg & S. 20 Mk.

Rubner, M., calorimetrische Methodik. Marburg, Elwert'sche Verlagsh. 2 Mk. 20 Pf.

Urbanitzky, A. Ritter v., u. S. Zeisel, Physik u. Chemie. Eine gemeinverständl. Darstellg. der physikal. u. chem. Erscheingn. in ihren Beziehgn. zum prakt. Leben. 22.—25. Lfg. Wien, Hartleben. à 50 Pf.

Schwartze, Th., Elektrizität u. Magnetismus als Bewegungsformen, erklärt nach der gynoskopischen Theorie. Berlin, Siemens. 1 Mk.

Violle, J., Lehrbuch der Physik. Deutsche Asg. v. E. Gumlich, L. Holborn, W. Jaeger, D. Kreichgauer, S. Lindeck. 1. Tl. Mechanik. 1. Bd. Allgemeine Mechanik u. Mechanik der festen Körper. (In 5 Lfgn.). 1. Lfg. Berlin, Springer. 2 Mk.

Waeber, R., Leitfaden f. den Unterricht in der Physik m. besond. Berücksicht. der Witterungskunde. 7. Afl. Leipzig, Hirt & S. Geb. 1 Mk. 20 Pf.

Vermischte Schriften.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem J. 1890. Physikalische. Berlin, Georg Reimer. Kart. 7 Mk. 50 Pf.

Berichte, mathematische u. naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Red. v. D. Fröhlich. 8. Bd. (Oct. 1889 — Oct. 1890.) Berlin, Friedländer & S. 8 Mk.

Berichte üb. die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-phys. Classe 1891. I. Leipzig, Hirzel. 1 Mk.

Jacobi's, C. G., gesammelte Werke. Hrsg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. 6. Bd. Hrsg. v. K. Weierstrass. Berlin, Georg Reimer. 14 Mk.

Mittheilungen d. mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins in Württemberg, hrsg. v. O. Böklen. 4. Bd. (2 Hfte.). 1. Hft. Stuttgart, Metzler'sche Buchh., Verl. Für den Band 3 Mk.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftl. Classe. Abth. IIa. Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie u. der Mechanik. 99. Bd. 10. Hft. Leipzig, Freytag. 3 Mk. 80 Pf.



